Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Холодовский, О многослойных пленках на границе полупространства, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 421–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:55:55

О многослойных пленках на границе полупространства

С. Е. Холодовский

Выведены обобщенные граничные условия на многослойных пленках, ограничивающих полупространство и состоящих из чередующихся бесконечно тонких сильно- и слабо проницаемых прослоек. Получены формулы, выражающие в однократных квадратурах решение задачи для уравнения Лапласа в полуплоскости D , ограниченной трехслойной пленкой, через решение классической задачи Дирихле в D без пленки.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm11042

В современных условиях все более широкое применение находят материалы с многослойными пленочными покрытиями. Это связано с развитием нанотехнологий, с использованием композитных материалов и т.д. Отсюда представляет большой интерес исследование динамических процессов в материалах, имеющих на своей границе многослойную пленку. В работе [1] доказана разрешимость одного класса краевых задач с трехслойной пленкой внутри области. В работах [2], [3] построены решения краевых задач с однослойными пленочными включениями. В настоящей статье выведены обобщенные граничные условия на многослойных пленках, ограничивающих полупространство, и получена формула, выражающая решение одной краевой задачи в полуплоскости, ограниченной трехслойной пленкой, через решение аналогичной задачи без пленки.

1. Обобщенные граничные условия на пленках. Рассмотрим полупространство $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in \mathbb{R}^m)$, ограниченное многослойной пленкой $x = 0$, состоящей из n соприкасающихся сильно и слабо проницаемых прослоек в произвольном их сочетании. Следуя работам [2], [3], сильно проницаемые прослойки моделируем бесконечно тонкими слоями с бесконечно большой проницаемостью. Слабо проницаемые прослойки моделируем бесконечно тонкими слоями с бесконечно малой проницаемостью. В данной модели рассматриваемая n -слойная пленка также является бесконечно тонкой. Здесь и ниже используется язык задач тепломассопереноса (для волновых уравнений граничные условия, аналогичные условиям на пленках, имеют другой физический смысл).

Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 2014/255 НИР 2603.14).

Для функции $u(x, y)$ в D рассмотрим класс уравнений

$$\partial_x^2 u(x, y) + Lu(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, L – произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным y_i , $y = (y_1, \dots, y_m)$, т.е. L не содержит производных по x и коэффициенты при производных не зависят от x . Для вывода граничных условий на пленке $x = 0$ предположим, что на внешней стороне пленки (при $x = +0$) можно определить значения искомой функции (потенциала) $\varphi(y)$ и значения нормальной скорости $\psi(y)$.

Рассмотрим скачки потенциала $u(x, y)$ и нормальной составляющей скорости $\partial_x u(x, y)$ на границах ($x = \pm 0$) n -слойной пленки в виде

$$x = -0: \quad \varphi(y) - u = F_n u, \quad \psi(y) - \partial_x u = G_n u, \quad (2)$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – заданные функции, F_n и G_n – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, подлежащие определению (операторы F_n и G_n построены ниже в (9), (10) по индукции), проницаемость области D полагаем равной единице. При отсутствии пленки (при $n = 0$) полагаем $F_0 u = G_0 u = 0$, что соответствует идеальному контакту области D с внешней средой, при этом условия (2) являются классическими условиями 1-го и 2-го рода.

Пусть пленка $x = 0$ состоит из i сильно- и слабо проницаемых прослоек. Добавим к данной пленке сильно- или слабо проницаемую прослойку $x = +0$, которую заменим слоем $D_0 = (0 < x < l) \times (y \in \mathbb{R}^m)$ конечной толщины l и проницаемости k_0 . Полагая $u(x, y) = u_0(x, y)$ в D_0 , с учетом (2) получим условия на ∂D_0 вида

$$x = l: \quad u_0 = \varphi(y), \quad v_0 = \psi(y), \quad (3)$$

$$x = 0: \quad u_0 - u = F_i u, \quad v_0 - v = G_i u, \quad (4)$$

где $v_0 = k_0 \partial_x u_0(x, y)$, $v = \partial_x u(x, y)$ – нормальные составляющие скорости на ∂D_0 , функция $u_0(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в D_0 . Здесь и ниже $x = -0$ для u и $x = +0$, $x = l - 0$ для u_0 . Из первых условий (3), (4) с учетом теоремы Лагранжа о среднем найдем приращение потенциала на ∂D_0 в виде

$$\varphi(y) - u|_{x=0} = u_0|_{x=l} - u_0|_{x=0} + F_i u|_{x=0} = \frac{l}{k_0} v_0|_{x=c_1} + F_i u|_{x=0}. \quad (5)$$

