Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Х. Акылжанов, Е. Д. Нурсултанов, М. В. Ружанский,
Неравенства типа Харди–Литтлвуда–Пэли на компактных группах Ли, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 287–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 05:13:20

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Неравенства типа Харди–Литтлвуда–Пэли на компактных группах Ли

Р. Х. Акылжанов, Е. Д. Нурсултанов, М. В. Ружанский

Ключевые слова: Неравенство Харди–Литтлвуда, неравенство Хаусдорфа–Юнга–Пэли, группы Ли, однородные многообразия, мультипликаторы Фурье.

DOI: 10.4213/mzm11052

1. Введение. Цель этой работы – дать необходимые условия, а также достаточные условия для L^p -интегрируемости функции на компактной группе Ли G в терминах ее коэффициентов Фурье. Полученные неравенства могут рассматриваться как некоммутативные версии известных классических неравенств Харди–Литтлвуда и Пэли на окружности $\mathbb{T}$ и на прямой $\mathbb{R}$.

В 1927 г. Харди и Литтлвуд (в работе [1]) показали, что для $1 < p \leq 2$ и $f \in L^p(\mathbb{T})$ выполнено неравенство

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + |m|)^{p-2} |\widehat{f}(m)|^p \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p. \quad (1)$$

В этой заметке мы формулируем аналог этого неравенства на компактных группах Ли. Для мотивации возникающего неравенства мы заменяем неравенство (1) на эквивалентное выражение в терминах пространств Соболева, которое допускает естественное обобщение на компактные группы Ли. Также мы сформулируем более общие неравенства (неравенства Пэли и Хаусдорфа–Юнга–Пэли). Полученные неравенства могут быть использованы для получения оценок для мультипликаторов Фурье из L^p в L^q в терминах операторных символов.

2. Неравенство Харди–Литтлвуда. Заметим, что неравенство Харди–Литтлвуда (1) может быть также сформулировано в следующем виде:

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{T}}(1 - \Delta_{\mathbb{T}})^{(p-2)/(2p)} f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad (2)$$

где $\Delta_{\mathbb{T}}$ – оператор Лапласа, и $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}$ – преобразование Фурье на окружности $\mathbb{T}$. Заменяя $(1 - \Delta_{\mathbb{T}})^{(p-2)/(2p)} f$ на f , мы получаем следующее эквивалентное неравенство:

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq C_p \|(1 - \Delta_{\mathbb{T}})^{(2-p)/(2p)} f\|_{L^p(\mathbb{T})} \equiv C_p \|(1 - \Delta)^{1/p-1/2} f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad 1 < p \leq 2. \quad (3)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке МОН РК (грант № 4080/ГФ). Работа второго автора выполнена при поддержке МОН РК (гранты №№ 3311/ГФ4, 4080/ГФ4). Работа третьего автора выполнена при поддержке EPSRC (грант EP/K039407/1) и Leverhulme (грант RPG-2014-02).

DOI: 10.4213/mzm11052

Пусть теперь G – компактная группа Ли размерности n . Обозначим ее унитарное двойственное пространство через $\hat{G}$. Выбирая базисы в пространствах представлений, мы можем отождествить каждый элемент $\xi \in \hat{G}$ (более точно, его класс эквивалентности) с унитарной матрицей размера $d_\xi \times d_\xi$, т.е. считать, что $\xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^{d_\xi} \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$. По теореме Петера–Вейля система $\{\sqrt{d_\xi} \xi_{ij}\}_{i,j=1}^{d_\xi}$ образует ортонормированный базис в $L^2(G)$ по отношению к нормализованной мере Хаара на G . Для $f \in L^1(G)$ определим ее преобразование Фурье в $\xi \in \hat{G}$ формулой

$$(\mathcal{F}_G f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_G f(x) \xi(x)^* dx \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}, \quad (4)$$

где $\xi(x)^*$ – матрица, комплексно-сопряженная к $\xi(x)$. Это определение также можно естественно распространить на обобщенные функции стандартным способом. Ряд Фурье записывается в виде

$$f(x) = \sum_{\xi \in \hat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}[\hat{f}(\xi) \xi(x)]. \quad (5)$$

Тождество Планшереля на G принимает вид

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{\xi \in \hat{G}} d_\xi \|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^2 =: \|\hat{f}\|_{\ell^2(\hat{G})}^2, \quad (6)$$

