Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, Спиральность – единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 -топологии производной, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 626–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 09:03:41

Спиральность – единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 -топологии производной

Е. А. Кудрявцева

Пусть Q – гладкое компактное ориентированное 3-мерное многообразие с гладким краем ∂Q . Пусть $\mathcal{B}$ – множество точных 2-форм $B \in \Omega^2(Q)$ таких, что

$$j_{\partial Q}^* B = 0,$$

где $j_{\partial Q}: \partial Q \rightarrow Q$ – отображение включения. Группа $\mathcal{D} = \text{Diff}_0(Q)$ изотопных тождественно-му диффеоморфизмов Q действует на множестве $\mathcal{B}$ в виде $\mathcal{D} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $(h, B) \mapsto h^* B$. Пусть $\mathcal{B}^\circ$ – множество 2-форм $B \in \mathcal{B}$ без нулей. Мы доказываем, что любой $\mathcal{D}$ -инвариантный функционал $I: \mathcal{B}^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, имеющий регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную, локально на $\mathcal{B}^\circ$ (а в случае $Q = M \times S^1$ с $\partial Q \neq \emptyset$ – глобально на множестве 2-форм $B \in \mathcal{B}^\circ$, допускающих секущую поверхность, изотопную $M \times \{*\}$) выражается через спиральность.

1. Примеры $\mathcal{D}$ -инвариантных функционалов на множестве $\mathcal{B}$ точных несжимаемых течений. Определим поток и спиральность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (А) Пусть $\Pi \in C_2(Q)$ – 2-цепь в Q с границей $\partial \Pi \in C_1(\partial Q)$. Пусть $[\Pi] \in \kappa$ – проекция относительного класса гомологий $[\Pi] \in H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q})$ в факторпространство

$$\kappa := H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q}) / \text{Im } p_* \cong \ker(j_{\partial Q})_* = \partial(\kappa), \quad (1)$$

где $p_*: H_2(Q; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(Q, \partial Q; \mathbb{Q})$, $(j_{\partial Q})_*: H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Q; \mathbb{Q})$. Функционал

$$\text{Flux}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\kappa, \mathbb{R}), \quad \text{Flux}(B)[\Pi] := \int_{\Pi} B,$$

назовем *поток* на $\mathcal{B}$.

(В) Пусть $\kappa^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$ – произвольное векторное подпространство такое, что

$$H_1(\partial Q; \mathbb{Q}) = \kappa^\perp \oplus \ker(j_{\partial Q})_*.$$

Спиральностью на множестве $\mathcal{B}$ относительно подпространства $\kappa^\perp$ назовем функционал

$$\mathcal{H}_{\kappa^\perp}: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_{\kappa^\perp}(B) := \int_Q B \wedge A, \quad B \in \mathcal{B}, \quad (2)$$

где $A \in \Omega^1(Q)$ – произвольная 1-форма на Q такая, что $dA = B$ и $\oint_\gamma A = 0$ для любой петли $\gamma: S^1 \rightarrow \partial Q$ гомологического класса $[\gamma] \in \kappa^\perp$.

Легко показать, что Flux и $\mathcal{H}_{\kappa^\perp}$ определены корректно и $\mathcal{D}$ -инвариантны.

ПРИМЕР 1. Пусть $Q = M \times S^1$, где M – компактная гладкая ориентированная поверхность с непустым гладким краем. Тогда на M существует точная положительная форма площади $\omega \in \Omega^2(M)$. Пусть $B \in \mathcal{B}^\circ$ и $j_{M \times \{0\}}^* B = \omega$ (т.е. $M \times \{0\}$ является секущей поверхностью для 2-формы B), $S_1, \dots, S_d \subseteq \partial M$ – граничные окружности, $\pi_M: Q \rightarrow M$ и $\pi_{S^1}: Q \rightarrow$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-06302-а), и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-7962.2016.1).

