Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Булгаков, Асимптотическое представление множеств δ -решений дифференциального включения, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 775–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:02:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ δ-РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

А. И. Булгаков

Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n -мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\text{comp } [\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $B(u, r)$ – открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке u и радиусом $r > 0$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $\bar{U}$ замыкание множества U , со U – выпуклую оболочку множества U ; $U^\varepsilon \equiv \bigcup_{u \in U} \bar{B}(u, \varepsilon)$, если $\varepsilon > 0$, и $U^0 \equiv \bar{U}$; $\|U\| = \sup\{|u| : u \in U\}$.

Пусть $h^+[F_1; F_2] \equiv \sup\{\rho(y; F_2) : y \in F_1\}$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ – расстояние между точкой и множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$, $h[F_1; F_2] = \max\{h^+[F_1; F_2]; h^+[F_2; F_1]\}$ – хаусдорфово расстояние между множествами F_1 и F_2 , содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $C^n[a, b]$ пространство непрерывных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$; $L^1[a, b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)| ds$.

Непрерывность многозначных отображений понимается по Хаусдорфу. Измеримость многозначных отображений понимаем в смысле [1, гл. 8, § 8.1].

Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } [\mathbb{R}^n]$. Будем говорить, что F удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

- а) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо;
- б) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно;
- в) для каждого ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^n$ найдется функция $\beta_U \in L^1[a, b]$ такая, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$ выполняется неравенство $\|F(t, x)\| \leq \beta_U(t)$.

Определим отображение $\varphi: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\varphi(t, x, \delta) = \max_{y \in B(x, \delta)} h[F(t, x); F(t, y)]. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } [\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то отображение $\varphi: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, определенное равенством (1), обладает свойством: для любых $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ функция $\varphi(\cdot, x, \delta)$ измерима; для почти всех $t \in [a, b]$ отображение $\varphi(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно по совокупности аргументов и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \delta \rightarrow 0+0}} \varphi(t, z, \delta) = 0; \quad (2)$$

для любых $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ $\varphi(t, x, \cdot)$ не убывает.

Если отображение F непрерывно по совокупности переменных, то функция φ непрерывна на $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ и

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau, z \rightarrow x \\ \delta \rightarrow 0+0}} \varphi(t, z, \delta) = 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение F удовлетворяет условиям Каратеодори. Прежде всего, согласно определению функция $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ не убывает по третьему аргументу.

Далее, покажем, что отображение $\varphi(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно. Вначале докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $z \in B(x, \delta(\varepsilon)/2)$ выполняется неравенство

$$\varphi\left(t, z, \delta + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) < \varphi(t, x, \delta) + \varepsilon. \quad (4)$$

Действительно, пусть $\nu > 0$ – число, для которого при любых $y_1, y_2 \in \overline{B(x, \delta + \delta_1)}$ ($\delta_1 > 0$), удовлетворяющих неравенству $|y_1 - y_2| < \nu$, имеет место соотношение $h[F(t, y_1); F(t, y_2)] < \varepsilon/3$.

Пусть $\delta(\varepsilon) = \min\{\nu, \delta_1\}$, $z \in \overline{B(x, \delta(\varepsilon)/2)}$ и пусть $p \in B\left(z, \delta + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) \subset \overline{B(x, \delta + \delta(\varepsilon))}$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi\left(t, z, \delta + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) < h[F(t, z); F(t, p)] + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

Из неравенства (5) вытекает оценка

$$\varphi\left(t, z, \delta + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) < h[F(t, x); F(t, p)] + \frac{2}{3}\varepsilon. \quad (6)$$

Пусть для $p_1 \in \overline{B(x, \delta)}$ выполняется неравенство $|p - p_1| < \delta(\varepsilon)$. Тогда из (6) получаем соотношение

$$\varphi\left(t, z, \delta + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) \leq h[F(t, x); F(t, p_1)] + \varepsilon,$$

из которого вытекает оценка (4).

Аналогично доказывается, что для любого $z \in B(x, \delta(\varepsilon)/2)$ выполняется неравенство

$$\varphi(t, x, \delta) < \varphi\left(t, z, \delta - \frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) + \varepsilon. \quad (7)$$

Из неравенств (4), (7) следует непрерывность отображения $\varphi(t, \cdot, \cdot)$.

Подобным образом доказывается равенство (2).

Далее, пусть Q – счетное всюду плотное в шаре $\overline{B(x, \delta)}$ множество. Из равенства

$$\varphi(t, x, \delta) = \sup_{y \in Q} h[F(t, x); F(t, y)]$$

вытекает измеримость $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ по первому аргументу.

Если отображение F непрерывно по совокупности аргументов, то справедливость равенства (3) доказывается аналогично.

Обозначим через $M([a, b] \times (0, \infty))$ множество всех функций $\eta: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющих при почти всех $t \in [a, b]$ равенству $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \eta(t, \varepsilon) = 0$.

