Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Вероятностные пространства Маслова, связанные со статистиками Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 746–759

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:50:16

УДК 519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА МАСЛОВА, СВЯЗАННЫЕ СО СТАТИСТИКАМИ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА И ФЕРМИ–ДИРАКА

А. М. Чеботарёв

В работе описываются вероятностные пространства для систем неразличимых частиц, факторизованные с помощью отношений эквивалентности, отождествляющих конфигурации, отличающиеся перестановками частиц при условиях, что одинаковые состояния либо запрещены (статистика Ферми–Дирака), либо разрешены (статистика Бозе–Эйнштейна). Предполагается, что состояния частиц не являются тождественными и имеют различные вероятности, что соответствует наличию внешнего потенциала либо потенциалам парного или коллективного взаимодействия. Построенные пространства связаны со специальными моделями систем массового обслуживания.

Библиография: 11 названий.

1. Правила вычисления вероятностей распределения чисел заполнения для статистик Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна хорошо известны. Они вытекают из свойств статистических систем [1]–[3]: статистика Максвелла–Больцмана различает частицы, находящиеся в одном состоянии; статистика Бозе–Эйнштейна их не различает, а статистика Ферми–Дирака запрещает более одной частице иметь фиксированное состояние. Например, для системы N частиц с конечным множеством состояний Ω векторы чисел заполнения $\{N_k\}$, $N_k \in \{0, 1, \dots\}$, состояний $\omega_k \in \Omega$ такие, что $\sum N_k = N$, имеют следующие вероятности [4]:

$$P_{MB}(\{N_k\}) = |\Omega|^{-N} \frac{N!}{\prod_k N_k!}, \quad P_{BE}(\{N_k\}) = \left(C_{|\Omega|+N-1}^N \right)^{-1},$$

$$P_{FD}(\{N_k\}) = \left\{ 0, \text{ если } \exists N_k > 1; \left(C_{|\Omega|}^N \right)^{-1}, \text{ если } N_k \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

При выводе этих соотношений предполагается, что все состояния $\omega_k \in \Omega$ *равновероятны* [4]–[7]. В то же время, наличие внешнего потенциала, потенциалов парного или коллективного взаимодействия увеличивает вероятность заполнения состояний, уменьшающих энергию системы. В этом случае каждому состоянию ω_k приписывается вероятность заполнения P_k , которая либо задается априори, либо определяется с помощью уравнений, описывающих взаимодействие частиц с внешним полем или между собой [8], [9].

Пусть $\Omega = \{\omega_k\}$ – конечное или счетное множество, P_k – вероятности элементарных событий ω_k . Обозначим через $\Omega_N = \{\omega_k : \omega_{k_1} \otimes \dots \otimes \omega_{k_N}, k_i \in (1, 2, \dots, N)\}$ – прямое произведение N экземпляров множества Ω , факторизованное относительно группы перестановок индексов $k_1, \dots, k_N$. Поскольку любую последовательность индексов

можно упорядочить с помощью перестановки, мы будем считать что для каждой последовательности *неубывающих* индексов $k_1 \leq \dots \leq k_N$ *элементарными событиями* в $\Omega_N^+ \subset \Omega_N$ являются объединения элементарных событий из Ω_N :

$$\omega = \bigcup_{\pi} \{ \omega_{\pi(k_1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\pi(k_N)} \} \cong \bigotimes_{i=1}^N \omega_{k_i}. \quad (1.2)$$

Запись $\omega \cong \bigotimes_i \omega_{k_i}$ указывает представитель класса эквивалентности ω . Другим естественным представителем класса эквивалентности является вектор чисел заполнения $\{N_k\}$, $\sum N_k = N$, связанный с произведением $\bigotimes_{i=1}^N \omega_{k_i} \cong \{N_k\}$ соотношением $N_k = \sum_i \delta_{k,k_i}$. В дальнейшем изложении мы используем оба эквивалентных представления элементарных событий.

Определим Ω_N^+ как подмножество в $\Omega_N^+ \subseteq \Omega_N$, представленное объединением событий $\omega_{\pi(\mathbf{k})}$ для каждой *возрастающей* последовательности индексов $k_1 < \dots < k_N$. В частности, Ω_N^+ представлено элементарным событием $\omega \cong \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_N$, если $|\Omega| = N$, и не содержит элементарных событий, если $|\Omega| < N$.

В работах [8], [9] используются более общие по сравнению с (1.1) правила вычисления вероятностей и средних значений для симметричных и антисимметричных состояний

$$P^{\pm}(B) = \frac{\sum_k (\psi_k^{\pm}, \hat{P} I_B \psi_k^{\pm})}{\sum_k (\psi_k^{\pm}, \hat{P} \psi_k^{\pm})} = \frac{\text{Tr}_{\pm} \{ \hat{P} I_B \}}{\text{Tr}_{\pm} \hat{P}}, \quad \langle H \rangle_{\pm} = \frac{\text{Tr}_{\pm} \{ \hat{P} H \}}{\text{Tr}_{\pm} \hat{P}}, \quad (1.3)$$

где $I_B(\omega)$ – индикаторная функция измеримого множества B , H – измеримая функция на Ω_N , $\{\psi_k^{\pm}\}$ – симметричная (+) или антисимметричная (–) части некоторого базиса в $l_2(\Omega_N)$, $\hat{P}$ – оператор умножения на функцию распределения вероятностей P_k , действующий в $l_2(\Omega_N)$, $\text{Tr}_{\pm}$ – след по симметричному (+) или антисимметричному (–) базису. Соотношения (1.3) приводят к специальным конструкциям факторизованных произведений (раздел 2) и прямых сумм факторизованных произведений (раздел 3) вероятностных пространств. В разделе 4 выводятся простые формулы для средних значений конечномерных функционалов, обобщающие формулы для средних чисел заполнения для статистик Бозе и Ферми.

