Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Сабуров, О сюръективности квадратичных стохастических операторов на симплексе, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 635–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 04:16:52

О сюръективности квадратичных стохастических операторов на симплексе

М. Сабуров

1. Введение. Пусть $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^m$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^m$ и

$$\mathbb{S}^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^m x_k = 1, x_k \geq 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, m \right\}$$

– стандартный $(m-1)$ -мерный симплекс. Элемент такого симплекса называется *стохастическим вектором*. Напомним, что квадратная матрица $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *стохастической*, если каждая ее строка является стохастическим вектором. Пусть $\mathcal{L}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ – линейный стохастический оператор (марковский оператор) с квадратной стохастической матрицей $\mathbb{P}$, т.е. $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbb{P}$. Легко видеть, что линейный стохастический оператор $\mathcal{L}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ сюръективен, если и только если он биективен. Действительно, непосредственные вычисления показывают, что если оператор $\mathcal{L}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ сюръективен, то для каждого i найдется такое j , что $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j$, где $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{e}_i)$ – прообраз вершины $\mathbf{e}_i$ симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$. Следовательно, сюръективные линейные стохастические операторы симплекса – это в точности операторы перестановки. Аналогичная задача для квадратичных стохастических операторов (нелинейных марковских операторов) на симплексе открыта [1]. В общем случае сюръективности квадратичных операторов тесно связана с нелинейными проблемами оптимизации [2], и описание таких операторов – трудная задача. В классе всех квадратичных операторов можно выделить класс операторов специального вида, а именно, так называемых *квадратичных стохастических операторов*, которым соответствуют кубические стохастические матрицы; такие операторы имеют удивительные приложения в генетике популяций (см. [3]–[5]), а также в теории многоагентных систем (см. [6], [7]). В этой статье получен критерий сюръективности квадратичных стохастических операторов с кубическими стохастическими матрицами; тем самым решена задача 2.36, поставленная в [1].

2. Сюръективные квадратичные стохастические операторы. Пусть $\mathbf{I}_m = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество. Мы обозначаем дополнение любого подмножества $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ через $\bar{\alpha}: \bar{\alpha} = \mathbf{I}_m \setminus \alpha$. Для стохастического вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$ мы полагаем

$$\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbf{I}_m : x_i > 0\} \quad \text{и} \quad \text{null}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbf{I}_m : x_i = 0\}.$$

Ясно, что $\text{supp}(\mathbf{x}) \cup \text{null}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_m$ и $\text{supp}(\mathbf{x}) \cap \text{null}(\mathbf{x}) = \emptyset$ для всякого $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$. *Гранью* симплекса $\mathbb{S}^{m-1}$ называется любое множество вида $\Gamma_\alpha = \text{conv}\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \alpha}$, где $\alpha \subset \mathbf{I}_m$, а $\text{conv}(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества A . *Внутренность грани* Γ_α определяется как

$$\text{int } \Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha : x_i > 0 \text{ для всех } i \in \alpha\}.$$

Пусть $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ – кубическая матрица. Кубическая матрица $\mathcal{P}$ называется *стохастической*, если каждый вектор $\mathbf{p}_{i\bullet} = (p_{ij1}, \dots, p_{ijm})$ является стохастическим для всех $i, j = 1, \dots, m$. С кубической стохастической матрицей $\mathcal{P} = (p_{ijk})_{i,j,k=1}^m$ связан квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, определенный правилом

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Малайзии (грант FRGS14-141-0382).

