Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Устинов, О подпространствах существования в $C(Q)$,
Матем. заметки, 1999, том 65, выпуск 5, 726–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:44:46

УДК 517.982.256

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ В $C(Q)$

Г. М. Устинов

Свойство пространства быть подпространством существования исследуется для тех подпространств $E \subset C(Q)$, для которых либо E , либо $C(Q)/E$ есть пространство Линденштраусса.

Для чебышевского подпространства $L \subset C(Q)$ приводится формула, в которой, используя аннулятор $L^\perp$, дается аналитическое представление ближайшего элемента.

Библиография: 13 названий.

Аппроксимационные свойства подпространств $E \subset C(Q)$, $\dim E = \operatorname{codim} E = +\infty$, мало изучены, и формулируемый различными авторами вопрос о том, содержит ли сепарабельное пространство $C(Q)$ чебышевское подпространство E , $\dim E = \operatorname{codim} E = +\infty$, остается открытым. Полученные в заметке конкретные результаты относятся к подпространствам E , для которых либо E , либо $C(Q)/E$ есть пространство Линденштраусса. В теореме 1 дается критерий подпространства существования $E \subset C(Q)$, если $C(Q)/E$ есть пространство $A(K)$ аффинных непрерывных функций на компактном симплексе Шоке. Приводится критерий чебышевского подпространства, дающий “развернутое” представление ближайшего элемента (см. следствие 2, следствие 4). Из него выводится, в частности, что если компакт Q счетен, то никакое подпространство $E \subset C(Q)$, $1 \in E$, для которого $C(Q)/E$ есть пространство Линденштраусса, не будет чебышевским.

Приведем необходимые сведения и обозначения.

Замкнутое подпространство E банахова пространства Z называется *подпространством существования* (пишем $E \in \mathcal{E}_Z$, а если $Z = C(Q)$, то пишем $E \in \mathcal{E}$), если для любого $z \in Z$ множество $P_E z = \{y \in E : \|y - z\| = \rho(z, E) = \inf_{v \in E} \|z - v\|\}$ не пусто. Чебышевским называется подпространство $E \in \mathcal{E}_Z$, для которого множество $P_E z$ одно-точечно для любого $z \in Z$. Если банаховы пространства Y, Z линейно изометричны, то пишем $Y \doteq Z$. Банахово пространство Z называется *пространством Линденштраусса*, если $Z^* \doteq L^1(\mu)$ (см. [1]). Важным представителем этого класса пространств являются пространства $A(K)$ аффинных непрерывных функций, определенных на компактном симплексе Шоке K . Основные свойства пространств $A(K)$ и симплексов K освещены в [2]. Заметим, что если Q – компакт, то $C(Q) \doteq A(K)$, где $K = \{\varphi \in C^*(Q) : \|\varphi\| = 1, \varphi \geq 0\}$ – w^* -компактный симплекс Шоке. Если U – компактное выпуклое множество, то ∂U – совокупность экстремальных точек U ; F_φ – наименьшая грань U , содержащая элемент $\varphi \in U$. Для банахова пространства Z $B_Z = \{z \in Z : \|z\| \leq 1\}$, $S_Z = \{z \in Z : \|z\| = 1\}$, $P_Z = \{\varphi \in Z^* : \exists z \in S_Z; \varphi(z) = \|\varphi\|\}$. Семейство

функционалов $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\varphi_\alpha \in Z^*$, называется *тотальным* на Z , если из $\varphi_\alpha(z) = 0 \forall \alpha \in A$ следует $z = 0$. Если $y \in Z$, то $\hat{y}$ – функционал, порожденный элементом y : $\hat{y}(\varphi) = \varphi(y) \forall \varphi \in Z^*$; Q – метризуемый компакт, $C^*(Q)$ отождествляется с пространством всех регулярных счетно аддитивных мер μ ограниченной вариации, определенных на σ -алгебре Σ борелевских подмножеств $e \subset Q$. Если $\varphi \in C^*(Q)$, то $\varphi^+(\varphi^-)$ – положительная (отрицательная) составляющая при разложении меры φ в смысле Хана (см. [3, теорема 10, с. 144]), $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$ – вариация меры φ , $\text{supp } \varphi$ – пересечение всех замкнутых множеств F_α , для каждого из которых $|\varphi|(Q \setminus F_\alpha) = 0$.

Пусть $T = \overline{T} \subset Q$ и $I_T = \{f \in C(Q) : f|_T = 0\}$. Тогда идеал I_T является классическим примером нерефлексивного подпространства существования в $C(Q)$. Заметим, что $C(Q)/I_T \cong C(T)$ – пространство Линденштраусса. Далее в теореме 1 рассмотрен более общий случай.

ЛЕММА 1. Пусть $E \in \mathcal{E}$, $C(Q)/E = Y$ – пространство Линденштраусса. Тогда

1) $\partial B_{E^\perp} \subset P_{C(Q)}$;

2) $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } \varphi_2 = \emptyset$, если $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, $\varphi_i \in \partial B_{E^\perp}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E^\perp \cong L^1(\mu)$, мы отождествим $E^\perp$ с $L^1(\mu)$ и для $\varphi \in \partial B_{L^1(\mu)}$ определим множество $A = \{t : \varphi(t) \neq 0\}$. Если допустить, что найдется множество $e \subset A$, $0 < \mu(e) < \mu(A)$, то $\varphi = \|\tilde{\varphi}_1\| \cdot \varphi_1 + \|\tilde{\varphi}_2\| \cdot \varphi_2$, где $\tilde{\varphi}_1 = \varphi \cdot \chi_e$, $\tilde{\varphi}_2 = \varphi \cdot \chi_{A \setminus e}$, $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 / \|\tilde{\varphi}_1\|$, $\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 / \|\tilde{\varphi}_2\|$, χ_s – характеристическая функция множества $s \in \Sigma$. Поскольку $\varphi \in \partial B_{L^1(\mu)}$, получим противоречие, и потому A – атом меры μ . Значит, если $\varphi_1, \varphi_2 \in \partial B_{L^1(\mu)}$, $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, то $F = \text{co}(\varphi_1 \cup \varphi_2)$ – грань $B_{L^1(\mu)}$. Для доказательства свойства 1) возьмем $\varphi_0 \in \partial B_{E^\perp}$ и определим многозначное отображение

$$\tau : B_{E^\perp} \rightarrow 2^R, \quad \tau(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi = \varphi_0; \\ -1, & \varphi = -\varphi_0; \\ |r| \leq 1, & \varphi \in B_{E^\perp}, \varphi \neq \pm \varphi_0. \end{cases}$$

Легко проверить, что выполнены все условия теоремы о селекции [1, с. 224], а потому найдется $y \in Y : \|y\| = 1$, $y(\varphi_0) = 1$. Так как $E \in \mathcal{E}$, найдется $g \in C(Q) : \|g\| = 1$, $g(\varphi_0) = 1$. Отсюда следует, что $\varphi_0 \in P_{C(Q)}$ и свойство 1) доказано.

Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \partial B_{E^\perp}$, $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, то на грани F определим две w^* -непрерывные аффинные функции $h_i : h_i(\varphi_1) = 1$, $h_i(\varphi_2) = (-1)^i$ и многозначные отображения $\tau_i : B_{E^\perp} \rightarrow 2^R$,

$$\tau_i(\varphi) = \begin{cases} \alpha + (-1)^i(1 - \alpha), & \text{если } \varphi = \alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \\ -(\alpha + (-1)^i(1 - \alpha)), & \text{если } \varphi = -(\alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2), \\ & 0 \leq \alpha \leq 1, \quad i = 1, 2; \\ |r| \leq 1, & \text{если } \varphi \in B_{E^\perp} \setminus (F \cup (-F)). \end{cases}$$

Применяя теорему о селекции [1, с. 224], найдем в Y элементы y_1, y_2 , $\|y_i\| = 1$, $y_i(\varphi_1) = 1$, $y_i(\varphi_2) = (-1)^i$, $i = 1, 2$. Так как $E \in \mathcal{E}$, найдутся функции $g_i \in C(Q)$, $\|g_i\| = 1$, $g_i(\varphi_1) = 1$, $g_i(\varphi_2) = (-1)^i$. Поскольку $g_i|_{\text{supp } \varphi_1} = 1$, $g_i|_{\text{supp } \varphi_2} = (-1)^i$, то $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } \varphi_2 = \emptyset$ и свойство 2) доказано. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из рассуждений, приведенных при доказательстве второй части леммы 1, следует, что если $\varphi_i \in \partial B_{E^\perp}$, $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, то $|\varphi_1| \wedge |\varphi_2| = 0$ (т.е. φ_1, φ_2 – дизъюнктные меры).

На следующее утверждение неоднократно ссылаемся далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. Для того чтобы $E \in \mathcal{E}_Z$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого w^* -непрерывного функционала φ , заданного на $E^\perp$, нашёлся w^* -непрерывный функционал Φ , определённый на Z^* , $\Phi|_{E^\perp} = \varphi$, $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом элемент $y \in Z \setminus E$ имеет в E единственный ближайший элемент тогда и только тогда, когда для функционала $\hat{y}|_{E^\perp}$ найдётся единственное w^* -непрерывное продолжение Φ на Z^* , $\|\varphi\| = \hat{y}|_{E^\perp}\|$ [4].

Это предложение есть обобщение на общий случай аналогичного утверждения, доказанного А. Л. Гаркави [5] для фактор-рефлексивных подпространств E .

Заметим, что для любого w^* -непрерывного функционала Φ , определённого на Z^* , найдётся единственный элемент $z \in Z : \Phi(\varphi) = \varphi(z) \quad \forall \varphi \in Z^*$, $\|\Phi\| = \|z\|$ (см. [3, теорема 9, с. 456]). Если $Z = C(Q)$, $q \in Q$, то полагаем $\Phi(q) = \Phi(\delta_q)$, $\delta_q(g) = g(q)$, $q \in C(Q)$.

Пусть $E \subset C(Q)$, $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } \varphi_2 = \emptyset$, если $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, $\varphi_i \in \partial B_{E^\perp}$; $D_E = \bigcup_{\varphi \in \partial B_{E^\perp}} \text{supp } \varphi$ и определим отображение $\tau_E : D_E \rightarrow \partial B_{E^\perp}$, $\tau_E(q) = \varphi$, если $q \in \text{supp } \varphi$. Далее ρ_1 – метрика, определяющая w^* -топологию $B_{E^\perp}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E \subset C(Q)$, $C(Q)/E \doteq A(K)$, причем

- 1) грань F_φ конечномерна $\forall \varphi \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$,
- 2) $\partial F_{\varphi_1} \cap \partial F_{\varphi_2} = \emptyset$, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_i \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$.

Для того чтобы $E \in \mathcal{E}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\varphi \in P_{C(Q)} \quad \forall \varphi \in \partial K$;
- 2) $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } \varphi_2 = \emptyset$, если $\varphi_i \in \partial K$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$;
- 3) отображение τ_E равномерно непрерывно;
- 4) $\inf_{\varphi, \psi \in \partial K} \rho_1(\text{supp } \varphi^+, \text{supp } \psi^-) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **НЕОБХОДИМОСТЬ.** Необходимость условий 1), 2) следует из леммы 1. Докажем необходимость условия 3). Допустим, что $\rho(q_k^1, q_k^2) \rightarrow 0$, но $\inf_k \rho_1(\varphi_k^1, \varphi_k^2) \geq \varepsilon > 0$, $\varphi_k^i = \tau_E(q_k^i)$. Не теряя общности, считаем, что $\varphi_k^i \rightarrow \varphi_i$. Возможны случаи:

- а) $\varphi_i \in \partial K$, $i = 1, 2$;
- б) $\varphi_1 \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$, $\varphi_2 \in \partial K$;
- в) $\varphi_i \notin \overline{\partial K} \setminus \partial K$.

Разберем случай в). Допустим

$$\varphi_i = \sum_{s=1}^{r_i} \alpha_s^i \psi_s^i, \psi_s^i \in \partial K, \quad \sum_{s=1}^{r_i} \alpha_s^i = 1, \quad \alpha_s^i > 0.$$

Пусть

$$\left(\left(\bigcup_{k > p_1} \varphi_k^1 \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{r_1} \psi_s^1 \right) \right) \cap \left(\left(\bigcup_{k > p_2} \varphi_k^2 \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{r_2} \psi_s^2 \right) \right) = \emptyset$$

и

$$F_i = \overline{\text{co}} \left(\left(\bigcup_{k > p_i} \varphi_k^i \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{r_i} \psi_s^i \right) \right).$$

Тогда для любой точки $q \in \overline{\partial F_i} \setminus \partial F_i$ представляющая мера сосредоточена на F_i , а потому F_i – замкнутая грань K [6]. Так как $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, по теореме 3.6 из [7] можно построить $h \in A(K)$, $\|h\| = 1$, $h|_{F_i} = (-1)^i$. Так как $E \subset \mathcal{E}$, найдётся $g \in C(Q)$,

$\|g\| = 1$, $g(\varphi_k^i) = (-1)^i$, а потому $g|_{\text{supp } \varphi_k^i} = (-1)^i$. Следовательно, $g(q_k^1) - g(q_k^2) = -1 - 1 = -2 \rightarrow 0$; получили противоречие. Аналогично разбираются случаи а), б), и необходимость условия 3) доказана. Докажем необходимость условия 4). Допустим, что $\rho(\text{supp } \varphi_k^+, \text{supp } \psi_k^-) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Не теряя общности, считаем $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $\psi_k \rightarrow \psi$ и разберем случаи: а) $\varphi = \psi$, б) $\varphi \neq \psi$.

Рассмотрим случай а) и допустим, что $\varphi \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$, $\varphi = \sum_{s=1}^r \alpha_s \theta_s$, $\theta_s \in \partial K$, $\sum_{s=1}^r \alpha_s = 1$, $\alpha_s > 0$. Если $F = \overline{\text{co}}(\varphi \cup (\bigcup_{k=1}^\infty \varphi_k) \cup (\bigcup_{s=1}^r \theta_s) \cup (\bigcup_{k=1}^\infty \psi_k))$, то (см. [6]), F -замкнутая грань K и по теореме 3.6 из [7] $A(K)$ содержит функцию h , $\|h\| = 1$, $h|_F \equiv 1$. Так как $E \in \mathcal{E}$, найдется $g \in C(Q)$, $\|g\| = 1$, $g(\varphi_k) = g(\psi_k) = 1$. Приходим к противоречию. Аналогично разбирается вариант, когда $\varphi \in \partial K$.