2. Пусть $\Sigma_N^{\pm}$ – алгебры подмножеств в $\Omega_N^{\pm}$, порождаемые элементарными событиями (1.2). Относительно σ -алгебр $\Sigma_N^{\pm}$ измеримы лишь функции, инвариантные относительно перестановок аргументов, однако именно такими функциями являются корреляционные функции, гамильтонианы и статистические суммы многочастичных систем. отождествляя с элементарным событием “минимальный” или “монотонный” представитель класса эквивалентности, мы получаем простое правило разложения событий на элементарные. Пусть $B \in \Sigma_N^+$. Положим

$$k_{1,l} = \min\{i_1 : \omega_{i_1} \otimes \omega_{i_2} \otimes \dots \in B^{(l)}\}, \quad k_{2,l} = \min\{i_2 : \omega_{k_{1,l}} \otimes \omega_{i_2} \otimes \dots \in B^{(l)}\}, \quad \dots, \\ \omega^{(l)} \cong \omega_{k_{1,l}} \otimes \omega_{k_{2,l}} \otimes \dots, \quad B^{(l+1)} = B^{(l)} \setminus \omega^{(l)}, \quad B = \bigcup_l \omega^{(l)}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

где $N_i^{(l)} = \sum_m \delta_{i,k_{m,l}}$ – числа заполнения i -го состояния в l -й элементарной составляющей события B . Тогда

$$B = \bigcup_l \omega^{(l)}, \quad P(B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l P(\omega^{(l)}). \quad (2.2)$$

Это правило применимо также к событиям из фермиевской σ -алгебры $\Sigma_N^- \subset \Sigma_N^+$. Пусть $\{P_k\}$ – распределение вероятностей на Ω . Примером является функция $P_k = C_\Omega \times e^{-E_k - \sum_{j \neq k} V_{k,j}}$, где C_Ω – нормировочная постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вероятности элементарных событий $\omega = \bigotimes_i \omega_{k_i}$ из $\Omega_N^\pm$ вычисляются по формулам

$$P_N^+(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\prod_{i=1}^N P_{k_i}}{\sum_{k_1 \leq \dots \leq k_N} \prod_{i=1}^N P_{k_i}}, \quad P_N^-(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\prod_{i=1}^N P_{k_i}}{\sum_{k_1 < \dots < k_N} \prod_{i=1}^N P_{k_i}}, \quad (2.3)$$

которые в представлении векторов заполнения $\{N_l\}$ имеют вид

$$P_N^\pm(\omega) = \frac{\prod_{l=1}^{|\Omega|} P_l^{N_l}}{\sum_{\{N_l\} \in \Sigma_N^\pm, \sum N_l = N} \prod_{l=1}^{|\Omega|} P_l^{N_l}}.$$

Обозначим через $\Gamma_\Omega^\pm(N)$ нормирующие множители (имеющие смысл статистических весов [3]) в формулах (2.3) для вероятностей элементарных событий:

$$\Gamma_\Omega^-(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1 < \dots < k_N} \prod_{i=1}^N P_{k_i}, \quad \Gamma_\Omega^+(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_N} \prod_{i=1}^N P_{k_i}. \quad (2.4)$$

Для любой конечной или абсолютно сходящейся последовательности $\{\lambda_k\}$ мы называем произведение $\prod_k (1 + \alpha \lambda_k)$ *обобщенным биномом* и $\prod_k (1 - \alpha \lambda_k)^{-1}$ – *обобщенным обратным биномом*. Поскольку $\sum_k P_k = 1$ и

$$\prod_k (1 + \alpha P_k) \leq \prod_k (1 - \alpha P_k)^{-1} \leq (1 - \alpha)^{-1}$$

при $0 \leq \alpha < 1$, произведения $\prod_{k=1}^\infty (1 \pm \alpha P_k)^{\pm 1}$ являются аналитическими функциями параметра α в круге единичного радиуса.

ЛЕММА 1. *Имеют место представления статистических весов*

$$\Gamma_\Omega^\pm(N) = \frac{1}{N!} \frac{d^N}{d\alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_k)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.5)$$

В частности, если $P_k = |\Omega|^{-1}$, то $\Gamma_\Omega^+(N) = |\Omega|^{-N} C_{|\Omega|+N-1}^N$ и $\Gamma_\Omega^-(N) = \{0, \text{ если } N > |\Omega|; |\Omega|^{-N} C_{|\Omega|}^N, \text{ если } N \leq |\Omega|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правые части формулы (2.5) содержат суммы всевозможных произведений $\prod_{i=1}^N P_{k_i}$ с неубывающими (+) или возрастающими (–) индексами k_i . Используя формулу дифференцирования произведения, находим, что коэффициент при $\prod_{i=1}^m P_{k_i}^{n_i}$ равен $(N!)^{-1} C_{N^{n_1} \dots n_m}^{n_1! \dots n_m!} = 1$ в случае (+), а в случае (–) коэффициент при $\prod_{i=1}^m P_{k_i}$ в правой части (2.5) равен $(N!)^{-1} \frac{d^N}{d\alpha^N} \alpha^N = 1$, что в обоих случаях дает соответствующую сумму (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество всех элементарных событий из $\Omega_N^\pm$ распадается на подмножества событий, содержащих сомножитель ω_k и не содержащих его. Поэтому имеют место следующие формулы разложения полной вероятности:

$$\Gamma_\Omega^-(N) = P_k \Gamma_{\Omega \setminus \{\omega_k\}}^-(N-1) + \Gamma_{\Omega \setminus \{\omega_k\}}^-(N) = \sum_{n=0}^1 P_k^n \Gamma_{\Omega \setminus \{\omega_k\}}^-(N-n),$$

$$\Gamma_\Omega^+(N) = P_k \Gamma_\Omega^+(N-1) + \Gamma_{\Omega \setminus \{\omega_k\}}^+(N) = \sum_{n=0}^N P_k^n \Gamma_{\Omega \setminus \{\omega_k\}}^+(N-n).$$

Любая функция, зависящая от конечного числа дискретных аргументов, может быть представлена в виде суммы произведений функций одного аргумента. Более точно,

$$g_{k_1, \dots, k_n} = |\Omega|^{-n/2} \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{|\Omega|-1} \exp \left\{ \frac{2\pi i \sum_{j=1}^n k_j m_j}{|\Omega|} \right\} \tilde{g}_{m_1, \dots, m_n},$$

где $\tilde{g}_{m_1, \dots, m_n}$ – дискретное преобразование Фурье функции $g_{k_1, \dots, k_n}$. Поэтому задача вычисления математического ожидания функционалов вида

$$g_n(\omega) = \sum_{\{l_j\} \subset L_n^\pm(\omega)} g_{l_1, \dots, l_n}$$

сводится к задаче вычисления средних значений мультипликативных функционалов

$$G_n(\omega) = \sum_{\{l_j\} \subset L_n^\pm(\omega)} \prod_{j=1}^n g_{l_j}, \quad (2.6)$$

где $\omega = \omega_{k_1} \otimes \dots \otimes \omega_{k_N}$; множество $L_n^\pm(\omega)$ состоит из всех подмножеств длины n для всех перестановок множества $\{k_i\}$: $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$, а $L_n^-(\omega)$ является подмножеством $L_n^+(\omega)$, не содержащим точек диагоналей.