Доопределим по непрерывности функцию $\varphi: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, определенную равенством (1), при $\delta = 0$ нулем. Пусть функция $\eta \in M([a, b] \times (0, \infty))$. Будем говорить, что функция φ в точке $\delta = 0$ при фиксированном $t \in [a, b]$ равномерно непрерывна по x на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ относительно функции η , если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, t) > 0$, для которого при всех $x \in U$ выполняется неравенство

$$\varphi(t, x, \delta(\varepsilon, t)) \leq \eta(t, \varepsilon). \quad (8)$$

Если существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство (8), в котором $\delta(\varepsilon, t) \equiv \delta(\varepsilon)$, выполняется при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$, то будем говорить, что функция φ в точке $\delta = 0$ равномерно непрерывна по x на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ относительно функции η . Если функция η для любого $(t, \varepsilon) \in [a, b] \times (0, \infty)$ определена равенством $\eta(t, \varepsilon) = \varepsilon$ и если неравенство (8), в котором $\delta(\varepsilon, t) \equiv \delta(\varepsilon)$, выполняется при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$, то будем говорить, что функция φ в точке $\delta = 0$ равномерно непрерывна по x на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то функция φ равномерно непрерывна в точке 0 по x на всяком компакте $U \subset \mathbb{R}^n$ в каждой точке $t \in [a, b]$, в которой $F(t, \cdot)$ непрерывна. Если отображение F непрерывно по совокупности переменных, то для всякого компакта $U \subset \mathbb{R}^n$ функция φ равномерно непрерывна в точке 0 по (t, x) на множестве $[a, b] \times U$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Определим функцию $\lambda_U: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\lambda_U(t, \delta) = \max_{x \in U} \varphi(t, x, \delta), \quad (9)$$

где функция $\varphi: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ задана соотношением (1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то функция $\lambda_U: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, определенная равенством (9), принадлежит множеству $M([a, b] \times (0, \infty))$ и обладает свойством: для любого $\delta > 0$ функция $\lambda_U(\cdot, \delta)$ суммируема на $[a, b]$, при почти всех $t \in [a, b]$ не убывает и непрерывна по второму аргументу; функция φ равномерно непрерывна в точке $\delta = 0$ по x на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ относительно функции λ_U .

Будем говорить, что функция $\eta \in M([a, b] \times (0, \infty))$ обладает свойством А на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, если η удовлетворяет следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$ $\eta(\cdot, \varepsilon) \in L^1[a, b]$, при почти всех $t \in [a, b]$ функция $\eta(t, \cdot)$ не убывает и функция φ , определенная равенством (1), равномерно непрерывна в точке $\delta = 0$ по x на множестве U относительно функции η .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ непрерывно по совокупности переменных, то функция $\eta: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, определенная равенством $\eta(t, \varepsilon) = \varepsilon$, обладает свойством А на любом компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Далее, если F удовлетворяет условиям Каратеодори и $U \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество, то согласно следствию 2 функция λ_U , определенная равенством (9), обладает свойством А на множестве U .

Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (10)$$

$$\dot{x}(t) \in \text{co } F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (11)$$

где многозначное отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Под решением включения (10) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, при почти всех $t \in [a, b]$ удовлетворяющую включению (10). Обозначим $H_{\text{co}}(\mathcal{B})$ множество всех решений включения (11), принадлежащих множеству $\mathcal{B} \subset C^n[a, b]$.

Пусть $F: [a, b] \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ измеримое отображение. Обозначим $S(F)$ – множество всех измеримых сечений отображения F ; отображение $\text{co } F: [a, b] \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ определим соотношением

$$(\text{co } F)(t) = \text{co } F(t).$$

ЛЕММА 2. Пусть отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{compr} [\mathbb{R}^n]$ измеримо, и пусть существует такая функция $\beta \in L^1[a, b]$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $\|F(t)\| \leq \beta(t)$. Тогда для любой функции $y \in S(\text{co } F)$ найдется такая последовательность функций $y_j \in S(F)$, $j = 1, 2, \dots$, что $y_j \rightarrow y$ слабо в $L^n[a, b]$ при $j \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $j = 1, 2, \dots$ интервалов, равных по мере. Каждый интервал разбиения обозначим I_{ij} , $i = 1, 2, \dots, j$. Согласно теореме 1 из [1, гл. 8, §8.2] для каждого множества I_{ij} , $i = 1, 2, \dots, j$, найдется такая измеримая функция $y_{ij}: I_{ij} \rightarrow \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in I_{ij}$ выполняется включение $y_{ij}(t) \in F(t)$ и соотношение

$$\int_{I_{ij}} y_{ij}(s) ds = \int_{I_{ij}} y(s) ds. \quad (12)$$

Определим последовательность $y_j \in S(F)$, $j = 1, 2, \dots$, равенствами

$$y_j(t) = \begin{cases} y_{1j}(t), & \text{если } t \in I_{1j}, \\ \dots & \\ y_{jj}(t), & \text{если } t \in I_{jj}. \end{cases}$$

Из определения последовательности y_j , $j = 1, 2, \dots$, и равенств (12) следует, что $y_j \rightarrow y$ слабо в $L^n[a, b]$ при $j \rightarrow \infty$.