Случай б) разобран при доказательстве свойства 3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G^+ = \bigcup_{\varphi \in \partial K} \text{supp } \varphi^+$, $G^- = \bigcup_{\varphi \in \partial K} \text{supp } \varphi^-$; тогда по условию 4) $\overline{G^+} \cap \overline{G^-} = \emptyset$. Пусть далее $\bar{\tau}_E: \overline{G} = \overline{G^+} \cup \overline{G^-} \rightarrow \partial K$ продолжение τ_E по непрерывности. Возьмем определенный на $E^\perp$ w^* -непрерывный функционал g и определим функцию $\bar{g} \in C(\overline{G})$, полагая

$$\bar{g}(q) = \begin{cases} g(\bar{\tau}_E(q)), & q \in \overline{G^+}; \\ -g(\bar{\tau}_E(q)), & q \in \overline{G^-}. \end{cases}$$

Пусть $g_1 \in C(Q)$, $g_1|_{\overline{G}} = \bar{g}$, $\|g_1\| = \|\bar{g}_1\|$. Легко убедиться, что g_1 определяет w^* -непрерывное продолжение g на все $C^*(\varphi): \hat{g}_1(\varphi) = \varphi(g_1)$, $\varphi \in C^*(Q)$. Следовательно, $E \in \mathcal{E}$ по предложению А. Теорема доказана.

Приведем утверждение, позволяющее строить примеры подпространств, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В. Пусть $E \subset C(Q)$, $E^\perp \doteq L^1(\mu)$. Тогда $C(Q)/E \doteq C(T)$ тогда и только тогда, когда найдется такая функция $h \in C(Q)$, что $\partial B_{E^\perp} = F \cup (-F)$, где $F = \overline{F}$, $F = \{\varphi \in \partial B_{E^\perp} : h(\varphi) = 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(C(Q)/E)^* \doteq E^\perp$, справедливость предложения В следует из характеристики классов пространств Линденштрауса [1, с. 218].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в $C^*([0; 1])$ подпространство L , порожденное мерами

$$\mu_n = -\frac{1}{n} \cdot \delta_{t_n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \delta_{s_n}, \quad t_n = \frac{1}{n+1}, \quad s_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \\ n = 2, 3, \dots, \quad \mu_1 = \delta_{t_1}, \quad t_1 = 1.$$

Тогда несложно убедиться в том, что $L - w^*$ -замкнутое подпространство, $L \doteq l^1$. Пусть $E = L_\perp$. Очевидно, что найдется $a \in C([0; 1])$, $a(t_n) = -1$, $a(s_n) = 1$, $n = 2, 3, \dots$, $a(t_1) = 1$. Так как $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_1$, по предложению В пространство $C([0; 1])/E$ изометрично пространству C сходящихся последовательностей. Из теоремы 1 следует, что $E \in \mathcal{E}$.

Кроме идеалов другими известными примерами нерефлексивных подпространств существования в $C(Q)$ являются подпространства Стоуна–Вейерштрасса [8]. Пусть V – некоторый компакт, τ – непрерывное отображение Q на V . Тогда *подпространством Стоуна–Вейерштрасса* называется подпространство $E = \{f : f(q) = g(\tau(q)), q \in Q, g \in C(V)\}$. Ясно, что $1 \in E$, $E \doteq C(V)$, E не разделяет точки Q . Рассмотрим “дополнительный” случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть E разделяет точки Q , $1 \in E$, $E \doteq C(Q_1)$. Тогда найдутся однозначно определенные множество $T = \overline{T} \subset Q$, абстрактная функция $m: Q \setminus T \rightarrow C^*(T)$ такие, что $E = \{h \in C(Q) : h(q) = m(q)(h), q \in Q \setminus T\}$. При этом, если $Q \setminus T$ счетно и $|m(q_1)| \wedge |m(q_2)| = 0$, $q_1 \neq q_2$, то $C(Q)/E$ – пространство Линденштраусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = \{q \in Q : \delta_{q|E} \in \partial B_{E^*}\}$; тогда $T = \overline{T}$, T гомеоморфно Q_1 . Для каждого $q \in Q \setminus T$ функционал $\delta_{q|E} \notin \partial B_{E^*}$ и по теореме Рисса [5, теорема 3, с.288] найдется однозначно определенная мера $\mu_q \in C^*(T)$, $\mu_q \geq 0$, $\mu_q(1) = 1$, $f(q) = \mu_q(f)$ для $f \in E$. Определим абстрактную функцию $m: Q \setminus T \rightarrow C^*(T)$, полагая $m(q) = \mu_q$. Пусть $L = \{h \in C(Q) : h(q) = m(q)(h), q \in Q \setminus T\}$. Из определения T , φ следует, что $E \subset L$. Для $\mu \in B_{E^\perp}$ определим меры μ_1, μ_2 :

$$\mu_1(e) = \begin{cases} \mu(e), & e \in T; \\ 0, & e \in Q \setminus T; \end{cases} \quad \mu_2(e) = \begin{cases} 0, & e \in T; \\ \mu(e), & e \in Q \setminus T; \end{cases} \quad e \in \Sigma.$$

Так как множество сужений на T функций из E совпадает с $C(T)$, то $\mu_2 \neq 0$.

Для $q \in Q \setminus T$ полагаем $p_q = (\delta_q - \mu_q)/2$. Покажем, что $p_q \in \partial B_{E^\perp}$. Допустим, что $\nu_1, \nu_2 \in B_{E^\perp}$, $0 < \alpha < 1$, $p_q = \alpha\nu_1 + (1 - \alpha)\nu_2$. Определим на Q измеримую функцию

$$r(t) = \begin{cases} 1, & t = q; \\ -1, & t \in \text{supp } \mu_q; \\ 0, & t \notin \text{supp } p_q. \end{cases}$$

Тогда $p_q(r) = 1 = \alpha\nu_1(r) + (1 - \alpha)\nu_2(r)$, и потому $\nu_1(r) = \nu_2(r) = 1$. Следовательно, $\nu_i(e) = 0 \quad \forall e \in \Sigma, e \in Q \setminus \text{supp } p_q, i = 1, 2$. Пусть $\nu_i\{q\} = \gamma_i$, $\tilde{\nu}_i = \gamma_i\delta_q - \gamma_i\mu_q$. Тогда $\nu_i - \tilde{\nu}_i \in E^\perp$, $\text{supp}(\nu_i - \tilde{\nu}_i) \subset T$, что возможно лишь в случае $\nu_i = \tilde{\nu}_i$. Из равенств $\|\tilde{\nu}_i\| = |\gamma_i| \|\delta_q\| + |\gamma_i| \|\mu_q\| = 2|\gamma_i| = 1$ следует, что $|\gamma_i| = 1/2$, $i = 1, 2$. Отсюда уже легко вывести, что $\nu_i = p_q$, $i = 1, 2$, и потому $p_q \in \partial B_{E^\perp}$, $q \in Q \setminus T$.