DOI: 10.4213/mzm11061

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – проекции. Так как B точна, то в силу [1], [2] существуют диффеоморфизм $\psi \in \mathcal{D}$ и функция $H \in C^\infty(Q)$ такие, что

$$B = \psi^* B_{\omega, H}, \quad H|_{S_1 \times S^1} \equiv 0, \\ H|_{S_i \times \{t\}} = \text{const} =: h_i(t) \quad \text{при} \quad t \in S^1, \quad i \in \{2, \dots, d\},$$

где

$$B_{\omega, H} := \pi_M^* \omega - dH \wedge d\pi_{S^1}. \quad (3)$$

Для $i \in \{1, \dots, d\}$ фиксируем точку $x_i \in S_i$ и пути $\gamma_{ik} \subset M$ из x_i в точки x_k , $k \neq i$. Положим $\Pi_{ik} := \gamma_{ik} \times S^1$. Поток и спиральность 2-формы B таковы:

(А) классы $\llbracket M \times \{0\} \rrbracket, \llbracket \Pi_{12} \rrbracket, \dots, \llbracket \Pi_{1d} \rrbracket \in \varkappa$ образуют базис в $\varkappa$ и поток

$$\text{Flux}(B) \llbracket M \times \{0\} \rrbracket = \int_M \omega, \quad \text{Flux}(B) \llbracket \Pi_{\ell k} \rrbracket = \int_{S^1} h_\ell(t) dt - \int_{S^1} h_k(t) dt;$$

(В) для любых $\ell, k \in \{1, \dots, d\}$ возьмем в качестве $\varkappa^\perp$ подпространство $\varkappa_{\ell k}^\perp \subseteq H_1(\partial Q; \mathbb{Q})$, порожденное гомологическими классами петель $\gamma_k := \{x_k\} \times S^1$ и $S_i \times \{0\}$, $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{\ell\}$; по формуле Стокса спиральность

$$\mathcal{H}_{\varkappa_{11}^\perp}(B) = -2 \int_Q H(\pi_M^* \omega) \wedge (d\pi_{S^1}) = -2 \text{Cal}_\omega(\tilde{\varphi}),$$

$$\mathcal{H}_{\varkappa_{\ell k}^\perp}(B) - \mathcal{H}_{\varkappa_{\ell \ell}^\perp}(B) = \frac{1}{2}(\mathcal{H}_{\varkappa_{\ell \ell}^\perp}(B) - \mathcal{H}_{\varkappa_{k k}^\perp}(B)) = \text{Flux}(B) \llbracket M \times \{0\} \rrbracket \text{Flux}(B) \llbracket \Pi_{\ell k} \rrbracket$$

при $k \neq \ell$. Здесь $\text{Cal}_\omega: \tilde{\mathcal{G}}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ – гомоморфизм Калаби [3], [4], $\tilde{\mathcal{G}}_\omega$ – универсальная накрывающая группы $\mathcal{G}_\omega = S\text{Diff}(M, \omega)$ симплектоморфизмов поверхности (M, ω) с C^∞ -топологией, элемент $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}_\omega$ отвечает 2-форме (3).

2. Дифференцируемые функционалы на $B'' \subseteq B$ и $\mathcal{H}_{\varkappa^\perp}|_{B''}$ -связные подмножества $B''' \subseteq B''$. Обозначим через $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{A}_{\varkappa^\perp}$) множество таких 1-форм $A \in \Omega^1(Q)$, что для любой петли $\gamma: S^1 \rightarrow \partial Q$ (соответственно любой петли гомологического класса $[\gamma] \in \varkappa^\perp$, определение 1 (В)) верно $\oint_\gamma A = 0$. Пусть $\Phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\varkappa, \mathbb{R})$ – линейная функция на (1) и

$$\text{либо} \quad B' := \text{Flux}^{-1}(\Phi), \quad \mathcal{A}' := \mathcal{A}, \quad \text{либо} \quad B' := B, \quad \mathcal{A}' := \mathcal{A}_{\varkappa^\perp}. \quad (4)$$

Ясно, что B' и $\mathcal{A}'$ являются $\mathcal{D}$ -инвариантными, и для любого $B \in B'$ множество $B' - B$ является C^0 -открытым в векторном пространстве $d\mathcal{A}'$.