В формуле (2.6) удобно перейти к представлению чисел заполнения. Пусть $1 \leq k \leq |\Omega|$ и $N_k = N_k(\omega)$ – числа заполнения состояния ω_k для траектории ω , а $L_k = L_k(\omega, \{l_j\})$ – числа заполнения состояния ω_k для траектории $\omega_{l_1} \otimes \dots \otimes \omega_{l_n}$, являющейся подмножеством траектории ω . Таким образом, $\sum N_k = N$, $\sum L_k = n$, $L_k \leq N_k$, причем в фермиевском случае $L_k, N_k \in \{0, 1\}$.

Поскольку L_k одинаковых элементов можно разместить $N_k!/(N_k - L_k)!$ способами на N_k местах, то функционал (2.6) в представлении чисел заполнения имеет вид

$$G_n(\omega) = \sum_{0 \leq L_k \leq N_k} \prod_{k=1}^{|\Omega|} g_k^{L_k} \frac{N_k!}{(N_k - L_k)!}, \quad \sum N_k = N, \quad \sum L_k = n, \quad (2.7)$$

где в фермиевском случае $0 \leq L_k \leq N_k \leq 1$ и поэтому $N_k!/(N_k - L_k)! = 1$.

Рассмотрим среднее значение функционала (2.6)

$$\langle G_n \rangle_\pm = \sum_{\omega \in \Omega_N^\pm} P_N^\pm(\omega) G_n(\omega) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(N)} \sum_{\omega \in \Omega_N^\pm} \sum_{\{l_j\} \in L_n^\pm(\omega)} g_{l_j} \prod_{m=1}^N P_{k_m}$$

и перейдем к представлению (2.7) чисел заполнения:

$$\langle G_n \rangle_{\pm} = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(N)} \sum_{\{N_k\}} \sum_{0 \leq L_k \leq N_k} \prod_{k=1}^{|\Omega|} P_k^{N_k} g_k^{L_k} \frac{N_k!}{(N_k - L_k)!}, \quad \sum N_k = N, \quad \sum L_k = n, \quad (2.8)$$

где в фермиевском случае $L_k, N_k \in \{0, 1\}$ и $N_k!/(N_k - L_k)! = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Среднее значение функционала $g_n(\omega)$ относительно вероятностной меры (2.3) равно*

$$\langle g_n \rangle_{\pm} = \frac{1}{(N-n)! \Gamma_{\Omega}^{\pm}(N)} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \sum_{\{l_j\} \in L_n^{\pm}} g_{l_1 \dots l_n} \prod_{i \in I_n} \frac{P_{l_j}}{1 \mp \alpha P_{l_j}} \right\} \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.9)$$

где $L_n^+ = \{l_1, \dots, l_n : 1 \leq l_j \leq |\Omega|\}$ и $L_n^- = \{l_1, \dots, l_n : 1 \leq l_j \leq |\Omega|, l_i \neq l_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания о представлении любого дискретного функционала в виде суммы мультипликативных функционалов достаточно ограничиться мультипликативными функционалами вида (2.6). Рассмотрим случай статистики Бозе.

Пусть L_k число заполнения состояния ω_k для траектории $\omega_{l_1} \otimes \dots \otimes \omega_{l_n}$. Учитывая, что L_k элементов размещаются на L_k местах $L_k!$ способами, перейдем в формуле (2.9) к представлению чисел заполнения:

$$\langle g_n \rangle_+ = \frac{1}{(N-n)! \Gamma_{\Omega}^+(N)} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \left\{ \sum_{\sum L_k = n} \prod_{k=1}^{|\Omega|} \frac{(g_k P_k)^{L_k} L_k!}{(1 - \alpha P_k)^{L_k+1}} \right\} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.10)$$

Теперь, используя формулу дифференцирования произведения

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \prod_k f_k(\alpha) = \sum_{m_1, m_2, \dots} C_m^{m_1 m_2 \dots} \prod_{\sum m_k = m} \frac{d^{m_k}}{d\alpha^{m_k}} f_k(\alpha),$$

где $C_m^{m_1 m_2 \dots} = m!/(m_1! m_2! \dots)$, $\sum m_k = m$, получаем из (2.9):

$$\begin{aligned} \langle g_n \rangle_+ &= \frac{1}{(N-n)! \Gamma_{\Omega}^+(N)} \sum_{\sum M_k = N-n, \sum L_k = n} C_{N-n}^{M_1 M_2 \dots} \prod_{k=1}^{|\Omega|} g_k^{L_k} P_k^{L_k + M_k} (L_k + M_k)! \\ &= \sum_{\{N_k\}} \sum_{0 \leq L_k \leq N_k, \sum L_k = n} \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^+(N)} \prod_{k=1}^{|\Omega|} g_k^{L_k} P_k^{L_k + M_k} \frac{N_k!}{(N_k - L_k)!}, \end{aligned}$$

где $N_k = L_k + M_k$. Нетрудно видеть, что последняя формула совпадает с (2.8).

В фермиевском случае доказательство упрощается, поскольку $L_k, N_k \in \{0, 1\}$ и $N_k!/(N_k - L_k)! = 1$:

$$\begin{aligned} \langle g_n \rangle_- &= \frac{1}{(N-n)! \Gamma_{\Omega}^-(N)} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \left\{ \sum_{\{L_k\}} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (g_k P_k)^{L_k} (1 + \alpha P_k)^{1-L_k} \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^-(N)} \sum_{\{N_k\}, \{L_k\}} \prod_{k=1}^{|\Omega|} g_k^{L_k} P_k^{N_k}, \quad \sum L_k = n, \end{aligned}$$

что также совпадает с (2.8). Теорема доказана.