где $\|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^2 = \operatorname{Tr}(\hat{f}(\xi) \hat{f}(\xi)^*)$. Таким образом, коэффициенты Фурье функций и обобщенных функций на G принимают значение в пространстве

$$\Sigma = \{\sigma = (\sigma(\xi))_{\xi \in \hat{G}} : \sigma(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}\}. \quad (7)$$

Следуя [2], определим пространства Лебега $\ell^p(\hat{G})$ для последовательностей $\sigma \in \Sigma$ через

$$\|\sigma\|_{\ell^p(\hat{G})} := \left(\sum_{\xi \in \hat{G}} d_\xi^{p(2/p-1/2)} \|\sigma(\xi)\|_{\text{HS}}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (8)$$

а также

$$\|\sigma\|_{\ell^\infty(\hat{G})} := \sup_{\xi \in \hat{G}} d_\xi^{-1/2} \|\sigma(\xi)\|_{\text{HS}}, \quad (9)$$

где $\|\sigma(\xi)\|_{\text{HS}}^2 = \operatorname{Tr}(\sigma(\xi) \sigma(\xi)^*)$. Для этих пространств справедливы неравенства Хаусдорфа–Юнга (см. [2]), т.е.

$$\sum_{\xi \in \hat{G}} d_\xi^{p(2/p-1/2)} (\|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^{p'})^{1/p'} = \|\hat{f}\|_{\ell^{p'}(\hat{G})} = \|f\|_{L^p(G)} \quad \text{для } 1 < p \leq 2, \quad (10)$$

с очевидными модификациями для $p = 1$ и с $1/p + 1/p' = 1$.

Для $\xi \in \hat{G}$ через $\langle \xi \rangle$ обозначим собственное значение оператора $(I - \Delta_G)^{1/2}$, соответствующее представлению $\xi \in \hat{G}$, где Δ_G – оператор Лапласа на G , так что выполнено

$$(I - \Delta_G)^{1/2} \xi_{ij} = \langle \xi \rangle \xi_{ij} \quad \text{для всех } 1 \leq i, j \leq d_\xi.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – компактная группа Ли размерности n . Тогда выполнено следующее.

1. Если $1 < p \leq 2$ и $f \in L^p(G)$, то $\mathcal{F}_G(1 - \Delta_G)^{n(1/2-1/p)} f \in \ell^p(\hat{G})$ и верно

$$\|\mathcal{F}_G(1 - \Delta_G)^{n(1/2-1/p)} f\|_{\ell^p(\hat{G})} \leq C_p \|f\|_{L^p(G)}. \quad (11)$$

Мы также можем переписать это в следующем виде:

$$\sum_{\xi \in \widehat{G}} d_{\xi}^{p(2/p-1/2)} \langle \xi \rangle^{n(p-2)} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^p \leq C_p \|f\|_{L^p(G)}^p. \quad (12)$$

2. Пусть $2 \leq p < \infty$. Если $\{\sigma(\xi)\}_{\xi \in \widehat{G}} \in \Sigma(G)$ есть последовательность комплексных матриц такая, что $\langle \xi \rangle^{n(p-2)} \sigma(\xi)$ принадлежит $\ell^p(\widehat{G})$, то существует функция $f \in L^p(G)$ с коэффициентами Фурье $\widehat{f}(\xi) = \sigma(\xi)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{L^p(G)} \leq C'_p \|\langle \xi \rangle^{n(p-2)/p} \widehat{f}(\xi)\|_{\ell^p(\widehat{G})}. \quad (13)$$

Используя определение нормы в правой части, это неравенство также можно записать следующим образом:

$$\|f\|_{L^p(G)}^p \leq C'_p \sum_{\xi \in \widehat{G}} d_{\xi}^{p(2/p-1/2)} \langle \xi \rangle^{n(p-2)} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^p. \quad (14)$$

При $p = 2$ все эти неравенства сводятся к равенству Планшереля (6).

3. Неравенства Пэли и Хаусдорфа–Юнга–Пэли.

ТЕОРЕМА 2 (Неравенства типа Пэли). Пусть G – компактная группа Ли и $1 < p \leq 2$. Если φ – такая положительная функция на $\widehat{G}$, что величина

$$M_{\varphi} := \sup_{t>0} t \sum_{\substack{\xi \in \widehat{G} \\ \varphi(\xi) \geq t}} d_{\xi}^2 < \infty \quad (15)$$

конечна, то выполнено неравенство

$$\left(\sum_{\xi \in \widehat{G}} d_{\xi}^{p(2/p-1/2)} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^p \varphi(\xi)^{2-p} \right)^{1/p} \lesssim M_{\varphi}^{(2-p)/p} \|f\|_{L^p(G)}. \quad (16)$$

Первая часть теоремы 1 следует из неравенства (16). В этом смысле неравенство Пэли является более общим, нежели неравенство Харди–Литтлвуда.