Для $\mu \in B_{E^\perp}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_2 \neq 0$, найдем последовательность мер $\nu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n \delta_{q_i^n}$, $q_i^n \in Q \setminus T$, $\sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n| = \|\mu_2\|$, $\nu_n \xrightarrow{w^*} \mu_2$. Не теряя общности, можно считать, что

$$\nu'_n = 2 \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n p_{q_i^n} \xrightarrow{w^*} \nu', \quad \nu''_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n \mu_{q_i^n} \xrightarrow{w^*} \nu'',$$

и потому $\mu_2 = \nu' + \nu''$, $\nu' \in E^\perp$, $\text{supp } \nu'' \subset T$. Получаем $\mu = \mu_1 + \nu' + \nu''$, откуда следует, что $\mu_1 + \nu'' \in E^\perp$, а потому $\mu_1 = -\nu''$. Итак, $\mu = \mu_1 + \mu_2 = -\nu'' + \nu' + \nu'' = \nu'$. Следовательно, подпространство, порожденное мерами p_q , $q \in Q \setminus T$, w^* -плотно в $E^\perp$. Отсюда следует, что если $h \in L$, то $h \in E$, а потому $L = E$. Пусть теперь $Q \setminus T = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$. Возьмем $\mu \in B_{E^\perp}$; тогда из приведенных ранее рассуждений следует, что $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_{q_n}$. Так как меры p_{q_n} взаимно дизъюнкты, нетрудно убедиться в том, что $\|\mu\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$, а потому $E^\perp \doteq l^1$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $E \subset C(Q)$ удовлетворяет всем условиям предложения 1. Тогда $E \subset \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\forall h \in C(Q)$ найдется $g \in C(Q) : \|g\| = \sup_{q \in Q \setminus T} |p_q(g)|$, $g(p_q) = h(p_q) \quad \forall q \in Q \setminus T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть Q – несчетный компакт, $E \subset C(Q)$, $1 \in E$, E разделяет точки Q , $E \doteq C(Q_1)$, где Q_1 – счетный компакт. Тогда $C(Q)/E$ не есть пространство Линденштраусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $E^\perp \doteq L^1(\mu)$. По замечанию 1 меры φ_1, φ_2 дизъюнкты, если $\varphi_1 \neq \pm \varphi_2$, $\varphi_i \in \partial B_{E^\perp}$. По предложению 1 меры $p_q = (\delta_q - \mu_q)/2 \in \partial B_{E^\perp} \quad \forall q \in Q \setminus T$. Так как $Q \setminus T$ несчетно, T счетно, $\text{supp } \mu_q \subset T \quad \forall q \in Q \setminus T$, получаем противоречие. Замечание доказано.

Пусть заданы $T = \overline{T} \subset Q$, $m: Q \setminus T \rightarrow C^*(T)$. Определим функцию

$$\overline{m}(q) = \begin{cases} m(q), & q \in Q \setminus T; \\ \delta_q, & q \in T \cap \overline{(Q \setminus T)}. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция m w^* -непрерывна, если $m(q_i) \rightarrow \overline{m}(q)$.

Легко установить справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'. Пусть $T = \overline{T} \subset Q$, $m: Q \setminus T \rightarrow \{\mu \in C^*(T) : \|\mu\| = 1, \mu \geq 0\}$ – w^* -непрерывная функция. Тогда $E = \{h \in C(Q) : h(q) = m(q)(h), q \in Q \setminus T\} \doteq C(T)$, $1 \in E$.

Приведем пример подпространства $E \subset C(Q)$, $E \doteq C(Q_1)$, $1 \in E$, $E \notin \mathcal{E}$.

ПРИМЕР 2. В пространстве $\mathbb{R}^1$ с обычной метрикой рассмотрим множество $Q = [0; 1/2] \cup \{t_i\}_{i=0}^\infty \cup \{s_i\}_{i=0}^\infty$, где $t_i \nearrow t_0$, $s_i \nearrow s_0$, $t_1 > 1/2$, $t_0 = (2/3)s_1 > 2/3$, $s_0 = 1$, $T = [0; 1/2]$. Пусть далее

$$\begin{aligned} \nu_1(f) &= \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right], & \nu_2(f) &= \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right], \\ \nu_i(f) &= \frac{i-1}{2i} \left[f\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9^i}\right) + f\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9^i}\right) \right] + \frac{1}{i} f\left(\frac{1}{5^{2i}}\right), \\ u_i(f) &= \frac{i-1}{2i} \left[f\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{9^i}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9^i}\right) \right] + \frac{1}{i} f\left(\frac{1}{5^{2i+1}}\right), & i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Определим функцию $m: Q \setminus T \rightarrow C^*_{[0; \frac{1}{2}]}$, полагая $m(t_0) = \nu_1$, $m(s_0) = \nu_2$, $m(t_i) = \nu_i$, $m(s_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots$. По предложению 1' подпространство $E = \{h \in C(Q) : h(q) = m(q)(h), q \in Q \setminus T\} \doteq C(T)$, $1 \in E$. Более того, легко проверить, используя предложение В, что $C(Q)/E \doteq C(Q \setminus T)$. Также нетрудно убедиться, используя теорему 1, что $E \notin \mathcal{E}$.

Введем класс подпространств $\mathcal{E}'_Z$. Скажем, что $E \in \mathcal{E}'_Z$, если $E \in \mathcal{E}_Z$ и найдется такое множество $\Phi_E = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\varphi_\alpha \in Z^* \setminus E^\perp$, что 1) $E \cap \varphi_\alpha^{-1}(0) = E_\alpha \in \mathcal{E}_Z \quad \forall \alpha \in A$, 2) Φ_E тотально на Z .

Пусть $\varphi \in Z^* \setminus E^\perp$, $L = E^\perp \oplus \text{sp}(\varphi)$, $y \in Z \setminus E$, $\rho(y, E) = d$. По теореме Хана–Банаха [9, теорема 4, с. 127] продолжение $\tilde{y}$ на L функционала $\hat{y}|_{E^\perp}$ сохраняет норму тогда и только тогда, когда $\tilde{y}(\varphi) \in [\beta_y^-(\varphi), \beta_y^+(\varphi)]$, где

$$\beta_y^-(\varphi) = \sup_{u \in E^\perp} \{\varphi(y) - d \cdot \|\varphi - u\|\}, \quad \beta_y^+(\varphi) = \inf_{u \in E^\perp} \{d \cdot \|u + \varphi\| - \varphi(y)\}. \quad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $E \in \mathcal{E}'_Z$, $y \notin E$. Для того чтобы y имел в E единственный ближайший элемент, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_y^-(\varphi) = \beta_y^+(\varphi) \forall \varphi \in \Phi_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Допустим, что $\beta_y^+(\varphi_0) > \beta_y^-(\varphi_0)$ для $\varphi_0 \in \Phi_E$ и $L = E^\perp \oplus \text{sp}(\varphi_0)$. Тогда на L функционал $\hat{y}|_{E^\perp}$ имеет два различных продолжения ψ_1, ψ_2 , $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = d$. Так как $E_{\varphi_0} = \{z \in E : \varphi_0(z) = 0\} \in \mathcal{E}_Z$, по предположению А функционалы ψ_1, ψ_2 имеют w^* -непрерывные продолжения $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ на все Z^* , $\|\psi_1\| = \|\tilde{\psi}_1\| = \|\psi_2\| = \|\tilde{\psi}_2\|$. Окончательно получаем, что $\hat{y}|_{E^\perp}$ имеет два различных w^* -непрерывных продолжения на Z^* с сохранением нормы, а потому по предположению А множество $P_{E\hat{y}}$ не одноточечно. Получили противоречие и необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Если предположить, что $\hat{y}|_{E^\perp}$ имеет два w^* -непрерывных продолжения ψ_1, ψ_2 на все Z^* , $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = d$, то найдется $\varphi_0 \in \Phi_E : \psi_1(\varphi_0) \neq \psi_2(\varphi_0)$. Следовательно, $\hat{y}|_{E^\perp}$ имеет два различных продолжения на $L = E^\perp \oplus \text{sp}(\varphi_0)$, а потому $\beta_y^-(\varphi_0) < \beta_y^+(\varphi_0)$. Полученное противоречие доказывает достаточность.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы рефлексивное подпространство $E \subset C(Q)$ было чебышевским, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\delta_q \notin E^\perp \forall q \in Q$, 2) $\beta_g^-(\delta_q) = \beta_g^+(\delta_q) \forall g \in C(Q) \setminus E, \forall q \in Q$. Если h_g – ближайший элемент для функции g , то $h_g(q) = g(q) - \beta_g^+(\delta_q), q \in Q$.