3. Для произвольной ограниченной функции $B_N : \Omega_N \rightarrow \mathbb{C}$ среднее значение $\langle B_N \rangle_{\pm}$ равно:

$$\langle B_N \rangle_{\pm} = \sum_{\omega \in \Omega_N^{\pm}} B_N(\omega) P_N^{\pm}(\omega). \quad (3.1)$$

Формулы (3.1) имеют следующую операторную интерпретацию. Рассмотрим множество ограниченных функций на Ω_N с естественной нормой. Для распределения вероятностей $P_{k_1, \dots, k_N}$ на Ω_N оператор умножения $(\hat{P}_N B_N)(\{k_1, \dots, k_N\}) = P_{k_1, \dots, k_N} \times B_N(\{k_1, \dots, k_N\})$ является аналогом оператора с конечным следом, а оператор умножения на ограниченную функцию B – ограниченным оператором в $l_2(\Omega_N)$. Обозначим через $\delta_{i_1, \dots, i_N}(k_1, \dots, k_N)$ функцию, равную единице при $\{k_1, \dots, k_N\} = \{i_1, \dots, i_N\}$ и нулю в противном случае. Пусть $\{i_1, \dots, i_N\}$ – неубывающая последовательность индексов, т.е. номер элементарного события из $\Omega_N^{\pm}$. Рассмотрим функции из $l_2(\Omega_N)$

$$e_{i_1, \dots, i_N}^{+}(k_1, \dots, k_N) = \sum_{\pi} \frac{\delta_{i_1, \dots, i_N}(\pi(k_1, \dots, k_N))}{n_{+}(i_1, \dots, i_N)}, \quad (3.2)$$

$$e_{i_1, \dots, i_N}^{-}(k_1, \dots, k_N) = \sum_{\pi} \frac{\delta_{i_1, \dots, i_N}(\pi(k_1, \dots, k_N))(-1)^{\text{Odd}(\pi)}}{n_{-}(i_1, \dots, i_N)}, \quad (3.3)$$

где π – перестановка индексов, а $\text{Odd}(\pi)$ – ее четность. Нормирующие множители $n_{+}(i_1, \dots, i_N)$ и $n_{-}(i_1, \dots, i_N)$ в $l_2(\Omega_N)$ вычисляются ниже.

Симметричные и антисимметричные базисные функции, зависящие от одного и того же набора индексов $i_1, \dots, i_N$, ортогональны по определению антисимметричной перестановки. Если же наборы индексов различны, то все произведения тождественно равны нулю. По этой причине равны нулю все слагаемые в произведениях симметричных (или антисимметричных) базисных функций, отвечающих различным наборам индексов $i_1, \dots, i_N$. Таким образом, функции (3.2), (3.3) образуют ортонормированную систему в $l_2(\Omega_N)$.

Поскольку антисимметричные функции (3.3) отличны от нуля только для возрастающих последовательностей индексов $i_1, \dots, i_N$, среди перестановок в правой части формулы (3.3) от нуля отлична лишь та, для которой последовательность $\pi(k_1, \dots, k_N)$ равна $i_1, \dots, i_N$. Поэтому $n_{-}(i_1, \dots, i_N) = 1$. Для функций симметричного базиса каждое подмножество N_l одинаковых индексов $i_{j_1} = \dots = i_{j_l}$ увеличивает норму в $N_l!$ раз, $N_l = \sum_{k=1}^N \delta_{l, i_k}$. Таким образом, квадрат нормирующего множителя равен числу перестановок, не изменяющих набор индексов $i_1, \dots, i_N$:

$$n_{+}^2(i_1, \dots, i_N) = \prod_{l=1}^{|\Omega|} \left(\sum_{k=1}^N \delta_{l, i_k} \right)! = \prod_{l=1}^{|\Omega|} N_l!.$$

Из леммы 2.1 следует, что в случае конечного множества Ω размерность базиса антисимметричных состояний равна

$$|\Omega_N^{-}| = \sum_{k_1 < \dots < k_N \leq |\Omega|} 1 = \frac{1}{N!} \frac{d^N}{d\alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 + \alpha) \Big|_{\alpha=0} = \frac{|\Omega|!}{N!(|\Omega| - N)!} = C_{|\Omega|}^N.$$

Размерность базиса симметричных состояний вычисляется аналогично:

$$|\Omega_N^+| = \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_N \leq |\Omega|} 1 = \frac{1}{N!} \frac{d^N}{d\alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 - \alpha)^{-1} \Big|_{\alpha=0} = \frac{(|\Omega| + N - 1)!}{N!(|\Omega| - 1)!} = C_{|\Omega|+N-1}^N.$$

Таким образом, имеет место

ЛЕММА 2. *Пространство $l_2(\Omega_N)$ распадается на три ортогональных подпространства*

$$l_2(\Omega_N) = l_2(\Omega_N^+) \oplus l_2(\Omega_N^-) \oplus l_2(\Omega_N^{\text{mix}})$$

размерности $\mathcal{N}_S = C_{|\Omega|+N-1}^N$, $\mathcal{N}_A = C_{|\Omega|}^N$ и $\mathcal{N}_{\text{mix}} = |\Omega|^N - C_{|\Omega|+N-1}^N - C_{|\Omega|}^N$ соответственно.