DOI: 10.4213/mzm11063

© М. САБУРОВ, 2016

для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$. Без потери общности можно считать, что $\mathbf{p}_{ij\bullet} = \mathbf{p}_{ji\bullet}$ для всех $i, j = 1, \dots, m$. Предположим, что $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$ и $\text{supp}(\mathbf{x}) = \alpha$. Тогда для всякого $\mathbf{x} \in \text{int } \Gamma_\alpha$ имеем

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j \in \alpha} x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet}.$$

Отсюда мы немедленно получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) $\text{supp}(\mathcal{Q}(\mathbf{x})) = \bigcup_{i,j \in \text{supp}(\mathbf{x})} \text{supp}(\mathbf{p}_{ij\bullet})$;
- (ii) $\text{null}(\mathcal{Q}(\mathbf{x})) = \bigcap_{i,j \in \text{supp}(\mathbf{x})} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet})$;
- (iii) $\mathcal{Q}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\beta$, где $\beta = \bigcup_{i,j \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{ij\bullet})$;
- (iv) $\mathcal{Q}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\beta$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \text{int } \Gamma_\beta$ для некоторого $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } \Gamma_\alpha$.

В теории классических марковских цепей важную роль играют поглощающие состояния. По аналогии мы определяем понятие поглощающих множеств для квадратичных стохастических операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ называется *поглощающим*, если

$$\bar{\alpha} = \bigcap_{i,j \in \alpha} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}).$$

Для каждого поглощающего множества $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ кубическая матрица $\mathcal{P}_\alpha = (p_{ijk})_{i,j,k \in \alpha}$ также является стохастической, и с ней можно связать квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}_\alpha: \Gamma_\alpha \rightarrow \Gamma_\alpha$, определенный правилом

$$\mathcal{Q}_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i,j \in \alpha} x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet} \quad \text{для } \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha.$$

Ясно, что $\mathcal{Q}|_{\Gamma_\alpha} = \mathcal{Q}_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого множества $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ следующие условия равносильны:*

- (i) множество α является поглощающим;
- (ii) $\mathcal{Q}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\alpha$;
- (iii) $\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \text{int } \Gamma_\alpha$ для некоторого $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } \Gamma_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем доказательство по схеме (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что множество α поглощающее. Тогда

$$\alpha = \mathbf{I}_m \setminus \bar{\alpha} = \mathbf{I}_m \setminus \bigcap_{i,j \in \alpha} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) = \bigcup_{i,j \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{ij\bullet}).$$

По предложению 1 имеем $\mathcal{Q}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\alpha$.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i,j \in \alpha} x_i^{(0)} x_j^{(0)} \mathbf{p}_{ij\bullet} \in \text{int } \Gamma_\alpha.$$

Тогда $\bigcup_{i,j \in \alpha} \text{supp } \mathbf{p}_{ij\bullet} = \alpha$. Следовательно, $\bar{\alpha} = \bigcap_{i,j \in \alpha} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet})$.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если все не более чем двухэлементные подмножества α множества $\mathbf{I}_m$ являются поглощающими, то любое подмножество множества $\mathbf{I}_m$ является поглощающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что любое множество α с $|\alpha| \leq 2$ является поглощающим. Тогда $\mathbf{p}_{ii\bullet} = \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{p}_{ij\bullet} \in \text{conv}\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ для всех $i, j \in \mathbf{I}_m$. Из включения $\text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) \supset \mathbf{I}_m \setminus \{i, j\}$ вытекает, что

$$\bigcap_{i,j \in \gamma} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) = \bigcap_{i \in \gamma} \text{null}(\mathbf{p}_{ii\bullet}) \cap \bigcap_{i \neq j} \text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) = \mathbf{I}_m \setminus \gamma = \bar{\gamma}$$

для любого $\gamma \subset \mathbf{I}_m$. Это означает, что γ является поглощающим, что и требовалось.