Пусть $\varkappa$ – естественное вложение Z в Z^{**} и $\tilde{E} = (E^\perp)^\perp - w^*$ -замыкание $\varkappa E$. Известно [10], что $\tilde{E} \in \mathcal{E}_{Z^{**}}$ и каждый элемент $\tilde{y} \in P_{\tilde{E}}(\varkappa y)$ называется обобщенным элементом наилучшего приближения для $y \in Z \setminus E$ (см. [11]).

Естественно подпространство $E \subset Z$ называть обобщенным чебышевским, если каждый элемент $\varkappa y, y \in Z \setminus E$, имеет единственный обобщенный элемент наилучшего приближения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ – счетный компакт, $E \subset C(Q)$. Для того, чтобы E было обобщенным чебышевским подпространством, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\delta_{q_i} \notin E^\perp \forall q_i \in Q$, 2) $\beta_g^+(\delta_{q_i}) = \beta_g^-(\delta_{q_i}) \forall g \in C(Q) \setminus E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Допустим, что $\delta_{q_{i_0}} \in E^\perp$. Возьмем функцию $g_0 \in E, 0 < \|g_0\| < 1$, и построим функцию $g \in C(Q), \|g\| = 1, g(q_{i_0}) = 1, \|g - g_0\| = 1$. Тогда $\rho(g, E) = 1, g_0, 0 \in P_E g$, и необходимость условия 1) доказана. Известно, что $C^{**} \doteq m$ где $m = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots), \|\varphi\| = \sup |\varphi_i| < +\infty\}$. Определим функционалы ψ_i на m , полагая $\psi_i(\varphi) = \varphi_i, i = 1, 2, \dots$. Пусть e_i – орт естественного базиса пространства $\ell^1, \tilde{E}_i = \tilde{E} \cap \psi_i^{-1}(0)$. Тогда $\tilde{E}_i = (E^\perp \oplus [e_i])^\perp$, и потому $\tilde{E}_i \in \mathcal{E}_m, i = 1, 2, \dots$. Так как $(\psi_i)_{i=1}^\infty$ – тотально на m , то необходимость условия 2) следует из предложения 2. Достаточность получается из предложения 2. Следствие доказано.

Если $\nu \in C^*(Q)$, то $\nu = r_t \delta_t + \nu_t$, где $r_t \in \mathbb{R}, \nu_t$ – мера, сингулярная с δ_t . Каждому $\varphi \in (E^\perp)^*, \|\varphi\| = d$, сопоставим два множества

$$\begin{aligned}\Phi_\varphi^+ &= \{\nu \in S_{E^\perp} : r_t < 0, d - \varphi(\nu) \leq 2d \cdot |r_t|\}, \\ \Phi_\varphi^- &= \{\nu \in S_{E^\perp} : r_t > 0, d - \varphi(\nu) \leq 2d \cdot r_t\}.\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $E \subset C(Q)$, $\delta_t \notin E^\perp$, $E_1 = E^\perp \oplus \text{sp}(\delta_t)$, $\varphi \in (E^\perp)^*$, $\|\varphi\| = d \neq 0$, $\psi \in E_1^*$, $\psi|_{E^\perp} = \varphi$. Тогда $\|\psi\| = d$ тогда и только тогда, когда $\psi(\delta_t) \in [\beta_\varphi^-(\delta_t), \beta_\varphi^+(\delta_t)]$, где

$$\begin{aligned} \beta_\varphi^-(\delta_t) &= \begin{cases} -d, & \text{если } \Phi_\varphi^- = \emptyset; \\ \max\left(-d, d - \inf_{\nu \in \Phi_\varphi^-} \left\{ \frac{d - \varphi(\nu)}{r_t} \right\}\right), & \text{если } \Phi_\varphi^- \neq \emptyset; \end{cases} \\ \beta_\varphi^+(\delta_t) &= \begin{cases} d, & \text{если } \Phi_\varphi^+ = \emptyset; \\ \min\left(d, -d + \inf_{\nu \in \Phi_\varphi^+} \left\{ \frac{d - \varphi(\nu)}{|r_t|} \right\}\right), & \text{если } \Phi_\varphi^+ \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1 = \varphi/d$. По формулам (1) получаем

$$\beta_\varphi^\pm(\delta_t) = \inf_{\nu \in E^\perp} \{d \cdot \|\nu + \delta_t\| - \varphi(\nu)\} = d \cdot \inf_{\nu \in E^\perp} \{\|\nu + \delta_t\| - \varphi_1(\nu)\} = d \cdot \beta_{\varphi_1}^\pm(\delta_t).$$

Выведем формулы, соответствующие φ_1 . Так как $\|\varphi_1\| = 1$, то $\beta_{\varphi_1}^+(\delta_t) \leq 1$, $\beta_{\varphi_1}^-(\delta_t) \geq -1$. Пусть

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\nu \in E^\perp : r_t \geq 0\}, & C_2 &= \{\nu \in E^\perp : -1 < r_t < 0\}, \\ C_3 &= \{\nu \in E^\perp : r_t \leq -1\}, & C'_2 &= C_2 \cap S_{E^\perp}, & C'_3 &= C_3 \cap S_{E^\perp}. \end{aligned}$$

Тогда

$$C_2 = \bigcup_{\substack{\nu \in C'_2 \\ \nu = r_t \delta_t + \nu_t}} \left\{ \lambda \nu : 0 < \lambda < \frac{1}{|r_t|} \right\}, \quad C_3 = \bigcup_{\substack{\nu \in C'_3 \\ \nu = r_t \delta_t + \nu_t}} \left\{ \lambda \nu : \lambda \geq \frac{1}{|r_t|} \right\}.$$