Заметим, что имеют место тождества

$$\frac{(|\Omega| - N)!}{|\Omega|!} \sum_{k_i \neq k_j} f(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{|\Omega_N^-|} \sum_{k_1 < \dots < k_N} \frac{1}{N!} \sum_{\pi} f(\pi(k_1, \dots, k_N)). \quad (3.4)$$

Поэтому из (3.1), (3.4) и определения частичного следа по антисимметричному базису следует:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_- \{ \hat{P}_N B_N \} &= \sum_{i_1 < \dots < i_N} \sum_{k_i \neq k_j} P_N B_N(\{k_1, \dots, k_N\}) |e_{i_1, \dots, i_N}^-(k_1, \dots, k_N)|^2 \\ &= \sum_{k_i \neq k_j} P_N B_N(k_1, \dots, k_N) = N! \sum_{i_1 < \dots < i_N} \{P_N B_N\}_{\text{Sym}}(i_1, \dots, i_N), \end{aligned}$$

где $F_{\text{Sym}}(i_1, \dots, i_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\pi} F(\pi(i_1, \dots, i_N))$. В случае $B_N = 1$ с точностью до $N!$ получаем нормировочный множитель $\Gamma_{\Omega}^-(N)$. Таким образом,

$$\langle B_N \rangle_- = \frac{\text{Tr}_- \{ \hat{P}_N B_N \}}{\text{Tr}_- \hat{P}_N}.$$

Число перестановок π таких, что $\pi(k_1, \dots, k_N) = (i_1, \dots, i_N)$, равно нулю либо $n_+(i_1, \dots, i_N)$. В последнем случае существует перестановка π^* такая, что $(k_1, \dots, k_N) = \pi^*(i_1, \dots, i_N)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Tr}_+ \{ \hat{P}_N B_N \} &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_N} \sum_{k_1, \dots, k_N} P_N B_N(k_1, \dots, k_N) |e_{i_1, \dots, i_N}^+(k_1, \dots, k_N)|^2 \\ &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_N} \sum_{k_1, \dots, k_N} P_N B_N(k_1, \dots, k_N) \frac{|\sum_{\pi} \delta_{i_1, \dots, i_N}(\pi(k_1, \dots, k_N))|^2}{n_+(i_1, \dots, i_N)} \\ &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_N} \sum_{\pi^*} P_N B_N(\pi^*(i_1, \dots, i_N)) \\ &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_N} N! \{P_N B_N\}_{\text{Sym}}(i_1, \dots, i_N), \end{aligned}$$

что с точностью до $N!$ дает нормировочный множитель $\Gamma_{\Omega}^+(N)$ при $B_N = 1$. Следовательно, $\langle B_N \rangle_+ = \text{Tr}_+ \{ \hat{P}_N B_N \} / \text{Tr}_+ \hat{P}_N$, что завершает доказательство формул (1.3). Более точно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Среднее значение любой Σ_N^+ -измеримой функции $B: \Omega_N \rightarrow C$ относительно вероятностных мер $P_N^\pm$ равно

$$\langle B \rangle_\pm = \sum_{\omega \in \Omega_N^\pm} B(\omega) P_N^\pm(\omega) = \frac{\text{Tr}_\pm \{\widehat{P}B\}}{\text{Tr}_\pm \{\widehat{P}\}}.$$

ПРИМЕР 1. Пусть

$$\beta_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_{k_i} \quad \text{и} \quad \varphi_N(\omega) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j}^N f_{k_i, k_j},$$

где $\omega = \bigotimes_{i=1}^N \omega_{k_i}$. Очевидно, что функции β_N и φ_N Ω_N^- -измеримы. Вычислим $\langle \beta_N \rangle_\pm$. По определению среднего значения имеем

$$\langle \beta_N \rangle_- = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^-(N)} \sum_{k_1 < \dots < k_N} \left(\prod_{i=1}^N P_{k_i} \right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_{k_i}.$$

Теперь, используя формулу (2.9), получим

$$\langle \beta_N \rangle_- = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^-(N) N!} \frac{d^{N-1}}{d\alpha^{N-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 + \alpha P_j) \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{b_k P_k}{1 + \alpha P_k} \right\} \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.5)$$

Аналогично доказывается, что для бозевского случая

$$\langle \beta_N \rangle_+ = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^+(N) N!} \frac{d^{N-1}}{d\alpha^{N-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 - \alpha P_j)^{-1} \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{b_k P_k}{1 - \alpha P_k} \right\} \Big|_{\alpha=0}.$$

С помощью тождества

$$\frac{d}{d\alpha} \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} = \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{P_k}{1 \mp \alpha P_k} \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1}$$

легко убедиться, что $\langle 1 \rangle_\pm = 1$.

Для функционала $\varphi_N(\omega)$ формула (2.9) дает следующее разложение среднего значения:

$$\langle \varphi_N \rangle_\pm = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^\pm(N) N!} \frac{d^{N-2}}{d\alpha^{N-2}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \sum_{k \neq m}^{|\Omega|} \frac{f_{k,m} P_k P_m}{(1 \mp \alpha P_k)(1 \mp \alpha P_m)} \right\} \Big|_{\alpha=0}.$$

В случае $\beta_N(\omega) = \sum_{i=1}^N b_{k_i}$ и $\varphi_N(\omega) = \sum_{i \neq j}^N f_{k_i, k_j}$ имеем:

$$\langle \beta_N \rangle_\pm = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^\pm(N) (N-1)!} \frac{d^{N-1}}{d\alpha^{N-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{b_k P_k}{(1 \mp \alpha P_k)} \right\} \Big|_{\alpha=0}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_N \rangle_\pm &= \frac{1}{\Gamma_{\Omega}^\pm(N) (N-2)!} \frac{d^{N-2}}{d\alpha^{N-2}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k \neq m}^{|\Omega|} \frac{f_{k,m} P_k P_m}{(1 \mp \alpha P_k)(1 \mp \alpha P_m)} \right\} \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формулы (3.6), (3.7) используются ниже для вычисления средних значений функционалов в прямых суммах произведений вероятностных пространств, введенных в разделе 2.

4. Пусть $P_k = P(\omega_k)$ – вероятностная мера на Ω и $\Omega_N^\pm$ – введенные выше фактор-подпространства прямого произведения Ω_N . Рассмотрим прямые суммы множеств элементарных событий $\omega \cong (\{\emptyset\}, \{\omega_{i_{11}}\}, \{\omega_{i_{21}} \otimes \omega_{i_{22}}\}, \dots) = \{\{\emptyset\}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots\}$, $\omega_{i_{mn}} \in \Omega$, $\omega^{(N)} \in \Omega_N$, $\Omega^\pm = \oplus_{N=0}^\infty \Omega_N^\pm$. Состояние $\{\emptyset, \emptyset, \dots\}$ называется *вакуумным*, его вероятность равна p_0 .