ЛЕММА 1. Если любое не более чем двухэлементное множество $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ является поглощающим, то квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 2 и 3 квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ отображает каждую грань симплекса в себя. Нам нужно показать, что этот оператор сюръективен. Применим математическую индукцию по размерности симплекса. В случае $m = 2$ сюръективность оператора очевидна. Предположим, что сюръективность доказана для $m \leq n - 1$. Докажем ее для $m = n$. По предположению индукции оператор $\mathcal{Q}: \partial \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial \mathbb{S}^{n-1}$ сюръективен. Покажем, что для любого $\mathbf{y} \in \text{int } \mathbb{S}^{n-1}$ множество $\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{y})$ непусто. Предположим, что это не так и $\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{y})$ является пустым множеством. Рассмотрим отображение $g: \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\mathbf{y}\} \rightarrow \partial \mathbb{S}^{n-1}$, которое переводит каждую точку $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\mathbf{y}\}$ в точку пересечения луча, идущего из $\mathbf{z}$ в направлении $\mathbf{y}$, с границей симплекса. Легко проверить, что отображение $\mathcal{F}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathcal{F} = g \circ \mathcal{Q}$, не имеет неподвижных точек. Это противоречит теореме Брауэра о неподвижных точках¹, что и доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 1. Квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ сюръективен тогда и только тогда, когда для некоторой перестановки π множества $\mathbf{I}_m$ выполнены следующие условия:

- (i) $\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\pi(i)}$ для каждого $i \in \mathbf{I}_m$;
- (ii) $\mathcal{Q}^{-1}(\text{int}(\Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j})) = \text{int}(\Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i)} \mathbf{e}_{\pi(j)}})$ для любых $i, j \in \mathbf{I}_m$ (здесь $\Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j} = \text{conv}\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из леммы 1.

Докажем необходимость. Предположим, что оператор $\mathcal{Q}$ сюръективен. Пусть $\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i) -$ прообраз вектора $\mathbf{e}_i$. Положим

$$\text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i)) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i)} \text{supp}(\mathbf{x}), \quad \Gamma_{\text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i))} = \text{conv}\{\mathbf{e}_j\}_{j \in \text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i))}.$$

Из предложения 1 вытекает, что $\mathcal{Q}(\Gamma_{\text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i))}) = \mathbf{e}_i$. Следовательно,

$$\{\mathbf{e}_j\}_{j \in \text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i))} \subset \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i) \quad \text{для любого } i \in \mathbf{I}_m.$$

Значит, $|\text{supp}(\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i))| = 1$. Это означает, что для некоторой перестановки π множества $\mathbf{I}_m$ имеем $\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\pi(i)}$ при любом $i \in \mathbf{I}_m$. Пусть $\mathbf{y} \in \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{y})$. Согласно предложению 1 имеет место включение

$$\mathcal{Q}(\text{int}(\Gamma_{\text{supp}(\mathbf{x})})) \subset \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}.$$

Если $k \in \text{supp}(\mathbf{x}) \setminus \{\pi(i), \pi(j)\} \neq \emptyset$, то $\mathcal{Q}(\mathbf{e}_k) \in \overline{\text{int}(\Gamma_{\text{supp}(\mathbf{x})})} \subset \Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}$ – противоречие. Значит, $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{\pi(i), \pi(j)\}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{y})$, т.е.

$$\mathcal{Q}^{-1}(\text{int}(\Gamma_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j})) = \text{int}(\Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i)} \mathbf{e}_{\pi(j)}}) \quad \text{для всех } i, j \in \mathbf{I}_m.$$

Теорема доказана.

¹Приведенное выше короткое доказательство было предложено анонимным рецензентом. В первоначальном доказательстве использовались степени отображений. Нетрудно показать, что заданное отображение гомотопно тождественному отображению и имеет степень 1.

3. Операторы Лотки–Вольтерра. Квадратичный стохастический оператор $\mathcal{V}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ называется *оператором Лотки–Вольтерра*, если

$$\text{null}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) \supset \mathbf{I}_m \setminus \{i, j\} \quad \text{для любых } i, j \in \mathbf{I}_m$$

(см. [1], [8]). Для квадратичного стохастического оператора Лотки–Вольтерра $\mathcal{V}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ имеем $\mathbf{p}_{ii\bullet} = \mathbf{e}_i$ и $\text{supp}(\mathbf{p}_{ij\bullet}) \subset \{i, j\}$ при всех $i \neq j$. Таким образом, в этом случае квадратичный стохастический оператор Лотки–Вольтерра имеет вид

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i^2 \mathbf{e}_i + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j \mathbf{p}_{ij\bullet}.$$

Нетрудно проверить, что квадратичный стохастический оператор является оператором Лотки–Вольтерра тогда и только тогда, когда любое не более чем двухэлементное множество $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ является поглощающим.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ сюръективен тогда и только тогда, когда существуют перестановочная матрица Π и квадратичный стохастический оператор Лотки–Вольтерра $\mathcal{V}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, для которых $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \Pi \mathcal{V}(\mathbf{x})$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$.*

В статье [1] содержится следующее описание всех квадратичных стохастических автоморфизмов симплекса.