Проинтерполировав между неравенством типа Пэли (16) в теореме 2 и неравенством Хаусдорфа–Юнга (10), мы получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 3 (Неравенство Хаусдорфа–Юнга–Пэли). Пусть G – компактная группа Ли и $1 < p \leq b \leq p' < \infty$. Если положительная функция $\{\varphi(\xi)\}_{\xi \in \widehat{G}}$, удовлетворяет условию

$$M_{\varphi} := \sup_{t>0} t \sum_{\substack{\xi \in \widehat{G} \\ \varphi(\xi) \geq t}} d_{\xi}^2 < \infty, \quad (17)$$

то верно следующее неравенство:

$$\left(\sum_{\xi \in \widehat{G}} d_{\xi}^{b(1/b-1/2)} (\|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}} \varphi(\xi)^{1/b-1/p'})^b \right)^{1/b} \lesssim M_{\varphi}^{1/b-1/p'} \|f\|_{L^p(G)}. \quad (18)$$

Это неравенство совпадает с неравенством Хаусдорфа–Юнга (10) при $b = p'$ и с неравенством типа Пэли (16), когда $b = p$.

4. L^p - L^q ограниченность операторов. Оператор A называется *лево-инвариантным*, если он коммутирует с левым действием $T_g: f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$ группы Ли, т.е. если выполнено

$$A \circ \{f(x) \mapsto f(g^{-1}x)\} = \{f(x) \mapsto f(g^{-1}x)\} \circ A \quad \text{для всех } g \in G.$$

В этом случае, можно показать, что глобальные матричные символы операторов, введенные в [3], [2], не зависят от пространственной переменной g . Как следствие, такие операторы A могут быть записаны в форме

$$\widehat{A}f(\xi) = \sigma_A(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad (19)$$

с символом $\sigma_A(\xi)$, зависящим только от $\xi \in \widehat{G}$. Для таких операторов в [5] была доказана теорема о мультипликаторах типа Михлина–Хермандера в $L^p(G)$, см. также [4]. В нашем случае, из теоремы 3 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, и предположим, что A есть мультипликатор Фурье на компактной группе Ли G . Тогда верно

$$\|A\|_{L^p(G) \rightarrow L^q(G)} \lesssim \sup_{s>0} s \left(\sum_{\substack{\xi \in \widehat{G} \\ \|\sigma_A(\xi)\|_{\text{op}} > s}} d_\xi^2 \right)^{1/p-1/q}. \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Неравенство (20) точно при $p = q = 2$.

Стандартная модификация доказательства предыдущей теоремы позволяет обобщить ее на случай произвольных, не обязательно инвариантных, операторов.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. Пусть l – целое число такое, что $l > q/(\dim(G))$, и пусть A – линейный непрерывный оператор на $C^\infty(G)$. Тогда верно

$$\|A\|_{L^p(G) \rightarrow L^q(G)} \lesssim \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{u \in G} \sup_{s>0} s \left(\sum_{\substack{\xi \in \widehat{G}, \\ \|\partial_u^\alpha \sigma_A(u, \xi)\|_{\text{op}} \geq s}} d_\xi^2 \right)^{1/p-1/q}. \quad (21)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Math. Ann.*, **97**:1 (1927), 159–209. [2] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries. Background Analysis and Advanced Topics*, Pseudo-Differential Oper. Theory Appl., **2**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. [3] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **11** (2013), 2439–2496. [4] М. В. Ружанский, Й. Вирт, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 87–91. [5] M. Ruzhansky, J. Wirth, *Math. Z.*, **280**:3 (2015), 621–642.

Р. Х. Акылжанов

Imperial College London, Великобритания

E-mail: r.akylzhanov14@imperial.ac.uk

Поступило

10.11.2015

Е. Д. Нурсултанов

Казахстанский филиал

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова, г. Астана;

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва, г. Астана

E-mail: er-nurs@yandex.ru

М. В. Ружанский

Imperial College London, Великобритания

E-mail: m.ruzhansky@imperial.ac.uk