Пусть вероятностная мера элементарных событий на $\Omega^\pm$ задается формулами [8], [9]

$$\begin{aligned} P^\pm(\omega) &= p_0 \sum_{N=0}^\infty z_\pm^N \prod_{k=1}^N P_{i_{k,N}} \\ &= p_0 \sum_{N=1}^\infty z_\pm^N \Gamma_\Omega^\pm(N) P_N^\pm(\omega^{(N)}), \quad i_{1,N} \leq i_{2,N} \leq \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где вероятность вакуумного состояния p_0 и постоянные $z_\pm$ выбираются из условия нормировки $\sum_{\omega \in \Omega^\pm} P^\pm(\omega) = 1$ и условия на среднее значение числа частиц $\langle N \rangle_\pm = \sum_1^\infty N \pi_N^\pm$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\omega \in \Omega^\pm} P^\pm(\omega) = p_0 \sum_{N=0}^\infty z_\pm^N \Gamma_\Omega^\pm(N) = p_0 \sum_{N=0}^\infty \frac{z_\pm^N}{N!} \frac{d^N}{d\alpha^N} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_k)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 e^{z_\pm \frac{d}{d\alpha}} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_k)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0} = p_0 \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_\pm P_k)^{\mp 1}, \\ \langle N \rangle_\pm &= \sum_1^\infty N \pi_N^\pm = p_0 \sum_{N=1}^\infty N z_\pm^N \Gamma_\Omega^\pm(N) = z_\pm p_0 \frac{d}{dz_\pm} \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_\pm P_k)^{\mp 1}. \end{aligned}$$

В случае статистики Ферми условие $|\Omega| \geq N$ выполняется автоматически. Отсюда получаем неявные уравнения относительно $z_\pm$ и p_0 :

$$\langle N \rangle_\pm = \sum_{k=1}^{|\Omega|} ((z_\pm P_k)^{-1} \mp 1)^{-1}, \quad p_0 = \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_\pm P_k)^{\pm 1}. \quad (4.2)$$

Поскольку функции $z P_k / (1 \mp z P_k)$ являются монотонными по z , первое уравнение (4.2) имеет единственное решение $z_- \in [0, \infty)$ при $\langle N \rangle_- \leq 1$ и $z_+ \in [0, 1/\max P_k)$ при $\langle N \rangle_+ \geq 1$, которые определяют $z_\pm$ однозначно. В частности, если $P_k = |\Omega|^{-1}$, то уравнения относительно $z_\pm$ имеют вид

$$p_0 = (1 \mp z_\pm / |\Omega|)^{\pm |\Omega|}, \quad z_\pm = \pm |\Omega| \langle N \rangle_\pm^{-1} \mp 1,$$

что при $|\Omega| \rightarrow \infty$ в обоих случаях дает $z_\pm = -\ln p_0$. Распределения $\{\pi_N^\pm\}$, $\pi_N^\pm = p_0 z_\pm^N \Gamma_\Omega^\pm(N)$, называются *обобщенными биномиальными распределениями*. Они имеют смысл вероятностей N -частичных состояний.

Заметим, что слагаемые $\langle N_k \rangle_{\pm} = ((z_{\pm} P_k)^{-1} \mp 1)^{-1}$ в сумме (4.2) имеют смысл средних значений чисел заполнения состояний ω_k в ансамбле с переменным числом частиц. Действительно, учитывая, что

$$N_k \prod_{j=1}^{|\Omega|} P_j^{N_j} = P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \prod_{j=1}^{|\Omega|} P_j^{N_j},$$

можно переписать формулу для средних $\langle N_k \rangle_{\pm}$ в указанном выше виде:

$$\begin{aligned} \langle N_k \rangle_{\pm} &= p_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z_{\pm}^N}{N!} P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \frac{\partial^N}{\partial \alpha^N} \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 P_k \frac{\partial}{\partial P_k} \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_{\pm} P_j)^{\mp 1} = ((z_{\pm} P_k)^{-1} \mp 1)^{-1}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Если $|\Omega| = 1$, то $P_k = 1$ и $z_{\pm} = \pm(1 - p_0^{\pm 1})$. В частности, если

$$p_0 = \left(1 \mp e^{-\frac{E-\mu}{\theta}}\right)^{\pm 1},$$

то $z_{\pm} = \exp\{-(E - \mu)/\theta\}$, $\pi_N^{\pm} = p_0 z_{\pm}^N$ и среднее значение чисел заполнения для статистик Бозе и Ферми равно

$$\langle N \rangle_{\pm} = p_0 \sum_0^{\infty} z_{\pm}^N N = \left(e^{\frac{E-\mu}{\theta}} \mp 1\right)^{-1}$$

(см. [3, глава V]). Этот случай соответствует системе невзаимодействующих Бозе или Ферми частиц. Энтропия такой системы вычисляется явно:

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{N=0}^{\infty} \pi_N^{\pm} \log \pi_N^{\pm} = -p_0 \sum_{N=0}^{\infty} z_{\pm}^N (\log z_{\pm}^N + \log p_0) = -\langle N \rangle_{\pm} \log z_{\pm} - \log p_0 \\ &= \frac{E - \mu}{\theta} \left(e^{\frac{E-\mu}{\theta}} \mp 1\right)^{-1} \mp \log \left(1 \mp e^{-\frac{E-\mu}{\theta}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку функция $x/(e^x - 1) + \log(e^x/(e^x - 1))$ монотонно убывает, в бозевском случае ($\mu \geq 0$) энтропия достигает максимума при $\mu = 0$, что соответствует эргодическому состоянию системы. Учитывая, что в бозевском случае число различных состояний трехмерных квантовых осцилляторов, заполняющих единичный пространственный объем и объем по энергиям $\{E = \hbar\omega, \omega \in \Delta\} \subseteq \mathbb{R}_+$, равно $\int_{\Delta} \omega^2 d\omega/(\pi^2 c^2)$, получаем формулу Планка для средней энергии равновесного излучения в диапазоне $\hbar\Delta$:

$$\langle E \rangle|_{E \in \hbar\Delta} = \int_{\Delta} \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/\theta} - 1)}.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим формулы для средних относительно вероятностных мер $P^\pm$. Пусть $\omega = \{\omega^{(N)}\}_1^\infty$ и $B(\omega) = \{\beta_N(\omega^{(N)})\}$, $F(\omega) = \{\varphi_N(\omega^{(N)})\}$, где $\beta_N(\cdot)$ и $\varphi_N(\cdot)$ – функции, определенные в примере 1. Тогда из формул (3.6), (4.2) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_\pm &= p_0 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{z_\pm^{(N-1)}}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{d\alpha^{N-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{b_k P_k z_\pm}{(1 \mp \alpha P_k)} \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_\pm P_j)^{\mp 1} \sum_{k=1}^{|\Omega|} \frac{b_k}{(z_\pm P_k)^{-1} \mp 1} = \sum_{k=1}^{|\Omega|} b_k \langle N_k \rangle_\pm. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналогично, для функционала $F(\omega)$ получаем из (3.7), (4.2) явные формулы для средних значений (см. [9]):

