Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский, О связи неванлинновских и квадратурных областей, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 460–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11044>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:50:50

О связи неванлинновских и квадратурных областей

Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность. Для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\text{Hol}(U)$ пространство всех голоморфных, а через $H^\infty(U)$ пространство всех голоморфных ограниченных в U функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная односвязная область $G \subset \mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют функции $u, v \in H^\infty(G)$ такие, что равенство

$$\bar{z} = \frac{u(z)}{v(z)} \quad (1)$$

выполняется п.в. на ∂G в смысле конформного отображения, т.е. для п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство угловых граничных значений

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \frac{(u \circ \varphi)(\zeta)}{(v \circ \varphi)(\zeta)},$$

где φ – некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G .

Область G называется *локально неванлинновской*, если существуют компакт $K \subset G$ и функции $u, v \in H^\infty(G \setminus K)$ такие, что равенство (1) выполняется п.в. на ∂G в смысле конформного отображения.

Неванлинновские и локально неванлинновские области возникли в связи с задачами аппроксимации функций полианалитическими многочленами. Соответствующие определения были введены в [1; определение 3] и [2; определения 2.1 и 4.2] и [3; определение 2] (см. также [4], где приведен подробный обзор упомянутой аппроксимационной задачи). Класс всех неванлинновских областей будем обозначать через ND, а класс всех локально неванлинновских областей – через LND соответственно. Таким образом, $\text{ND} \subset \text{LND}$.

Приведем несколько простых примеров. Пусть $D_{a,b}$ при $a > b > 0$ – это область, ограниченная эллипсом

$$\left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

и пусть

$$D'_{a,b} = \frac{1}{z}(D_{a,b})$$

(эта область называется *овалом Ньюмана*). Легко проверяется, что $\mathbb{D} \in \text{ND}$, $D_{a,b} \in \text{LND} \setminus \text{ND}$, а $D'_{a,b} \in \text{ND}$. Ряд свойств и примеров неванлинновских областей можно найти в работах [5] и [6]. В частности, отметим, что определение 1 корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора конформного отображения φ . В силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова, отношение u/v определено в области $G \in \text{LND}$ единственным образом. В случае, когда G – это жорданова область со спрямляемой границей, равенство (1) можно понимать непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂G . Кроме того, всегда можно считать, что функции u и v из определения 1 не имеют общих нулей.

Нам потребуется также понятие квадратурной области. Для $p \in [1, \infty]$ и для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $L^p_a(U)$ пространство Бергмана, состоящее из всех функций класса $L^p(U)$, голоморфных в U . Пространство Лебега $L^p(U)$ рассматривается относительно плоской меры Лебега $A(\cdot)$. Через $\langle T | f \rangle$ обозначается действие обобщенной функции (распределения) T на функцию f , через $\text{Supp } T$ – носитель T .

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00025).

DOI: 10.4213/mzml1044

© Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский, 2016

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область $G \subset \mathbb{C}$ называется *квадратурной областью в широком смысле*, если существует распределение T с $\text{Supp } T \subset G$ такое, что для любой функции $f \in L_a^1(G)$ имеет место равенство

$$\int_G f(z) dA(z) = \langle T | f \rangle. \quad (2)$$

Область G называется *классической квадратурной областью*, если существуют конечное множество $\{a_1, \dots, a_N\} \subset G$ и набор коэффициентов $c_{j,k}$, $j = 1, \dots, N$, $k = 0, \dots, n_j$, $N, n_j \in \mathbb{Z}_+$, такие, что для любой функции $f \in L_a^1(G)$ выполнено равенство

$$\int_G f(z) dA(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n_j} c_{j,k} f^{(k)}(a_j). \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) называются квадратурными формулами (или квадратурными соотношениями) для G . Важно отметить, что они являются точными для всех голоморфных интегрируемых в области G функций. Класс всех классических квадратурных областей обозначим через QD, а класс всех квадратурных областей в широком смысле через QDWS. Из теоремы о среднем вытекает, что $\mathbb{D} \in \text{QD}$. Можно также показать, что $D_{a,b} \in \text{QDWS} \setminus \text{QD}$, но $D'_{a,b} \in \text{QD}$. Квадратурные области естественно возникают во многих задачах комплексного анализа. Одно из первых упоминаний о квадратурных областях содержится в [7], а приведенные выше определения даны в том виде, как они содержатся в [8]. Отметим сборник [9], посвященный современному состоянию исследований квадратурных областей.

