Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Денисов, Спектральные точки типа π_+ и π_- операторнозначных функций, принимающих значения в множестве неограниченных операторов, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 3, 469–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:14:44

Спектральные точки типа π_+ и π_- операторнозначных функций, принимающих значения во множестве неограниченных операторов

М. С. Денисов

Ключевые слова: пространство Крейна, аппроксимативный спектр, операторнозначная функция.

DOI: 10.4213/mzm11040

Изучению спектральных свойств линейных операторов и операторозначных функций, возникающих при изучении уравнений Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами, посвящено большое число публикаций, см., например, [1]–[6].

Рассмотрим дифференциальное выражение, имеющее следующий вид:

$$A(\lambda) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(t)}{\lambda - \alpha_i(t)} \quad (1)$$

При фиксированном значении комплексного параметра λ , граничных условиях вида $y(0) = y(1) = 0$ и некоторых условиях на функции $q_i(t)$ и $\alpha_i(t)$, $A(\lambda)$ — неограниченный замкнутый линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$. В статьях [3], [7] рассматривались вопросы существования различных типов спектра у таких операторнозначных функций. В данной работе мы сделали попытку свести вопросы исследования точек спектра типа π_+ и π_- у операторнозначных функций, порождаемых дифференциальными выражениями (1), к исследованию точек спектра типа π_+ и π_- J -самосопряженных операторов. Исследованию точек спектра типа π_+ и π_- операторов, действующих в пространствах Крейна, была посвящена работа [8].

Напомним известные факты о шкале пространств, связанных с самосопряженным оператором S , (см., например, [7]).

Символом $\mathcal{H}_{1/2}(S)$ обозначим гильбертово пространство $\{\text{dom}(|S|^{1/2}), (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{1/2}(S)}\}$, где

$$(x, y)_{\mathcal{H}_{1/2}(S)} := ((I + S^2)^{1/4}x, (I + S^2)^{1/4}y).$$

Гильбертово пространство, полученное в результате пополнения $\mathcal{H}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(x, y)_{\mathcal{H}_{-1/2}(S)} := ((I + S^2)^{-1/4}x, (I + S^2)^{-1/4}y).$$

будем обозначать $\mathcal{H}_{-1/2}(S)$.

Для произвольного числа $z \in \mathbb{C}$, оператор $S - zI$ может быть продолжен до непрерывного линейного оператора $(\tilde{S} - zE) : \mathcal{H}_{1/2}(S) \rightarrow \mathcal{H}_{-1/2}(S)$, который является изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}_{1/2}(S)$ и $\mathcal{H}_{-1/2}(S)$, если и только если $z \in \rho(S)$ (см., например, [7], [9]). Множество линейных непрерывных операторов действующих между гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_{1/2}(S)$ and $\mathcal{H}_{-1/2}(S)$ обозначается $\mathcal{L}^{(S)}$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие известные результаты, (см., например, [7]).

ЛЕММА 1. *Множество значений $\text{Ran}(S - z)$ оператора $S - z$, где $z \in \mathbb{C}$ и $S = S^*$, замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Ran}(\tilde{S} - zE)$ замкнуто. Если это выполнено, для операторов $S - z$ и $\tilde{S} - zE$ верно равенство $\ker(S - z) = \ker(\tilde{S} - zE)$ В частности, $z \in \rho(S)$ если и только если $(\tilde{S} - zE)$ изоморфизм.*

Данная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-05315-а).

Всюду далее мы предполагаем, что линейный оператор $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ непрерывный, а T и D – линейные самосопряженные неограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$.

Символами $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^*$ обозначим сужения операторов B и B^* на $\mathcal{H}_{1/2}(D)$ и $\mathcal{H}_{1/2}(T)$, соответственно. Символом $\tilde{T}$ обозначим линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{H}_{1/2}(T)$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(T)$, являющийся продолжением оператора T на $\mathcal{H}_{1/2}(T)$.

Рассмотрим операторнозначную функцию $A(\lambda)$, определенную на некотором подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, со значениями во множестве неограниченных операторов. Всюду далее мы предполагаем, что $A(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$A(\lambda) := \lambda + T + B^*(D - \lambda)^{-1}B. \quad (2)$$

Функция (2) может быть продолжена до функции, принимающей значения в $\mathcal{L}^{(T)}$:

$$\tilde{A}(\lambda) = \lambda + \tilde{T} + \tilde{B}^*(\tilde{D} - \lambda)^{-1}\tilde{B}. \quad (3)$$

Напомним определение точек спектра типа π_+ , π_- впервые введенное в работе [7].

Точка $\mu \in \sigma(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$ называется *спектральной точкой типа π_+ (типа π_-) функции $A(\cdot)$* , если для любой последовательности $(x_n) \subset \text{dom}(A(\mu)) \subset \mathcal{H}$, $\|x_n\| = 1$, $x_n \rightarrow 0$ в слабой топологии $\mathcal{H}$, $\|A(\mu)x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнено неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n, x_n) > 0 \quad \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n, x_n) < 0 \text{ соответственно} \right).$$

Множество всех спектральных точек типа π_+ (типа π_-) функции $A(\cdot)$ обозначается через $\sigma_{\pi_+}(A(\cdot))$ ($\sigma_{\pi_-}(A(\cdot))$ соответственно).