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_\pm &= p_0 \sum_{N=2}^{\infty} \frac{z_\pm^{(N-2)}}{(N-2)!} \frac{d^{N-2}}{d\alpha^{N-2}} \left\{ \prod_{j=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_j)^{\mp 1} \sum_{k \neq m}^{|\Omega|} \frac{f_{k,m} P_k P_m z_\pm^2}{(1 \mp \alpha P_k)(1 \mp \alpha P_m)} \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k \neq m}^{|\Omega|} \frac{f_{k,m}}{((z_\pm P_k)^{-1} \mp 1)((z_\pm P_m)^{-1} \mp 1)} = \sum_{k \neq m}^{|\Omega|} f_{k,m} \langle N_k \rangle_\pm \langle N_m \rangle_\pm. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В работах [8], [9] В. П. Маслов использовал основные свойства вероятностных пространств $(\Omega^\pm, \Sigma^\pm, P^\pm)$, вывел предельные формулы для средних значений (4.3), (4.4) на решетках при $|\Omega| \rightarrow \infty$ и получил самосогласованные уравнения для предельных вероятностей $P(x)$. Поэтому пространства $(\Omega^\pm, \Sigma^\pm, P^\pm)$ с условиями нормировки (4.2) мы называем *симметричным (+) и антисимметричным (–) вероятностными пространствами Маслова*. Важным свойством соответствующих вероятностных мер является возможность явного вычисления средних значений для широкого класса функционалов. В частности, для произвольного симметричного конечномерного функционала имеет место следующая теорема о среднем, обобщающая формулы Планка для распределения спектра излучения абсолютно черного тела [10].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\Omega^\pm, \Sigma^\pm, P^\pm\}$ – вероятностные пространства Маслова,

$$G_n(\omega) = \{G_n(\omega^{(N)})\},$$

$\omega = \{\omega^{(N)}\}_0^\infty$, где $G_n(\omega^{(N)}) = \sum_{\{l_j\} \in L_n^\pm(\omega^{(N)})} G_{l_1, \dots, l_n}$, $\omega^{(N)} = \omega_{k_1}^{(N)} \otimes \dots \otimes \omega_{k_N}^{(N)}$, множество $L_n^\pm(\omega^{(N)}) = \{l_1, \dots, l_n\}$, где $\sum l_j = n$, состоит из всех перестановок подмножеств длины n множества $\{k_i\}$: $k_1 \leq \dots \leq k_N$ в бозевском случае либо $\{k_i\}$: $k_1 < \dots < k_N$ в фермиевском.

Если известны средние значения $\langle G \rangle_\pm$, то симметричные и антисимметричные средние функционала G_n не зависят от p_0 и соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle G \rangle_\pm &= \sum_{\{l_i\} \in L_n^\pm} G_{l_1, \dots, l_n} \prod_{j=1}^n \langle N_{l_j} \rangle_\pm, \\ z_\pm : \langle N \rangle_\pm &= \sum_{k=1}^{|\Omega|} \langle N_{l_j} \rangle_\pm = \sum_{k=1}^{|\Omega|} ((z_\pm P_k)^{-1} \mp 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $L_n^+ = \{l_1, \dots, l_n : 1 \leq l_j \leq |\Omega|\}$ и $L_n^- = \{l_1, \dots, l_n : 1 \leq l_j \leq |\Omega|, l_i \neq l_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Средние значения функционала G вычисляются с помощью теоремы 1:

$$\begin{aligned} \langle G \rangle_{\pm} &= p_0 \sum_{N=n}^{\infty} \frac{z_{\pm}^{(N-n)}}{(N-n)!} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \left\{ \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_k)^{\mp 1} \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\{l_j\} \in L_n^{\pm}} G_{l_1, \dots, l_n} z_{\pm}^n \frac{P_{l_1}}{1 \mp \alpha P_{l_1}} \cdots \frac{P_{l_n}}{1 \mp \alpha P_{l_n}} \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= p_0 \prod_{k=1}^{|\Omega|} (1 \mp z_{\pm} P_k)^{\mp 1} \sum_{\{l_j\} \in L_n^{\pm}} \frac{G_{l_1, \dots, l_n}}{((z_{\pm} P_{l_1})^{-1} \mp 1) \cdots ((z_{\pm} P_{l_n})^{-1} \mp 1)}. \end{aligned}$$

Теперь второе из условий нормировки (4.2) и определения средних чисел заполнения $\langle N_k \rangle_{\pm}$ дают утверждение (4.5) теоремы.

Результат теоремы 3 косвенно указывает на следующий факт.

ТЕОРЕМА 4. В вероятностных пространствах Маслова числа заполнения состояний N_k являются независимыми случайными величинами.