Аналогично из вторых условий (3), (4) найдем приращение нормальной скорости на ∂D_0 :

$$\psi(y) - v|_{x=0} = v_0|_{x=l} - v_0|_{x=0} + G_i u|_{x=0} = k_0 l \partial_x^2 u_0|_{x=c_2} + G_i u|_{x=0}, \quad (6)$$

где в равенствах (5), (6) $c_i \in (0, l)$.

Пусть слой D_0 толщины l и проницаемости k_0 вырождается в сильно проницаемую прослойку, т.е.

$$l \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow \infty, \quad k_0 l \rightarrow A_{i+1},$$

где A_{i+1} – параметр прослойки [3]. Тогда из последнего равенства (5) получаем $\lim u_0|_{x=l} = \lim u_0|_{x=0}$. Из первого условия (4) следует $\lim u_0|_{x=0} = \lim (u + F_i u)|_{x=0}$. Объединяя эти равенства, получим

$$\lim u_0|_{x=l} = \lim u_0|_{x=0} = \lim (u + F_i u)|_{x=0}.$$

Отсюда

$$\lim u_{0|x=c_2} = \lim(u + F_i u)_{|x=0} \quad (7)$$

для всех $c_2 \in (0, l)$, что следует из ограниченности $\partial_x^2 u_0(x, y)$ и $Lu_0(x, y)$ в D_0 (см. (1)). Действуя на предельное соотношение (7) оператором L по свободным переменным y_j , с учетом уравнения (1) находим

$$\lim \partial_x^2 u_{0|x=c_2} = \lim(\partial_x^2 u + F_i \partial_x^2 u)_{|x=0}.$$

Тогда из равенств (5), (6) получим обобщенные граничные условия для функции $u(x, y)$ при дополнительной сильно проникаемой прослойке $x = +0$ в виде

$$x = 0 : \quad \varphi(y) - u = F_{i+1} u, \quad \psi(y) - \partial_x u = G_{i+1} u, \quad (8)$$

где

$$F_{i+1} u = F_i u, \quad G_{i+1} u = A_{i+1} \partial_x^2(u + F_i u) + G_i u. \quad (9)$$

Аналогично, если слой D_0 вырождается в слабо проникаемую прослойку, т.е.

$$l \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow 0, \quad \frac{l}{k_0} \rightarrow B_{i+1}$$

(B_{i+1} – параметр прослойки [3]), то из последнего равенства (6) с учетом второго условия (4) получаем

$$\lim v_{0|x=l} = \lim v_{0|x=0} = \lim(v + G_i u)_{|x=0}.$$

Отсюда

$$\lim v_{0|x=c_1} = \lim(v + G_i u)_{|x=0} \quad \text{для всех } c_1 \in (0, l).$$

Тогда из равенств (5), (6) получим граничные условия при дополнительной слабо проникаемой прослойке $x = +0$ в виде (8), где

$$F_{i+1} u = B_{i+1}(\partial_x u + G_i u) + F_i u, \quad G_{i+1} u = G_i u. \quad (10)$$

Из равенств (9), (10) следует, что операторы F_n и G_n в условиях (2) являются линейными дифференциальными операторами по переменной x с постоянными коэффициентами.