ТЕОРЕМА 3 [1]. *Квадратичный стохастический оператор $\mathcal{Q}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ является автоморфизмом симплекса тогда и только тогда, когда существуют перестановочная матрица Π и квадратичный стохастический оператор Лотки–Вольтерра $\mathcal{V}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, для которых $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \Pi \mathcal{V}(\mathbf{x})$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. *Квадратичный стохастический оператор на симплексе, связанный с кубической стохастической матрицей, сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен (является автоморфизмом симплекса).*

Следующая теорема представляет независимый интерес; ее можно доказать с помощью техники из доказательства леммы 1.

Напомним (см. [9], [10]), что отображение $\mathcal{V}_{\mathbf{F}}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, определенное правилом $\mathcal{V}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$, где

$$x'_k = x_k(1 + f_k(\mathbf{x})), \quad k = 1, \dots, m,$$

называется *оператором Лотки–Вольтерра*, если отображение $\mathbf{F} \equiv (f_1, f_2, \dots, f_m): \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) отображение $\mathbf{F}: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно;
- 2) $f_k(\mathbf{x}) \geq -1$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$ и $k = 1, \dots, m$;
- 3) $\sum_{k=1}^m x_k f_k(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{m-1}$;
- 4) для любого $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ выполнено неравенство $f_k(\mathbf{x}) > -1$ при всех $x \in \text{int } \Gamma_\alpha$, $k \in \alpha$.

ТЕОРЕМА 4. *Оператор Лотки–Вольтерра $\mathcal{V}_{\mathbf{F}}$ на симплексе сюръективен.*

Следует отметить, что оператор Лотки–Вольтерра определяет странную (неэргодическую) динамику (см. [11]–[13]).

Автор выражает благодарность Международному центру теоретической физики (ICTP) г. Триесты (Италия), где была написана эта статья в рамках плана сотрудничества с молодыми учеными, за приглашение и гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, U. Rozikov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **14**:2 (2011), 279–335. [2] А. В. Арутюнов, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:3 (2012), 81–84. [3] Ю. И. Любич, *Математические структуры в популяционной генетике*, Наукова думка, Киев, 1983. [4] N. Ganikhodjaev, M. Saburov, U. Jamilov, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **7**:5 (2013), 1721–1729. [5] N. Ganikhodjaev, M. Saburov, A. M. Nawi, *The Scientific World Journal*, **2014** (2014), Article ID 835069. [6] M. Saburov, Kh. Saburov, *Science Asia*, **40**:4 (2014), 306–312. [7] M. Saburov, Kh. Saburov, *Int. J. Control, Automat. Systems*, **12**:6 (2014), 1276–1282. [8] F. Mukhamedov, M. Saburov, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **4**:1 (2010), 47–62. [9] Р. Н. Ганиходжаев, М. Х. Сабуров, *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, **1**:2 (2008), 188–196. [10] F. Mukhamedov, M. Saburov, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, **37**:1 (2014), 59–64. [11] M. Saburov, *World Appl. Sci. J.*, **21**:1 (2013), 94–97. [12] M. Saburov, *Math. Notes*, **97**:5 (2015), 759–763. [13] M. Saburov, *Ann. Funct. Anal.*, **6**:4 (2015), 247–254.

М. Сабуров
International Islamic University Malaysia
E-mail: msaburov@gmail.com

Поступило
08.07.2015
Исправленный вариант
07.10.2015