Напомним понятие аппроксимативного спектра операторонозначной функции – $\sigma_{\text{ар}}$.

Точка $\mu \in \sigma_{\text{ар}}(A(\cdot))$, если существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$, такая, что $\|A(\mu)x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mu \in \sigma_{\text{ар}}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mu \in \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$ ($\mu \in \sigma_{\pi_-}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$);
- 2) для каждой последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_{1/2}(T)$, $\|x_n\|_{\mathcal{H}_{1/2}(T)} = 1$, $x_n \rightarrow 0$ в слабой топологии $\mathcal{H}$, $\|\tilde{A}(\mu)x_n\|_{\mathcal{H}_{-1/2}(T)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнено следующее неравенство:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n, x_n) > 0 \quad \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n, x_n) < 0 \text{ соответственно} \right).$$

Доказательство леммы 2 проводится в два этапа. Изначально, предполагая противное, доказывается, что из утверждения 2) следует утверждение 1). Затем, выбирая $z \in \rho(A(\mu))$ и строя последовательность $y_n = -z(A(\mu) - z)^{-1}x_n$, мы показываем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).

Рассмотрим линейные операторы:

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} := \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} := \begin{pmatrix} T & -B^* \\ B & D \end{pmatrix} \quad (4)$$

где операторы T , D и B были определены ранее. Введем пространство Крейна $\mathcal{K} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ с фундаментальной симметрией $\mathbf{J}$. Вместе с операторам $\mathbf{M}$ мы будем рассматривать оператор $\tilde{\mathbf{M}}$:

$$\tilde{\mathbf{M}} := \begin{pmatrix} \tilde{T} & -\tilde{B}^* \\ \tilde{B} & \tilde{D} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{1/2}(\mathbf{T}) \\ \mathcal{H}_{1/2}(\mathbf{D}) \end{pmatrix} =: \mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L}) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{-1/2}(\mathbf{T}) \\ \mathcal{H}_{-1/2}(\mathbf{D}) \end{pmatrix} =: \mathcal{K}_{-1/2}(\mathbf{L}), \quad \tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{L}^{(L)}. \quad (5)$$

ЛЕММА 3 (Р. Jonas, С. Trunk, [7]). *Предположим, что выполнено условие $\rho(\mathbf{M}) \neq \{\emptyset\}$. Тогда*

$$\sigma_{\text{ap}}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R} = \sigma_{\text{ap}}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R}. \quad (6)$$

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathbf{J}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ – линейные операторы, определенные в (4), $\rho(\mathbf{M}) \neq \{\emptyset\}$, $\text{dom}(\mathbf{M}) \subset \mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $\mu \in \sigma_{\pi_+}(\mathbf{M})$ ($\sigma_{\pi_-}(\mathbf{M})$ соответственно);
- 2) $\mu \in \sigma_{\text{ap}}(\mathbf{M})$ и для каждой последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in \mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})$ с $\|x_n\|_{\mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})} = 1$, $x_n \rightarrow 0$ (в слабой топологии) и $\|(\widetilde{\mathbf{M}} - \mu E)x_n\|_{\mathcal{K}_{-1/2}(\mathbf{L})} \rightarrow 0$ для $n \rightarrow \infty$, мы имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] > 0 \quad \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] < 0 \text{ соответственно} \right).$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 2.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathcal{K}$ – пространство Крейна, и $\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\widetilde{\mathbf{M}}$ операторы, определенные в (4) и (5), $\rho(\mathbf{M}) \neq \{\emptyset\}$. Тогда выполнены равенства:*

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R} &= \sigma_{\pi_+}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R} \\ \sigma_{\pi_-}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R} &= \sigma_{\pi_-}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R} \end{aligned}$$

Пусть $\mu \in \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$. Из равенства (6) следует, что $\mu \in \sigma_{\text{ap}}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R}$. Пусть последовательность $x_n = (x_n^1, x_n^2)^T \in \mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})$, где $x_n^1 \in \mathcal{H}_{1/2}(T)$, $x_n^2 \in \mathcal{H}_{1/2}(D)$, такая, что $\|x_n\|_{\mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})} = 1$, $x_n \rightarrow 0$ (в слабой топологии) и $\|(\widetilde{\mathbf{M}} - \mu E)x_n\|_{\mathcal{K}_{-1/2}(\mathbf{L})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для $\mu \in \rho(D)$ мы можем применить факторизацию Фробениуса–Шура к $\widetilde{\mathbf{M}} - \mu E$:

$$\widetilde{\mathbf{M}} - \mu E = U(\mu) \begin{pmatrix} \tilde{A}(\mu) & 0 \\ 0 & \tilde{D} - \mu E \end{pmatrix} U(\bar{\mu})^* \quad (7)$$