Пусть $B'' \subseteq B'$ есть C^1 -открытое подмножество (например $B'' = B' \cap B^\circ$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал $I: B'' \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *дифференцируемым* в точке $B \in B''$, если существует линейный функционал $D_B I: \mathcal{A}' \rightarrow \mathbb{R}$, называемый *производной* функционала I в точке B , такой, что для любого гладкого семейства 1-форм $A_u \in \mathcal{A}'$, $-\varepsilon < u < \varepsilon$, со свойством $dA_0 = 0$

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} I(B + dA_u) = D_B I \left(\left. \frac{d}{du} \right|_{t=0} A_u \right).$$

Производную $D_B I$ назовем *регулярной*, если она является регулярным элементом двойственного пространства $(\mathcal{A}')^*$, т.е.

$$D_B I(A') = \int_Q K_I(B) \wedge A', \quad A' \in \mathcal{A}',$$

для некоторой измеримой 2-формы $K_I(B)$ на Q , называемой *плотностью* функционала $D_B I$. Производную назовем *C^k -непрерывной на B''* (для $k \geq 0$), если I дифференцируем всюду на B'' и имеет регулярную производную, плотность которой есть непрерывное отображение $K_I: B'' \rightarrow \Gamma^0(\Lambda^2 T^*Q)$ в смысле C^k -топологии на B'' и C^0 -топологии на $\Gamma^0(\Lambda^2 T^*Q)$.

ПРИМЕР 2. Спиральность (2) дифференцируема всюду на $\mathcal{B}$ (а потому и на $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$). Ее производная регулярна и имеет плотность $K_{\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}}(B) = B$. Поэтому ее производная непрерывна относительно любой топологии на $\mathcal{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подмножество $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ назовем $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным, если любую пару его элементов с одним и тем же значением $c \in \mathbb{R}$ спиральности $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}$ можно соединить кусочно-гладким путем в $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$.

ЛЕММА 1 (примеры $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связных подмножеств). (А) Если $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ в (4), и 2-форма $B \in \mathcal{B}''$ такова, что $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}(B) \neq 0$, то любая достаточно малая C^1 -окрестность $\mathcal{B}'''$ 2-формы B в $\mathcal{B}''$ является $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связной.

(В) Пусть $Q = M \times S^1$ как в примере 1. Пусть (4) и множество $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^\circ$ состоит из всех 2-форм $\psi^* B_{\omega, H}$, где $\psi \in \mathcal{D}$ и $B_{\omega, H} \in \mathcal{B}'$ как в (3). Тогда само множество $\mathcal{B}'' =: \mathcal{B}'''$ является $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Любую пару $B_0, B_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}'''$ соединим путем

$$\left\{ ((1-u)B_0 + uB_1) \sqrt{c/\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}((1-u)B_0 + uB_1)} \right\}_{u \in [0,1]}$$

в $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c)$. Этот путь содержится в $\mathcal{B}''$ ввиду C^1 -открытости $\mathcal{B}''$ и C^0 -непрерывности $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}$.

(В) Множество $\mathcal{B}''$ C^0 -открыто (а потому и C^1 -открыто) в $\mathcal{B}'$. Ввиду [1] любая пара 2-форм из $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$ имеет вид

$$\psi_0^* B_{\omega, H_0}, \quad \psi_1^* B_{\lambda\omega, H_1}$$

для некоторых $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{D}$, $H_0, H_1 \in C^\infty(Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ и положительной формы площади $\omega \in \Omega^2(M)$ таких, что $B_{\omega, H_0}, B_{\lambda\omega, H_1} \in \mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c)$. Так как любую пару $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{D}$ можно соединить кусочно-гладким путем $\{\psi_u\}_{u \in [0,1]}$ в группе $\mathcal{D}$ [1], получаем путь $\{\psi_u^* B_{(1-u+u\lambda)\omega, a(u)H_0+uH_1}\}$ в $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}''$, соединяющий 2-формы $\psi_0^* B_{\omega, H_0}$ и $\psi_1^* B_{\lambda\omega, H_1}$, где

$$a(u) := \frac{1}{1-u+u\lambda} - \frac{u}{\lambda}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

3. Основной результат. Наш результат был анонсирован в [5] и аналогичен результатам [4], [6]. Мы его доказываем методом из работы [4].