Оказывается, между неванлинновскими и квадратурными областями имеется интересная взаимосвязь, изучение которой и является целью настоящей заметки. Для того, чтобы увидеть эту связь нам потребуется понятие функции Шварца аналитической кривой. Пусть B – жорданова область с аналитической границей Γ (это означает, что простая замкнутая кривая Γ является образом окружности $\mathbb{T}$ при отображении, однолистом в некоторой окрестности $\mathbb{T}$). Тогда существуют окрестность U кривой Γ и функция S , голоморфная в U , такие, что $\Gamma = \{z \in U : \bar{z} = S(z)\}$. Пусть f – некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G . Тогда f голоморфна и однолистка в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ при некотором $r > 1$, а функция Шварца S кривой Γ связана с f следующим образом:

$$S(z) = f\left(\overline{\frac{1}{f^{-1}(z)}}\right).$$

Таким образом, $B \in \text{ND}$ в том и только том случае, когда функция Шварца S ее границы мероморфна в B . Это же самое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы $B \in \text{QD}$ (см. [7; гл. XIV]). Отметим также, что условие мероморфности функции S в B эквивалентно тому, что f – это рациональная функция, однолистная в $\mathbb{D}$ (см. [7; гл. XIV]). Итак, в случае жордановых областей с аналитическими границами классы ND и QD совпадают (и состоят из областей, которые являются образами единичного круга при отображении рациональными однолиственными функциями). Выясним, на какой класс областей распространяется это наблюдение.

ТЕОРЕМА 1. В классе ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$ имеют место следующие включения: $\text{QDWS} \subset \text{LND}$, $\text{QD} \subset \text{ND}$, но $\text{QD} \neq \text{ND}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ограниченная односвязная область G является квадратурной областью в широком смысле и пусть распределение T взято из определения 2 для G . Докажем вначале, что существует функция

$$S \in \text{Hol}(G \setminus \text{Supp } T) \cap C(\bar{G} \setminus \text{Supp } T)$$

такая, что $\bar{z} = S(z)$ на ∂G . При доказательстве этого факта мы будем использовать идеи и ряд конструкций из работ [10] и [8; гл. 4].

Пусть I_G – характеристическая функция области G , т.е. $I_G(z) = 1$ при $z \in G$ и $I_G(z) = 0$ в противном случае. Рассмотрим преобразование Коши F функции I_G , т.е.

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Хорошо известно, что $F \in C(\mathbb{C})$. Кроме того, при $z \in \bar{G}$ имеет место равенство

$$F(z) = \bar{z} + g(z),$$

где $g \in C(\mathbb{C}) \cap \text{Hol}(G)$. В самом деле, пусть $r > 0$ таково, что круг $D = D(0, r)$ с центром в начале координат и радиусом r содержит $\bar{G}$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{D \setminus G} \frac{dA(\zeta)}{z - \zeta},$$

причем первый интеграл в этом равенстве равен $\bar{z}$, а второй представляет собой функцию, непрерывную всюду в $\mathbb{C}$ и голоморфную в G и вне $\bar{D}$.

Рассмотрим теперь преобразование Коши R распределения T (т.е. $R = (\pi z)^{-1} * T$, где знак $*$ обозначает свертку). Тогда R – это голоморфная вне $\text{Supp } T$ функция. Определим функцию $S := -g - R$. Из отмеченных свойств функций g и R непосредственно вытекает, что

$$S \in C(\bar{G} \setminus \text{Supp } T) \cap \text{Hol}(G \setminus \text{Supp } T).$$

Для того, чтобы проверить равенство $\bar{z} = S(z)$ на ∂G заметим, что из (2) вытекает, что $F(z) = -R(z)$ при $z \notin G$. Тогда для любого $z \in \partial G$ имеют место равенства

$$S(z) = -g(z) - R(z) = \bar{z} - F(z) - R(z) = \bar{z}.$$

Для того, чтобы показать, что $G \in \text{LND}$ выберем некоторую односвязную окрестность U множества $\text{Supp } T$ такую, что $\bar{U} \subset G$. В этом случае мы оказываемся в условиях определения 1 при $u = S$, $v \equiv 1$ и $K = \bar{U}$.

Пусть теперь $G \in \text{QD}$ является классической квадратурной. Тогда из (3) вытекает, что

$$T = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n_j} c_{j,k} \delta_{a_j}^{(k)},$$

где через δ_a обозначена дельта-функция Дирака с носителем в точке $a \in \mathbb{C}$. Тогда

$$R(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n_j} \frac{k! c_{j,k}}{(z - a_j)^{k+1}},$$

т.е. R является рациональной функцией. Но из этого следует, что функция $S = -g - R$ является мероморфной в G откуда $G \in \text{ND}$.

Покажем теперь, что $\text{QD} \neq \text{ND}$ для ограниченных односвязных областей общего вида. Пусть $G \in \text{QD}$. Тогда существует мероморфная в G и непрерывная в $\bar{G} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ функция S такая, что $S(z) = \bar{z}$ на ∂G (эту функцию называют *односторонней функцией Шварца* для ∂G). Из существования такой функции S и из теоремы 5.2 работы [11] вытекает, что ∂G состоит из конечного числа аналитических кривых, а из [6; теорема 2] или [12; теорема 1] вытекает, что существуют ND-области с нигде не аналитическими границами. Теорема доказана.