Имеем $\beta_{\varphi_1}^+(\delta_t) = \min(a_1, a_2, a_3)$, где $a_i = \inf_{\nu \in C_i} \{\|\nu + \delta_t\| - \varphi_1(\nu)\}$, $i = 1, 2, 3$;

$$\begin{aligned} a_1 &= \inf_{\nu \in C_1} \{|r_t + 1| + \|\nu_t\| - \varphi_1(\nu)\} = \inf_{\nu \in C_1} \{\|\nu\| - \varphi_1(\nu)\} + 1 = +1; \\ a_2 &= \inf_{\nu \in C_2} \{\|\nu + \delta_t\| - \varphi_1(\nu)\} = \inf_{\nu \in C_2} \{\|\nu\| - \varphi_1(\nu) + |r_t + 1| - r_t\} \\ &= \inf_{\nu \in C_2} \left\{ \|\nu\| \left[1 - \varphi_1\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}\right) + \frac{2r_t}{\|\nu\|} \right] + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\nu \in C'_2$, $\nu = r_t \cdot \delta_t + \nu_t$. Тогда

$$\inf_{0 < \lambda < \frac{1}{|r_t|}} \{\lambda[1 - \varphi_1(\nu) + 2r_t] + 1\} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \varphi(\nu) + 2r_t \geq 0; \\ -1 + \frac{1 - \varphi_1(\nu)}{|r_t|}, & \text{если } 1 - \varphi(\nu) + 2r_t < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$a_2 = \min \left(1, \inf_{\nu \in C'_2 \cap \Phi_{\varphi_1}^+} \left\{ \frac{1 - \varphi(\nu)}{|r_t|} - 1 \right\} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_3 &= \inf_{\nu \in C_3} \{ \|\nu + \delta_t\| - \varphi_1(\nu) \} = \inf_{\nu \in C_3} \{ \|\nu_t\| + |r_t| - \varphi_1(\nu) + |r_t + 1| - |r_t| \} \\ &= \inf_{\nu \in C_3} \left\{ \|\nu\| \left(1 - \varphi_1 \left(\frac{\nu}{\|\nu\|} \right) \right) - 1 \right\} = \inf_{\nu \in C'_3} \left\{ \frac{1 - \varphi_1(\nu)}{|r_t|} - 1 \right\} = \min(a'_3, a''_3), \end{aligned}$$

где

$$a'_3 = \inf_{\nu \in C'_3 \cap \Phi_{\varphi_1}^+} \left\{ \frac{1 - \varphi_1(\nu)}{|r_t|} - 1 \right\}, \quad a''_3 = \inf_{\nu \in C'_3 \cap (S_{E^\perp} \setminus \Phi_{\varphi_1}^+)} \left\{ \frac{1 - \varphi_1(\nu)}{|r_t|} - 1 \right\}.$$

Если $\nu \in C'_3 \cap (S_{E^\perp} \setminus \Phi_{\varphi_1}^+)$, то $(1 - \varphi_1(\nu))/|r_t| \geq 2$, а потому $a''_3 \geq 1$. Следовательно,

$$a_3 = \min \left(1, \inf_{\nu \in C'_3 \cap \Phi_{\varphi_1}^+} \left\{ \frac{1 - \varphi_1(\nu)}{|r_t|} - 1 \right\} \right).$$

В результате получена формула для $\beta_{\varphi_1}^+(\delta_t)$. Аналогично выводится формула для $\beta_{\varphi_1}^-(\delta_t)$. Общий случай легко получается из рассмотренного. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $E \subset C(Q)$, $\delta_q \notin E^\perp \quad \forall q \in Q$, $h \in C(Q) \setminus E$, $\tilde{h}$ — w^* -непрерывное продолжение $\hat{h}|_{E^\perp}$ на все $C^*(Q)$. Тогда $\tilde{h}(q)$ есть непрерывная селекция многозначного отображения $\tau: Q \rightarrow 2^R$, $\tau(q) = [H^-(q), H^+(q)]$, где $H^-(q) = \inf_n \sup_{t \in V_n(q)} \beta_h^-(\delta_t)$, $H^+(q) = \sup_n \inf_{t \in V_n(q)} \beta_h^+(\delta_t)$, $V_n(q) = \{t \in Q: \rho(t, q) < \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tilde{h}(t) = \tilde{h}(\delta_t) \in [\beta_h^-(\delta_t), \beta_h^+(\delta_t)]$, то $\tilde{h}(t) \leq \beta_h^+(\delta_t)$, и потому $\inf_{t \in V_n(q)} \tilde{h}(t) \leq \inf_{t \in V_n(q)} \beta_h^+(\delta_t)$, $\tilde{h}(q) = \sup_n \inf_{t \in V_n(q)} \tilde{h}(t) \leq \sup_n \inf_{t \in V_n(q)} \beta_h^+(\delta_t) = H^+(q)$. Аналогично проверяется, что $\tilde{h}(q) \geq H^-(q)$. Лемма доказана.

Пусть Q_0 — множество изолированных точек Q .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Q = \overline{Q}_0$, $1 \in E$. Для того чтобы E было чебышевским, необходимо и достаточно, чтобы $\forall h \in C(Q) \setminus E$ выполнялось: 1) $H^+(q) = H^-(q) \quad \forall q \in Q$, 2) $H^+(q)(\varphi) = \varphi(h) \quad \forall \varphi \in E^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Если $q_i \rightarrow q$, то легко проверить, что $\liminf H^+(q_i) \geq H^+(q)$ и $\limsup H^-(q_i) \leq H^-(q)$, и потому из условия 1) следует, что $H(q) = H^+(q) \in C(Q)$. Условие 2) означает, что $H|_{E^\perp} = \hat{h}|_{E^\perp}$. Заметим далее, что если $q \in Q_0$, то $H(q) = \beta_h^+(\delta_q) = \beta_h^-(\delta_q)$, и потому $H^+(q) \leq \rho(h, E)$. Следовательно, $\|H^+\| = \|H\| \leq \rho(h, E)$. С другой стороны, так как $H|_{E^\perp} = \hat{h}|_{E^\perp}$, то $\|H\| \geq \rho(h, E)$. Окончательно получаем $\|H\| = \rho(h, E)$ и функция H есть w^* -непрерывное продолжение функционала $\hat{h}|_{E^\perp}$, сохраняющее норму. Из предложения А следует, что $E \in \mathcal{E}$. Условие $\beta_h^+(\delta_q) = \beta_h^-(\delta_q)$ при $q \in Q_0$ гарантирует единственность этого w^* -непрерывного продолжения и потому E — чебышевское подпространство.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Допустим, что E – чебышевское подпространство; возьмем $h \in C(Q) \setminus E$, $\|h\| = \rho(h, E) = d$ и пусть $\nu \in S_{E^\perp} \cap P_C$, $\nu(h) = d$. Тогда из формул (2), определяющих $\beta_h^+(\delta_t)$, $\beta_h^-(\delta_t)$, следует, что $\beta_h^+(\delta_t) = \beta_h^-(\delta_t)$ при $t \in \text{supp } \nu \cap Q_0$. В самом деле, пусть $\nu = r_t \cdot \delta_t + \nu_t$ и $r_t < 0$. Тогда множество $\Phi^+ \neq \emptyset$, ибо $\nu \in \Phi^+$ и $\beta_h^+(\delta_t) = -d$. Так как $-d \leq \beta_h^-(\delta_t) \leq \beta_h^+(\delta_t)$, то $\beta_h^-(\delta_t) = \beta_h^+(\delta_t)$. Аналогично разбирается случай, когда $r_t > 0$.