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{X}^\perp$ и $\mathcal{B}'$ как в (1), (2) и (4). Пусть $\mathcal{D}$ -инвариантный функционал $I: \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем на C^1 -открытом подмножестве $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^\circ$ и имеет регулярную и непрерывную относительно C^1 -топологии производную на $\mathcal{B}''$. На любом $\mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связном подмножестве $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ (например, из леммы 1) функционал I выражается через спиральность, т.е. $I|_{\mathcal{B}'''} = h \circ \mathcal{H}_{\mathcal{X}^\perp}|_{\mathcal{B}'''}$ для некоторой функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

ЛЕММА 2. Пусть $I: \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}$ — $\mathcal{D}$ -инвариантный функционал, дифференцируемый в точке $B \in \mathcal{B}''$. Тогда для любых 1-формы $A' \in \mathcal{A}'$ и диффеоморфизма $\psi \in \mathcal{D}$ с $\psi^* B = B$ верно равенство

$$D_B I(A') = D_B I(\psi^* A').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях определения 2 имеем

$$I(B + dA_t) = I(B + \psi^* dA_t) = I(B + d\tilde{A}_t),$$

где $\tilde{A}_t := \psi^* A_t$, и $d\tilde{A}_0 = 0$. Дифференцируя полученное соотношение

$$I(B + dA_t) = I(B + d\tilde{A}_t)$$

по t при $t = 0$, получаем требуемое равенство для $A' = (d/dt)|_{t=0} A_t$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что в условиях леммы 2 производная $D_B I$ в точке B регулярна и ее плотность $K_I(B)$ является непрерывной 2-формой на Q . Тогда

$$K_I(B) = \psi^* K_I(B).$$

Если 2-форма B не имеет нулей (т.е. $B \in \mathcal{B}^\circ$), то $K_I(B) = \lambda_I(B)B$ для некоторой функции $\lambda_I(B) \in C(Q)$, постоянной на любой интегральной кривой поля ядер 2-формы B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство из леммы 2 перепишем в виде

$$\int_Q K_I(B) \wedge A' = \int_Q K_I(B) \wedge \psi^* A'.$$

Но левая часть этого равенства равна $\int_Q (\psi^* K_I(B)) \wedge \psi^* A'$. Поэтому

$$\int_Q (\psi^* K_I(B) - K_I(B)) \wedge \psi^* A' = 0.$$

Так как 1-форма $A' \in \mathcal{A}'$ любая (и, в частности, можно взять $A' \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ с носителем в сколь угодно малой окрестности любой внутренней точки из Q), а 2-форма $K_I(B)$ непрерывна на Q , получаем первое требуемое равенство $K_I(B) = \psi^* K_I(B)$.

Если B не имеет нулей, то любая точка из $Q \setminus \partial Q$ имеет окрестность $U \approx (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ в $Q \setminus \partial Q$ с регулярными координатами $w = (x, y, z) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ такими, что $B|_U = dx \wedge dy$. По доказанному 2-форма

$$K_I(B)|_U =: L(w) dy \wedge dz + M(w) dz \wedge dx + N(w) dx \wedge dy,$$

где $L, M, N \in C((-\varepsilon, \varepsilon)^3)$, инвариантна относительно преобразований $\psi: w \mapsto \tilde{w} := w + (0, 0, f(w))$ для функций $f \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)^3)$ с компактным носителем и $\partial f / \partial z > -1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_U &= (L(\tilde{w}) - L(w)) dy \wedge dz + (M(\tilde{w}) - M(w)) dz \wedge dx \\ &\quad + (N(\tilde{w}) - N(w)) dx \wedge dy + (L(\tilde{w}) dy - M(\tilde{w}) dx) \wedge df(w). \end{aligned}$$

Для любой точки $w_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^3$ рассмотрим такую функцию f_1 , что $f_1(w) = x - x_0$ в окрестности точки w_0 . Ввиду $f_1(w_0) = 0$ имеем

$$0 = (\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_{w=w_0} = L(w_0) dy \wedge dx,$$

откуда $L(w_0) = 0$. Аналогично показывается, что $M(w_0) = 0$. Поэтому $L \equiv M \equiv 0$ и $K_I(B)|_U = N(w)B|_U$.