Отметим, что отношение u/v из определения 1 для известных ND-областей с нигде не аналитическими границами не может быть выбрано непрерывным вплоть до ∂G . Это связано с тем, что в этих примерах полюсы соответствующего отношения накапливаются к точкам ∂G . В связи с этим наблюдением представляет интерес следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – жорданова область со спрямляемой границей. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) $G \in \text{LND}$;
- (ii) компакт K и функция $F = u/v$ взяты из определения 1 для G ;
- (iii) $\overline{Z(v)} \subset G$, где $Z(v) = \{z \in \mathbb{C} : v(z) = 0\}$.

Тогда $G \in \text{QDWS}$. Более того, если $G \in \text{ND}$, то $G \in \text{QD}$.

Условиям теоремы 2 удовлетворяют, например, области $D'_{a,b} \in \text{ND}$ и $D_{a,b} \in \text{LND} \setminus \text{ND}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для компактного множества $Y \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\hat{Y}$ объединение Y и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus Y$. Пусть $\Gamma \subset G \setminus \hat{K}$ – это такая ломаная со сторонами, параллельными осям координат, что $K \subset \hat{\Gamma}$ и $\overline{Z(v)} \subset \hat{\Gamma}$. Таким образом, функция F голоморфна на Γ . Пусть h – некоторая голоморфная в G функция. Тогда

$$\int_G h(z) dA(z) = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} h(z) \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} h(z) F(z) dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} h(z) \frac{u(z)}{v(z)} dz,$$

причем в предпоследнем равенстве учтено, что равенство (1) в рассматриваемом случае может пониматься как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂G . Определим распределение T с носителем на Γ следующим образом:

$$\langle T | \varphi \rangle := \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{u(z)}{v(z)} dz, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

где Ω – некоторая ограниченная односвязная область, содержащая $\overline{G}$. Тогда для любой функции h , голоморфной в $\overline{G}$, имеет место равенство

$$\int_G h(z) dA(z) = \langle T | h \rangle. \quad (4)$$

Покажем, что это равенство выполнено и для любой функции $g \in L_a^1(G)$. Учитывая то, что пространство $H^\infty(G)$ плотно в $L_a^1(G)$, и применяя теорему Фаррела–Рубеля–Шилдса (см. теорему 5.1 в [13; гл. VI]), найдем последовательность многочленов $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ такую, что $|p_m(z)| \leq |g(z)|$ и $p_m(z) \rightarrow g(z)$ при $m \rightarrow \infty$ для любой точки $z \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_G g(z) dA(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_G p_m(z) dA(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T | p_m \rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} p_m(z) \frac{u(z)}{v(z)} dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} g(z) \frac{u(z)}{v(z)} dz = \langle T | g \rangle, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что (4) выполняется для любой функции класса $L_a^1(G)$. Таким образом, область G является квадратурной областью в широком смысле.

Если G – это неванлинновская область, то $K = \emptyset$ и для любой функции g , голоморфной в области G , интеграл

$$\int_G g(z) \frac{u(z)}{v(z)} dz$$

можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах. Несложно проверить, что этот интеграл будет равен сумме значений функции g и ее производных в точках множества $Z(v)$. Другими словами, это означает, что квадратурное соотношение (4) в рассматриваемом случае будет классическим квадратурным соотношением, а область G – классической квадратурной областью. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 устанавливают связь между неванлинновскими и квадратурными областями в классе ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$. В связи с этим отметим, что определение квадратурной области не предполагает ни ограниченности, ни односвязности. Более того, в [14] показано, что существуют многосвязные квадратурные области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Ю. Федоровский, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610. [2] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98. [3] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, *Selected Topics in Complex Analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, 109–130. [4] М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, *УМН*, **67**:6 (2012), 53–100. [5] К. Ю. Федоровский, *Комплексный анализ и приложения*, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 204–213. [6] А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 3–22. [7] P. Davis, *The Schwarz Function and Its Applications*, Carus Math. Monogr., **17**, Math. Assoc. Amer., Buffalo, NY, 1974. [8] H. S. Shapiro, *The Schwarz Function and Its Generalization to Higher Dimensions*, Univ. Arkansas Lecture Notes Math. Sci., **9**, John Wiley and Sons, New York, 1992. [9] *Quadrature Domains and Their Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **156**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. [10] D. Aharonov, H. S. Shapiro, *J. Analyse Math.*, **30** (1976), 39–73. [11] M. Sakai, *Acta Math.*, **166**:3-4 (1991), 263–297. [12] М. Я. Мазалов, *Матем. заметки*, **62**:4 (1997), 629–632. [13] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973. [14] D. Crowdy, J. Marshall, *SIAM J. Appl. Math.*, **64**:4 (2004), 1334–1359.

Е. В. Боровик

Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана;
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: katrina_borovik@mail.ru

Поступило

11.10.2015

К. Ю. Федоровский

Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана;
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: kfedorovs@yandex.ru