Поскольку $H^+(q) = \beta_h^+(\delta_q)$, $H^-(q) = \beta_h^-(\delta_q)$ при $q \in Q_0$, то $H^+(q) = H^-(q)$ при $q \in Q_0 \cap \text{supp } \nu$. Пусть $\tilde{h} - w^*$ -непрерывное продолжение $\hat{h}|_{E^\perp}$ на все $C^*(Q)$, $\|\tilde{h}\| = d$. Тогда по лемме 3 $\tilde{h}(q) \leq H^+(q)$. Допустим, что $\tilde{h}(q) < H^+(q)$ при некотором $q \in Q$. Тогда в силу полунепрерывности снизу функции $H^+(q)$ это неравенство выполняется и в некоторой окрестности точки q . Следовательно, найдется $q_1 \in Q_0 : \tilde{h}(q_1) < H^+(q_1) = \beta_h^+(\delta_{q_1})$, причем в силу сказанного ранее, $q_1 \notin \text{supp } \nu$. Определим на $C^*(Q)$ w^* -непрерывный функционал $\Phi(\varphi) = \tilde{h}(\varphi) - a \cdot \varphi\{q_1\}$, $\varphi \in C^*(Q)$, $a = d + \beta_h^+(\delta_{q_1})$. Опеним $\sup_{\varphi \in S_{E^\perp}} \Phi(\varphi) = d_1$. Рассмотрим два случая:

- 1) $\tilde{h}(\varphi) \geq 0$, $\varphi\{q_1\} < 0$;
- 2) $\tilde{h}(\varphi) \geq 0$, $\varphi\{q_1\} \geq 0$.

В первом случае воспользуемся формулой (2), определяющей $\beta_h^+(\delta_{q_1})$; из нее следует неравенство $d - \tilde{h}(\varphi) \geq a|\varphi\{q_1\}|$ или $d \geq \Phi(\varphi)$. Так как $\tilde{h}|_{E^\perp} = h$, то в первом случае $-d \leq \Phi(\varphi) \leq d$. Во втором случае $\Phi(\varphi) \geq -2d \cdot \varphi\{q_1\} \geq -d$, так как $|\varphi\{q_1\}| \leq 1/2$. Следовательно, и в этом случае $-d \leq \Phi(\varphi) \leq d$. В результате неравенства $-d \leq \Phi(\varphi) \leq d$ установлены, если $\varphi \in S_{E^\perp}$, $\tilde{h}(\varphi) \geq 0$. Отсюда следует, что $-d \leq \Phi(\varphi) \leq d \forall \varphi \in S_{E^\perp}$, а потому $d_1 \leq d$. Так как $\Phi(\nu) = d$, то $d_1 = d$. Если функционал $\tilde{h}$ порождается элементом $g \in C(Q)$, то функционал $\Phi(\varphi)$ порождается функцией $g_1(q) = g(q) - a\chi_{q_1}(q)$, где $\chi_{q_1}(q)$ – характеристическая функция одноточечного множества $\{q_1\}$. Ясно, что $g_1 \in C(Q)$, и так как $\tilde{h}(\delta_{q_1}) < \beta_h^+(\delta_{q_1})$, то $|g_1(q_1)| = |\tilde{h}(\delta_{q_1}) - a| > d$. Следовательно, $\|g_1\| > d$ и $\rho(g_1, E) = d$. Значит, $P_E g_1 = \ell \neq 0$. Пусть $g_1 = \ell + g_0$, где $g_0 \in C(Q)$, $\|g_0\| = d$. Так как $g_1(\nu) = \Phi(\nu) = d$, то $\nu(g_0) = \|g_0\| = d$, а значит, $g_0|_{\text{supp } \nu} = g|_{\text{supp } \nu}$. Из равенства $g(q) - a\chi_{q_1}(q) = g_0(q) + \ell(q) \forall q \in Q$ следует, что $\ell|_{\text{supp } \nu} = 0$. Следовательно, E – не чебышевское подпространство по лемме С. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{h}(q) = H^+(q)$. Аналогично доказывается, что $\tilde{h}(q) = H^-(q) \forall q \in Q$. Следовательно, $H^-(q) = H^+(q)$ и необходимость условия 1) в этом случае доказана.

Переходя к общему случаю, заметим, что если $h \in C(Q) \setminus E$, $h = h_0 + \ell$, $\ell \in E$, $\rho(h, E) = \|h_0\|$, то функционалы $\hat{h}$, $\hat{h}_1$, $h_1 = h - \ell$ совпадают на $E^\perp$. Для элемента $h - \ell$ имеем $\|h - \ell\| = \rho(h - \ell, E)$, и для него необходимость уже доказана. Следовательно, для элемента h имеем $H^+(q) = H^-(q) \forall q \in Q$ и необходимость условия 1) доказана.

Если $\tilde{h} - w^*$ -непрерывное продолжение на $C^*(Q)$ функционала $\hat{h}|_{E^\perp}$, $\|\tilde{h}\| = \|\hat{h}\|_{E^\perp}$, то по доказанному $H^+(q) = H^-(q) = \tilde{h}(q) \forall q \in Q$. Следовательно, $\forall \varphi \in E^\perp$ имеем: $\tilde{h}(\varphi) = \varphi(h) = H^+(q)(\varphi)$, и необходимость условия 2) доказана. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $Q = \overline{Q}_0$, $1 \in E$, E – чебышевское подпространство, $h \in C(Q) \setminus E$, то $h(q) - H^+(q)$ есть ближайший элемент для функции h .

Следующая лемма, вероятно, хорошо известна.

ЛЕММА С. Пусть $E \subset C(Q)$, $\varphi \in E^\perp \cap P_{C(Q)}$ и E содержит функцию g , $g \neq 0$, $g|_{\text{supp } \varphi} = 0$. Тогда E – не чебышевское подпространство.

Заметим, что более общий факт доказан в [12, теорема 7].

ЛЕММА 4. Пусть $E \subset Z$, $z_i \in Z \setminus E$, $i = 1, 2, \dots, k$, $E_1 = E \oplus \text{sp}(z_i)_{i=1}^k$. Если $E \in \mathcal{E}$, то $E_1 \in \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi - w^*$ -непрерывный функционал, определенный на $E_1^\perp$ и $\tilde{\varphi}$ – продолжение φ по теореме Хана–Банаха на $E^\perp$. Тогда легко проверить, что $\tilde{\varphi} - w^*$ -непрерывный функционал на $E^\perp$. Так как $E \in \mathcal{E}$, по предложению А для функционала $\tilde{\varphi}$ найдется w^* -непрерывное продолжение $\tilde{\tilde{\varphi}}$ на Z^* , $\|\tilde{\tilde{\varphi}}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. В итоге, по предложению А $E_1 \in \mathcal{E}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $E \in \mathcal{E}$, $L \subset E^\perp$, $\dim E^\perp/L < +\infty$. Тогда $P_C \cap L$ всюду плотно в L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_1 = (L)^\perp$, $Y = C(Q)/E_1$ и возьмем $\varphi \in P_Y$, $\|\varphi\| = 1$. Следовательно, для некоторого $y \in Y$, $\|y\| = 1$, имеем $\varphi(y) = 1$. Пусть τ – естественное отображение $C(Q) \rightarrow Y$ и $\tau(g) = y$. Так как $E_1 \in \mathcal{E}$ по лемме 3, найдется $g_0 \in C(Q)$: $\|g - g_0\| = \rho(g, E_1) = \varphi(g - g_0)$, а потому $\varphi \in P_C$. Итак, показано, что $P_Y \subset P_C(Q)$. По теореме Бишопа–Фелпса [13, теорема 1, с. 9] P_Y всюду плотно в $L = (C(Q)/E_1)^*$ и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $Q = \overline{Q}_0$, $E \subset C(Q)$, $\dim E = +\infty$, $1 \in E$, $C(Q)/E$ – пространство Линденитраусса. Тогда E – не чебышевское подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема очевидна, если $E \notin \mathcal{E}$ или если $E^\perp$ содержит меры, носитель которых конечен. Поэтому будем предполагать, что $E \in \mathcal{E}$ и что $\text{supp } \nu$ бесконечен для любой меры $\nu \in E^\perp$. Допустим, что найдется $q_0 \in Q_0$, $q_0 \notin \text{supp } \varphi \ \forall \varphi \in \partial B_{E^\perp}$. Так как по теореме Крейна–Мильмана [5, теорема 4, с. 477] $B_{E^\perp} = \overline{\text{co}}(\partial B_{E^\perp})$, то $q_0 \notin \text{supp } \varphi \ \forall \varphi \in E^\perp$. Пусть $g \in C(Q)$, $g|_{\text{supp } \varphi} = 0 \ \forall \varphi \in E^\perp$. Тогда $g \in E$ и по лемме С E – не чебышевское подпространство. Следовательно, далее считаем, что $Q_0 \subset \bigcup_{\varphi \in \partial B_{E^\perp}} \text{supp } \varphi$.