Пусть функция $\eta: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. В отличие [2, гл. 2, § 7, п. 1] под δ -решением включения (10) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, при почти всех $t \in [a, b]$ удовлетворяющую включению

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))^{\eta(t, \delta)}.$$

Обозначим через $H_\delta(\mathcal{B})$ множество всех δ -решений включения (10), принадлежащих множеству $\mathcal{B} \subset C^n[a, b]$.

Пусть $\mathcal{B}$ – ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$. Далее, обозначим $U(\mathcal{B}) = \{x(t) : x \in \mathcal{B}, t \in [a, b]\}$.

ТЕОРЕМА. Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, и функция $\eta: [a, b] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ обладает свойством А на множестве $U(\mathcal{B})$. Тогда имеет место равенство

$$H_{\text{co}}(\mathcal{B}) = \bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}, \quad (13)$$

где $\overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества $H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $H_{\text{co}}(\mathcal{B}) \subset \bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}$. Пусть $x \in H_{\text{co}}(\mathcal{B})$. Покажем, что для любого $\tau > 0$ и для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $y \in H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)$, для которого справедливо неравенство $\|x - y\|_C < \tau$. Согласно лемме 2 для $\dot{x}$ найдется такая последовательность суммируемых функций $y_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $y_i(t) \in F(t, x(t))$ и $y_i \rightarrow \dot{x}$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, определена равенствами

$$x_i(t) = x(a) + \int_a^t y_i(s) ds.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как функция η обладает свойством А, из определения последовательности x_i , $i = 1, 2, \dots$, получаем, что найдется такой номер $i(\varepsilon, \delta)$, для которого при всех $i \geq i(\varepsilon, \delta)$ выполняется включение $x_i \in \mathcal{B}^\varepsilon$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$\rho(\dot{x}_i(t); F(t, x_i(t))) \leq h(F(t, x(t)); F(t, x_i(t))) \leq \varphi(t, x(t), \|x_i - x\|_C) \leq \eta(t, \delta).$$

Таким образом, для любого $i \geq i(\varepsilon, \delta)$ x_i – δ -решение включения (10), принадлежащее множеству $\mathcal{B}^\varepsilon$.

Пусть теперь $\bar{i}$ – такое число, для которого справедливы неравенства $\|x - x_{\bar{i}}\|_C < \tau$ и $\bar{i} \geq i(\varepsilon, \delta)$. Тогда $y = x_{\bar{i}}$ – требуемое δ -решение включения (10). Поэтому для любых $\varepsilon, \delta > 0$ $x \in \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}$ и, следовательно, $H_{\text{co}}(\mathcal{B}) \subset \bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}$.

Покажем теперь, что $\bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)} \subset H_{\text{co}}(\mathcal{B})$. Действительно, пусть $x \in \bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)}$. Это означает, что для любого $i = 1, 2, \dots$ найдется $x_i \in H_{\frac{1}{i}}(\mathcal{B}^{1/i})$, удовлетворяющий неравенству $\|x - x_i\|_C < 1/i$. Так как $\rho_C[x_i, \mathcal{B}] \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, где $\rho_C[\cdot, \cdot]$ – расстояние от точки до множества в пространстве $C^n[a, b]$, то $x \in \mathcal{B}$. В силу того, что

$$\int_a^b \eta\left(t, \frac{1}{i}\right) dt \rightarrow 0,$$

из [2, гл. 2, § 7, п. 5 леммы 3] вытекает, что $x \in H_{\text{co}}(\mathcal{B})$, т.е. $\bigcap_{\delta, \varepsilon > 0} \overline{H_\delta(\mathcal{B}^\varepsilon)} \subset H_{\text{co}}(\mathcal{B})$.

Таким образом, равенство (13) справедливо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть V – оператор интегрирования, а N – многозначный оператор Немыцкого, порожденный отображением F . Если найдется такой элемент $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что для замкнутого множества $B \subset C^n[a, b]$ выполняется включение $\mathcal{M}(B) \subset B$, где отображение $\mathcal{M}: C^n[a, b] \rightarrow {}_2C^n[a, b]$ задано равенством

$$\mathcal{M}x = x_0 + VNx,$$

и если выполняются условия теоремы, то в этом случае выполняется равенство

$$H_{\text{co}}(B) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\delta}(B)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если отображение F непрерывно по совокупности переменных и $\eta(t, \varepsilon) = \varepsilon$, то теорема уточняет теорему 2.2 из [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что равенства $\overline{H(B)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\delta}(B)}$, где $\overline{H(B)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества решений включения (10), принадлежащих множеству B , в общем случае может и не быть (см. пример в [4, гл. 2, § 7, п. 3]). Это равенство выполняется, когда, например, отображение F удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу (см. [5]).

Автор благодарен Е. С. Жуковскому за обсуждение результата работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. Hermes H. // Adv. Math. 1970. V. 4. № 2. P. 149–169.
4. Plis A. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math., astr., phys. 1963. V. 11. № 6. P. 369–370.
5. Филиппов А. Ф. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 3. С. 16–26.