Таким образом, на многослойной пленке $x = 0$ можно рассматривать два типа граничных условий и соответственно два типа краевых задач: при заданном потенциале $\varphi(y)$ и при заданной нормальной скорости $\psi(y)$ на внешней стороне пленки $x = +0$. Обобщенное граничное условие первого типа на n -слойной пленке для функции $u(x, y)$ имеет вид (первое условие (2))

$$u + F_n u_{|x=0} = \varphi(y), \quad (11)$$

где оператор F_n строится по рекуррентным формулам (9), (10), в которых $F_0 = G_0 = 0$. При этом с помощью второго условия (2) по известному потенциалу $u(x, y)$ можно найти нормальную скорость $\psi(y)$ на внешней стороне пленки $x = +0$. Обобщенное граничное условие второго типа имеет вид (второе условие (2))

$$\partial_x u + G_n u_{|x=0} = \psi(y), \quad (12)$$

где оператор G_n также строится по рекуррентным формулам (9), (10), $F_0 = G_0 = 0$. По найденной функции $u(x, y)$ с помощью первого условия (2) определяется значение потенциала $\varphi(y)$ при $x = +0$.

Из равенств (9) и (10) следует, что соприкасающиеся сильно (слабо) проницаемые прослойки равносильны сильно (слабо) проницаемой прослойке с суммарным параметром. Поэтому далее рассматривается пленка $x = 0$, состоящая из чередующихся сильно- и слабо проницаемых прослоек.

На границах сильно (слабо) проницаемой прослойки потенциалы (нормальные скорости) непрерывны в силу (9), (10), т.е. для граничных условий первого типа добавление сильно проницаемой прослойки $x = +0$ не меняет граничного условия (11), а для граничных условий второго типа добавление слабо проницаемой прослойки $x = +0$ не меняет граничного условия (12). Отсюда в граничных условиях первого типа последняя прослойка $x = +0$ должна быть слабо проницаемой, а в граничных условиях второго типа – сильно проницаемой.

Отметим, что в зависимости от количества прослоек в пленке порядок производных от искомой функции $u(x, y)$ в граничных условиях (11), (12) может быть произвольным.

В случае однослойной сильно проницаемой пленки условие (12) примет вид

$$\partial_x u + A \partial_x^2 u|_{x=0} = \psi(y).$$

Для волнового уравнения (1) (где $y = t$ – время) данное условие соответствует условию при наличии точечной массы на струне [4; с. 147], [5]. В случае однослойной слабо проницаемой пленки условие (11) совпадает с классическим условием 3-го рода: $u + B \partial_x u|_{x=0} = \varphi(y)$, что для волнового уравнения соответствует условию на упругом контакте.

2. О формуле, выражающей решение краевой задачи в полуплоскости, ограниченной трехслойной пленкой, через решение аналогичной задачи без пленки. Рассмотрим полуплоскость $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in \mathbb{R})$, ограниченную трехслойной пленкой $x = 0$, состоящей из слабо проницаемой прослойки $x = -0$ с параметром B_1 , сильно проницаемой прослойки $x = 0$ с параметром A и слабо проницаемой прослойки $x = +0$ с параметром B_2 . Рассмотрим в D краевую задачу для уравнения Лапласа с граничным условием на пленке $x = 0$ первого типа:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad u + (B_1 + B_2) \partial_x u + AB_2 \partial_x^2 u + \alpha \partial_x^3 u|_{x=0} = \varphi(y), \quad (13)$$

где $|\varphi(y)| = O(1)$, $\varphi(y) \in C(R)$, $\alpha = B_1 AB_2$, граничное условие (13) следует из граничного условия (11) при $n = 3$ и рекуррентных формул (9), (10); $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Наряду с задачей (13) рассмотрим для функции $f(x, y)$ в полуплоскости D классическую задачу Дирихле (с сохранением граничной функции $\varphi(y)$) вида

$$\Delta f(x, y) = 0, \quad f|_{x=0} = \varphi(y), \quad (14)$$

$|f(x, y)| = O(1)$ при $x < 0$. Решение задачи (14) строится по формуле Пуассона для полуплоскости [4; с. 327]:

$$f(x, y) = -x\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) [x^2 + (y - \xi)^2]^{-1} d\xi.$$

Методом работ [2], [3] выразим решение $u(x, y)$ задачи (13) с пленкой через решение $f(x, y)$ задачи (14). Для этого предположим сначала, что граничная функция $\varphi(y)$ в условиях (13), (14) разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье $g_i(\lambda)$ [6; с. 278]:

$$\varphi(y) = \int_0^\infty g(y, \lambda) d\lambda, \quad g(y, \lambda) = g_1(\lambda) \sin \lambda y + g_2(\lambda) \cos \lambda y \quad (15)$$