где

$$U(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{B}^*(\tilde{D} - \mu E)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\bar{\mu})^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\tilde{D} - \mu E)^{-1} \tilde{B} & 1 \end{pmatrix}$$

Из разложения (7) при $n \rightarrow \infty$ мы получим:

$$\|\tilde{A}(\mu)x_n^1\|_{\mathcal{H}_{-1/2}(T)} \rightarrow 0, \quad \|\tilde{B}x_n^1 + (\tilde{D} - \mu E)x_n^2\|_{\mathcal{H}_{-1/2}(D)} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Покажем, что выполнено неравенство $\liminf \|x_n^1\| > C > 0$. Предположим, что существует подпоследовательность $x_{n_k}^1 \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(T)$. Тогда $Bx_{n_k}^1 \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(D)$, и из условия (8) получим: $(\tilde{D} - \mu E)x_{n_k}^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(D)$. Пользуясь леммой 1 получим, что $\tilde{D} - \mu E$ изоморфизм; следовательно, $x_{n_k}^2 \rightarrow 0$, и поэтому $\|x_{n_k}\|_{\mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, получили противоречие.

Докажем теперь, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] > 0$. Пользуясь определением производной $\tilde{A}(\mu)'$, получим:

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n^1, x_n^1) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + ((\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1, (\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1)).$$

Из (8) следует, что $(\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1 + x_n^2 \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(D)$, поэтому:

$$\begin{aligned} 0 &< \liminf_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)'x_n^1, x_n^1) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + ((\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1, (\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + ((\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1 + x_n^2 - x_n^2, (\tilde{D} - \mu E)^{-1}Bx_n^1 + x_n^2 - x_n^2)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + (x_n^2, x_n^2)). \end{aligned}$$

По лемме 4 $\mu \in \sigma_{\pi_+}(\mathbf{M})$. Аналогично доказывается, что

$$\sigma_{\pi_-}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R} \subset \sigma_{\pi_-}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R}.$$

Покажем, что $\sigma_{\pi_+}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R} \subset \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$. Пусть $\mu \in \sigma_{\pi_+}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R}$. Из (6) следует, что $\mu \in \sigma_{\text{ap}}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$. Пусть $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}_{1/2}(T)$, $\|x_n\|_{\mathcal{H}_{1/2}(T)} = 1$, $x_n \rightharpoonup 0$ (в слабой топологии), и $\|\tilde{A}(\mu)x_n\|_{\mathcal{H}_{-1/2}(T)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $y_n := -(\tilde{D} - \lambda_0 E)^{-1} Bx_n$. Тогда y_n из $\mathcal{H}_{-1/2}(D)$ и для $x_n := (x_n^1, x_n^2)^T \in \mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})$, мы имеем

$$\|x_n\|_{\mathcal{K}_{1/2}(\mathbf{L})} \geq 1, \quad x_n \rightharpoonup 0, \quad \|(\tilde{\mathbf{M}} - \mu E)x_n\|_{\mathcal{K}_{-1/2}(\mathbf{L})} = \|\tilde{A}(\mu)x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из леммы 4 получим

$$\begin{aligned} 0 &< \liminf_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + (x_n^2, x_n^2)) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (-(x_n^1, x_n^1) + ((\tilde{D} - \mu E)^{-1} Bx_n^1, (\tilde{D} - \mu E)^{-1} Bx_n^1)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}(\mu)' x_n^1, x_n^1). \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 2, $\mu \in \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}$. Аналогично показывается вложение

$$\sigma_{\pi_-}(\mathbf{M}) \cap \rho(D) \cap \mathbb{R} \subset \mu \in \sigma_{\pi_+}(A(\cdot)) \cap \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. M. Adamjan, H. Langer, *J. Operator Theory*, **33**:2 (1995), 259–277. [2] В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликков, *Матем. заметки*, **98**:6 (2015), 832–841. [3] V. Adamjan, H. Langer, M. Langer, *J. Differential Equations*, **171**:2 (2001), 315–345. [4] Е. П. Богомолова, *Дифференц. уравнения*, **21**:11 (1985), 1843–1849. [5] H. Langer, A. Markus, V. Matsaev, *Operator Theory and Related Topics*, Vol. II, Oper. Theory Adv. Appl., **118**, Birkhäuser, Basel, 2000, 255–285. [6] H. Langer, R. Mennicken, M. Möller, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **48** (1990), 319–332. [7] P. Jonas, C. Trunk, *Math. Nachr.*, **243** (2002), 92–133. [8] Т. Я. Azizov, P. Jonas, C. Trunk, *J. Funct. Anal.*, **226**:1 (2005), 114–137. [9] C. Trunk, *Spectral Properties of Class of Analytic Operator Functions and Their Linearizations*, Dissertation, Cuviller Verlag, Berlin, 2003.

М. С. Денисов

Воронежский институт ГПС МЧС России

E-mail: denisov.m.1981@gmail.com

Поступило

21.12.2015