Итак, соотношение $K_I(B) = \lambda_I(B)B$ доказано на $Q \setminus \partial Q$. Значит, оно верно и на Q , так как B не имеет нулей. Так как

$$0 = (\psi^* K_I(B) - K_I(B))|_U = (N(\tilde{w}) - N(w))B|_U$$

и f любая, то функция $\lambda_I(B)|_U = N(x, y, z)$ не зависит от z , т.е. постоянна на интегральных кривых поля $\ker B$. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Покажем, что для любой 2-формы $B \in \mathcal{B}''$ функция $\lambda_I(B) \in C(Q)$ из следствия постоянна на Q . Напомним, что векторное поле называется топологически транзитивным, если оно имеет всюду плотную интегральную кривую. Пусть μ – форма объема на Q . Согласно результату [7] векторное поле $\bar{B}$ такое, что $i_{\bar{B}}\mu = B$, можно C^1 -аппроксимировать последовательностью $\{\bar{B}_n\}$ топологически транзитивных бездивергентных C^1 -векторных полей на Q , касающихся ∂Q . Так как $\bar{B}$ точно, из доказательства в [7] следует, что $\bar{B}_n$ можно выбрать точным и имеющим поток $\text{Flux}(B)$. Такую 2-форму B_n можно C^1 -аппроксимировать гладкой 2-формой $B_n^s \in \mathcal{B}'$. Из C^1 -открытости $\mathcal{B}''$ в $\mathcal{B}'$ имеем $B_n^s \in \mathcal{B}''$.

Итак, для любой пары точек $w, w' \in Q$ существуют последовательности $\{B_n^s\}$ в $\mathcal{B}''$ и $\{w_n\}, \{w'_n\}$ в Q такие, что $B_n^s \rightarrow B$ в C^1 -топологии, $w_n \rightarrow w$, $w'_n \rightarrow w'$ и любая пара w_n, w'_n содержится в интегральной кривой поля $\bar{B}_n^s$. Значит,

$$\lambda_I(B_n^s)(w_n) = \lambda_I(B_n^s)(w'_n).$$

В силу следствия и отсутствия нулей у $B_1 \in \mathcal{B}''$ отображение $\lambda_I: \mathcal{B}'' \rightarrow C(Q)$ непрерывно в смысле C^1 -топологии на $\mathcal{B}''$ и C^0 -топологии на $C(Q)$. Значит, $\lambda_I(B)(w)$ и $\lambda_I(B)(w')$ суть пределы для $\{\lambda_I(B_n^s)(w_n) = \lambda_I(B_n^s)(w'_n)\}$, а потому совпадают, откуда $\lambda_I(B) = \text{const}$.

Имеем

$$D_B I(A') = \lambda_I(B) \int_Q B \wedge A' = \lambda_I(B) D_B \mathcal{H}_{\mathcal{K}^\perp}(A').$$

Значит, функционал $I|_{\mathcal{B}''}$ локально постоянен на любом множестве уровня спиральности. Так как множество $\mathcal{B}''' \subseteq \mathcal{B}''$ является $\mathcal{H}_{\mathcal{K}^\perp}|_{\mathcal{B}''}$ -связным (определение 3), то функционал $I|_{\mathcal{B}'''}$ постоянен на $\mathcal{H}_{\mathcal{K}^\perp}^{-1}(c) \cap \mathcal{B}'''$, т.е. равен некоторой константе $h(c)$, зависящей только от $c \in \mathbb{R}$ (для некоторой функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Таким образом, $I(B) = h(\mathcal{H}_{\mathcal{K}^\perp}(B))$ для любого $B \in \mathcal{B}'''$. Теорема доказана.

Ключевой результат [7] не обобщается на случай C^4 -топологии [8].

Автор выражает благодарность Г. Хорнигу за постановку задачи, Л. В. Полтеровичу и Д. Пералта-Саласу за интерес и указание работ [9] и [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. R. Jensen, *Indiana Univ. Math. J.*, **20**:12 (1971), 1125–1143. [2] A. Banyaga, *Comment. Math. Helv.*, **53**:2 (1978), 174–227. [3] E. Calabi, *Problems in Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, 1–26. [4] Е. А. Кудрявцева, *Матем. заметки*, **95**:6 (2014), 951–954. [5] E. Kudryavtseva, *Proc. Int. Conf. “Knots and links in fluid flows: from helicity to knot energy”*, IUM Publications, Moscow, 2015, 9–10. [6] D. Serre, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **289**:4 (1979), 267–270; *Phys. D*, **13**:1-2 (1984), 105–136. [7] M. Bessa, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **346**:21-22 (2008), 1169–1174. [8] А. Г. Медведев, *Матем. заметки*, **95**:2 (2014), 227–233. [9] C. Bonatti, S. Crovisier, *Invent. Math.*, **158**:1 (2004), 33–104.

Е. А. Кудрявцева

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: ekudr@mech.math.msu.su

Поступило

10.11.2015