(в окончательных формулах (21)–(23) данное предположение несущественно). Отсюда, применяя метод Фурье, представим решение задачи Дирихле (14) в виде

$$f(x, y) = \int_0^\infty e^{\lambda x} g(y, \lambda) d\lambda, \quad x < 0. \quad (16)$$

Решение задачи (13) также найдем методом Фурье в виде

$$u(x, y) = \int_0^\infty a(\lambda) e^{\lambda x} g(y, \lambda) d\lambda, \quad x < 0, \quad (17)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{d(\lambda)}, \quad d(\lambda) = \alpha \lambda^3 + AB_2 \lambda^2 + (B_1 + B_2) \lambda + 1, \quad (18)$$

функция $g(y, \lambda)$ имеет вид (15), при этом в силу $\alpha, A, B_i > 0$ имеем $d(\lambda) > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$. Здесь функция $a(\lambda)$ получена посредством сравнения коэффициентов при функции $g(y, \lambda)$ под знаками интегралов (15), (17) в граничном условии (13). Отметим, что полученное решение (17) задачи (13) содержит двукратные несобственные интегралы (внешний и внутренний в коэффициентах Фурье $g_i(\lambda)$) от сильно осциллирующих на бесконечности тригонометрических функций.

Заменяя в разложении (16) переменную x на $x - z$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma z} z^k / k!$ и интегрируя по $z \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-\gamma z} z^k f(x - z, y) dz = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} g(y, \lambda)}{(\lambda + \gamma)^{k+1}} d\lambda, \quad x < 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0, \quad (19)$$

где $k = 0, 1, \dots$.

Раскладывая правильную дробь $1/d$ из (18) на простейшие дроби, с помощью формулы (19) решение (17) задачи (13) выразим непосредственно через решение $f(x, y)$ классической задачи Дирихле (14) в однократных квадратурах без разложения Фурье (т.е. без сильных осцилляций).

Пусть многочлен $d(\lambda)$ вида (18) имеет различные корни $-\gamma_i$, т.е.

$$d(\lambda) = \alpha(\lambda + \gamma_1)(\lambda + \gamma_2)(\lambda + \gamma_3), \quad \gamma_i \neq \gamma_j.$$

Тогда

$$a(\lambda) = \frac{1}{d(\lambda)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{p_{21}p_{31}(\lambda + \gamma_1)} - \frac{1}{p_{21}p_{32}(\lambda + \gamma_2)} + \frac{1}{p_{31}p_{32}(\lambda + \gamma_3)} \right], \quad (20)$$

где $p_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$. Отсюда с помощью формулы (19) функция (17) приводится к виду

$$u(x, y) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(x - z, y) \left(\frac{e^{-\gamma_1 z}}{p_{21}p_{31}} - \frac{e^{-\gamma_2 z}}{p_{21}p_{32}} + \frac{e^{-\gamma_3 z}}{p_{31}p_{32}} \right) dz. \quad (21)$$

Аналогично в случае кратных корней, т.е. при

$$d(\lambda) = \alpha(\lambda + \gamma_1)^2(\lambda + \gamma_2), \quad \gamma_1 \neq \gamma_2, \quad \text{и} \quad d(\lambda) = \alpha(\lambda + \gamma_1)^3$$

решение задачи (13) с учетом формул (17)–(19) приводится соответственно к виду

$$u(x, y) = \frac{1}{p_{21}^2 \alpha} \int_0^\infty f(x - z, y) [e^{-\gamma_1 z} (p_{21} z - 1) + e^{-\gamma_2 z}] dz, \quad (22)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty f(x - z, y) e^{-\gamma_1 z} z^2 dz, \quad (23)$$

где постоянные α , p_{21} определены в (13), (20).