Предположим теперь, что для некоторого $\varphi_0 \in \partial B_{E^\perp}$ носитель $\text{supp } \varphi_0$ содержит две различные точки $q_1, q_2 \in Q_0$. Определим функцию

$$\tilde{g}(q) = \begin{cases} 0, & q \neq q_1, q_2; \\ \alpha_1, & q = q_1; \\ \alpha_2, & q = q_2; \end{cases}$$

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ подобраны так, чтобы $\varphi_0(\tilde{g}) = 0$. Тогда $\tilde{g} \in E$, поскольку $\varphi(\tilde{g}) = 0 \ \forall \varphi \in \partial B_{E^\perp}$. Пусть $L = \{\varphi \in E^\perp : \varphi\{q_1\} = \varphi\{q_2\} = 0\}$. Тогда $L - w^*$ -замкнутое пространство в $E^\perp$, $\dim E^\perp/L = 2$. По лемме 5 можно найти $\varphi \in P_C \cap L$, и так как $\tilde{g} \in E$, $\tilde{g}|_{\text{supp } \varphi} = 0$, то E – не чебышевское подпространство по лемме С. Следовательно, нужно анализировать случай, когда $\forall \varphi \in \partial B_{E^\perp}$ носитель $\text{supp } \varphi$ содержит не более одной точки $q \in Q_0$.

Возьмем $q_1, q_2 \in Q_0$ и пусть $\varphi_i \in \partial B_{E^\perp}$, $q_i \in \text{supp } \varphi_i$, $i = 1, 2$. Определим на $E^\perp$ w^* -непрерывные функционалы $\gamma_i : \gamma_i(\varphi) = \varphi\{q_i\}$, $i = 1, 2$, и пусть $L = \{\varphi \in E^\perp : \gamma_i(\varphi) = 0, i = 1, 2\} - w^*$ -замкнутое подпространство $E^\perp$. Возьмем $\varphi \in E^\perp$, $\|\varphi\| = 1$. По теореме Крейна–Мильмана [5, теорема 4, с. 477]

$$\varphi = w^* - \lim \left(\alpha_n^1 \varphi_1 + \alpha_n^2 \varphi_2 + \sum_{i=3}^{r_n} \alpha_n^i \varphi_i \right), \quad \text{где} \quad \varphi_n^i \in \partial B_{E^\perp} \sum_{i=3}^{r_n} |\alpha_n^i| = 1.$$

Считая, что $\alpha_n^1 \rightarrow \alpha_1$, $\alpha_n^2 \rightarrow \alpha_2$, получим, что $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \psi$, где $\psi \in L$. При этом, учитывая замечание 1, получаем

$$\left\| \alpha_n^1\varphi_1 + \alpha_n^2\varphi_2 + \sum_{i=3}^{r_n} \alpha_n^i\varphi_i \right\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и потому $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \|\psi\| \leq 1$. С другой стороны, $\|\varphi\| = 1 \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \|\psi\|$. Поэтому $\|\psi\| = 1 - |\alpha_1| - |\alpha_2|$. Значит, если $\varphi \in E^\perp$, $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \psi$, $\psi \in L$, то $\|\varphi\| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \|\psi\|$.

Определим на $E^\perp$ w^* -непрерывный функционал $\Gamma : \Gamma(\varphi) = \gamma_1(\varphi)/\gamma_1(\varphi_1)$, $\varphi \in E^\perp$, и убедимся, что $\beta_{\delta_{q_2}}^+(\Gamma) \neq \beta_{\delta_{q_2}}^-(\Gamma)$. Если $\varphi \in E^\perp$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \psi$, $\psi \in L$, то $1 - \Gamma(\varphi) = 1 - \alpha_1$, $\varphi\{q_2\} = \alpha_2\varphi_2\{q_2\}$. Следовательно, неравенство $1 - \Gamma(\varphi) \leq 2|\varphi\{q_2\}|$ приобретает вид $1 - \alpha_1 \leq 2|\alpha_2| \cdot |\varphi_2\{q_2\}| \leq |\alpha_2|$. Ясно, что последнее возможно лишь, если $|\varphi_2\{q_2\}| = 1/2$ и $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 1$. В этом случае $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ и

$$\frac{1 - \Gamma(\varphi)}{|\varphi\{q_2\}|} = \frac{1 - \alpha_1}{\frac{1}{2}(1 - |\alpha_1|)} \geq 2.$$

Значит, $\beta_{\delta_{q_2}}^+(\Gamma) = +1$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\beta_{\delta_{q_2}}^-(\Gamma) = -1$. Следовательно, не выполнено условие 1) теоремы 2 и E – не чебышевское подпространство. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ласау Н. Е. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin: Springer, 1974.
- [2] Шашкин Ю. А. Выпуклые множества, экстремальные точки, симплексы // Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1973. Т. 11. С. 5–50.
- [3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1. М.: Мир, 1962.
- [4] Устинов Г. М. О подпространствах существования в $C(Q, X)$ // Исслед. по функциональному анализу и топологии. Свердловск, 1990. С. 127–130.
- [5] Гаркави А. Л. О наилучшем приближении элементами бесконечномерных подпространств одного класса // Матем. сб. 1963. Т. 62. № 1. С. 104–120.
- [6] Effros E. G. Structure in simplexes. II // J. Funct. Anal. 1967. V. 1. № 4. P. 379–391.
- [7] Lazar A. J. Spaces of affine continuous functions on simplexes // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. № 3. P. 503–525.
- [8] Mach J. Continuity properties of Chebyshev centers // J. Approx. Theory. 1980. V. 29. № 3. P. 223–230.
- [9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [10] Phelps R. R. Uniqueness of Hahn–Banach extensions and unique best approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. № 2. P. 238–255.
- [11] Власов Л. П. Характеристика обобщенных и классических элементов наилучшего приближения относительно подпространств конечной коразмерности // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 5. С. 707–715.
- [12] Устинов Г. М. О подпространствах единственности в пространствах абстрактных непрерывных функций. Препринт/АН СССР. УрО. ИММ. Свердловск, 1987.
- [13] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.

Уральский государственный
технический университет им. С. М. Кирбы
г. Екатеринбург

Поступило
28.10.96
Исправленный вариант
03.02.98