Характеристические функционалы симметричной и антисимметричной вероятностной меры Маслова равны

$$\langle e^{i \sum_k N_k \alpha_k} \rangle_{\pm} = \prod_{k=1}^{|\Omega|} \begin{cases} \frac{1 - P_k z_{\pm}}{1 - e^{i \alpha_k} P_k z_{\pm}} & \text{в бозевском случае,} \\ \frac{1 + e^{i \alpha_k} P_k z_{\pm}}{1 + P_k z_{\pm}} & \text{в фермиевском случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что в N -частичных подпространствах $\Omega_N^{\pm}$ вероятности событий $\{N_k = n\}$ и $\{N_k = n, N_i = m\}$ равны

$$\begin{aligned} P_N^{\pm}(N_k = n) &= \frac{P_k^n}{(N-n)! \Gamma_{\Omega}^{\pm}(N)} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \prod_{l \neq k}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_l)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0}, \\ P_N^{\pm}(N_k = n, N_i = m) &= \frac{P_i^m P_k^n}{(N-m-n)! \Gamma_{\Omega}^{\pm}(N)} \frac{d^{N-m-n}}{d\alpha^{N-m-n}} \prod_{l \neq i, k}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_l)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned}$$

получаем следующие выражения для вероятностей $P_N^{\pm}(N_k = n)$ и $P_N^{\pm}(N_k = n, N_i = m)$:

$$\begin{aligned} P_N^{\pm}(N_k = n) &= p_0 \sum_{N=n}^{\infty} z_{\pm}^N \frac{P_k^n}{(N-n)!} \frac{d^{N-n}}{d\alpha^{N-n}} \prod_{l \neq k}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_l)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0} \\ &= (P_k z_{\pm})^{n \pm 1} \langle N_k \rangle_{\pm}^{\mp 1}, \\ P_N^{\pm}(N_i = m, N_k = n) &= p_0 \sum_{N=m+n}^{\infty} z_{\pm}^N \frac{P_i^m P_k^n}{(N-m-n)!} \frac{d^{N-m-n}}{d\alpha^{N-m-n}} \prod_{l \neq i, k}^{|\Omega|} (1 \mp \alpha P_l)^{\mp 1} \Big|_{\alpha=0} \\ &= (P_i z_{\pm})^{m \pm 1} (P_k z_{\pm})^{n \pm 1} \langle N_i \rangle_{\pm}^{\mp 1} \langle N_k \rangle_{\pm}^{\mp 1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\langle N_k \rangle_{\pm} = ((P_k z_{\pm})^{-1} \mp 1)^{-1}$. Полученное равенство $P_N^{\pm}(N_i = m, N_k = n) = P_N^{\pm}(N_i = m)P_N^{\pm}(N_k = n)$ означает независимость событий $\{N_i = m\}$ и $\{N_k = n\}$.

Явная формула (4.6) для вероятности события $N_k = m$ позволяет вычислить значение характеристического функционала симметричной и антисимметричной меры.

Пусть α_k – произвольные вещественные числа, $1 \leq k \leq |\Omega|$, $M_{\pm} = \{M_+, M_-\}$, $M_+ = \infty$, $M_- = 1$. Согласно определению характеристического функционала, имеем

$$\langle e^{i \sum_k N_k \alpha_k} \rangle_{\pm} = \prod_{k=1}^{|\Omega|} \sum_{m_k=0}^{M_{\pm}} e^{i m_k \alpha_k} (P_k z_{\pm})^{m_k \pm 1} ((P_k z_{\pm})^{-1} \mp 1)^{\pm 1}.$$

Учитывая, что $M_+ = \infty$ в бозевском и $M_- = 1$ в фермиевском случаях, получаем

$$\begin{aligned} \langle e^{i \sum_k N_k \alpha_k} \rangle_{\pm} &= \prod_k \left\{ (1 \mp (P_k z_{\pm})^{-1})^{\pm 1} \sum_{m_k=0}^{M_{\pm}} e^{i m_k \alpha_k} (P_k z_{\pm})^{m_k} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^{|\Omega|} \left\{ \begin{array}{l} (1 - P_k z_+)/ (1 - e^{i \alpha_k} P_k z_+), \\ (1 + e^{i \alpha_k} P_k z_-) / (1 + P_k z_-). \end{array} \right. \end{aligned}$$

В частности, выполнена формула для полной вероятности $\langle 1 \rangle_{\pm} = 1$ и с учетом формулы (4.2) для вероятности вакуумного состояния p_0 характеристический функционал имеет вид

$$\langle e^{i \sum_k N_k \alpha_k} \rangle_{\pm} = p_0 \prod_k (1 \mp e^{i \alpha_k} P_k z_{\pm})^{\mp 1}.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что, с одной стороны, многочастичные системы, описываемые с помощью вероятностных пространств $(\Omega^{\pm}, \Sigma^{\pm}, P^{\pm})$, имеют достаточно простую интерпретацию в терминах теории систем массового обслуживания [11]: Ω – множество типов заявок, P_k – вероятность заявки ω_k , N – случайное число заявок, поступающих в единицу времени, которое имеет одно из двух возможных распределений $\pi_N^{\pm}$. В случае (+) допускается одновременное обслуживание любого числа заявок каждого типа (система с бесконечным числом приборов, обрабатывающих заявку ω_k), а в случае (–) – обслуживание лишь одной заявки каждого типа (система с одним прибором, обрабатывающим заявку ω_k). В качестве времени обработки заявки можно принять случайное экспоненциально распределенное время перехода возбужденного состояния в основное. С другой стороны, специфика пространств Маслова состоит в выборе распределения $\{\pi_N^{\pm}\}$, которое не рассматривалось в теории массового обслуживания, однако играет весьма важную роль в статистической физике.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ковалю за обсуждение теорем о среднем значении функционалов в пространствах Маслова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dirac P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1927. V. 114. P. 243–265.
- [2] Fock V. Konfigurationsrau and Zweite Quantelung // Z. für Physik. 1932. V. 75. P. 622–653.
- [3] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
- [4] Costantini D., Garibaldi U. Elementary particle statistics reconsidered // Phys. Lett. A. 1988. V. 134. №3. P. 161–164.
- [5] Bach A. The concept of indistinguishable particles in classical and quantum physics // Foundation of Phys. 1988. V. 18. №6. P. 639–649.
- [6] Bach A. Indistinguishability, interchangeability, and indeterminism // Statistics in Science. Boston Stud. Phil. Sci. V. 122. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. P. 149–166.
- [7] Dasgupta R. Quantum statistics, distinguishability and random trajectories // Phys. Lett. A. 1990. V. 149. №2–3. P. 63–66.
- [8] Маслов В. П. О фазовом переходе для классических фермионов // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №4. С. 635–637.
- [9] Маслов В. П. Теорема о классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ для N взаимодействующих фермионов // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №1. С. 145–146.
- [10] Планк М. Законы теплового излучения и гипотеза элементарного кванта действия // Избранные труды. М.: Наука, 1975. С. 282–310.
- [11] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
02.02.1999