ТЕОРЕМА. Если функция $f(x, y)$ является решением задачи Дирихле (14), то решение задачи (13) строится по формулам (21)–(23) в соответствующих случаях корней $-\gamma_i$ многочлена $d(\lambda)$ вида (18). При этом функции $u(x, y)$ (21)–(23) непрерывно зависят от граничной функции $\varphi(y)$ (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае действительных корней $-\gamma_i$ многочлена (18) из неравенства $d(\lambda) > 0$ при $0 \leq \lambda < \infty$ (см. (18)) следует $-\gamma_i < 0$. Отсюда интегралы (21)–(23) при условии $|f(x, y)| = O(1)$ (14) сходятся вместе с производными, входящими в задачу (13).

В случае комплексных корней $-\gamma_{2,3} = -\delta \pm i\beta$ многочлена $d(\lambda)$ (18) функция $u(x, y)$ (21) действительна, что проверяется непосредственно. При этом

$$d(\lambda) = \alpha(\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + \sigma) = \alpha(\lambda + \gamma_1)(\lambda^2 + p\lambda + q),$$

где $b = 1/B_1$, $c = (B_1 + B_2)/\alpha$, $\sigma = 1/\alpha$, $\delta = p/2$, $p = b - \gamma_1$. Отсюда

$$d(0) = \alpha\sigma > 0, \quad d(-b) = \alpha(\sigma - bc) < 0.$$

Тогда действительный корень $-\gamma_1 \in (-b, 0)$, при этом $p = 2\delta = b - \gamma_1 > 0$. Отсюда $\operatorname{Re} \gamma_{2,3} = \delta > 0$, т.е. интеграл (21) сходится.

Уравнение и граничное условие (13) для функций (21)–(23) проверяются непосредственно. При этом учитывается, что для функций (21)–(23) оператор уравнения (13) действует на подынтегральную функцию $f(x - z, y)$, для которой указанное уравнение однородно (см. (14)). Граничное условие (13) проверяется посредством интегрирования по частям интегралов (21)–(23) с учетом граничного условия $f|_{x=0} = \varphi(y)$ (14) и равенств $d(-\gamma_i) = 0$, где $d(\lambda)$ имеет вид (18).

Задача Дирихле (14) для граничной функции $\varphi(y)$ (13) корректна [4; с. 303]. Отсюда для всех $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f_1(x, y) - f_2(x, y)| < \epsilon \quad \text{в } D \quad \text{при} \quad |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| < \delta,$$

где $f_i(x, y)$ – решение задачи (14) для граничной функции $\varphi_i(y)$. Пусть функции $u_i(x, y)$, $i = 1, 2$ являются решениями задачи (13) для граничных функций $\varphi_i(y)$. Тогда для указанных ϵ , δ с учетом формул (21)–(23) получим

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \frac{\epsilon P}{\alpha} \quad \text{при} \quad |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| < \delta,$$

где в случаях (21), (22), (23) соответственно

$$P = \frac{1}{|p_{21}p_{31}\gamma_1|} + \frac{1}{|p_{21}p_{32}\gamma_2|} + \frac{1}{|p_{31}p_{32}\gamma_3|}, \quad P = \frac{1}{|p_{21}|\gamma_1^2} + \frac{1}{p_{21}^2} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right), \quad P = \frac{1}{\gamma_1^3},$$

т.е. функции (21)–(23) непрерывно зависят от граничной функции $\varphi(y)$. Теорема доказана.

Таким образом, выведенные формулы (21)–(23) позволяют по известному решению классической задачи Дирихле в полуплоскости $D = (-\infty < x < 0) \times (y \in \mathbb{R})$ (без пленки) получать явное решение аналогичной задачи с трехслойной пленкой $x = 0$ при сохранении уравнения, области D и граничной функции $\varphi(y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. А. Номировский, “Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта”, *Дифференц. уравнения*, **40**:10 (2004), 1390–1399.
- [2] С. Е. Холодовский, “Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:9 (2007), 1550–1556.
- [3] С. Е. Холодовский, “Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах”, *Дифференц. уравнения*, **45**:6 (2009), 855–859.
- [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1966.
- [5] С. Е. Холодовский, “Об эффективном решении задачи о движении неограниченной струны с точечной массой”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:1 (2015), 105–112.
- [6] Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, Т. 2, Высшая школа, М., 1973.

С. Е. Холодовский

Забайкальский государственный университет,
г. Чита
E-mail: hol47@yandex.ru

Поступило

14.01.2015

Исправленный вариант

28.09.2015