Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, Эргодические теоремы для действий свободной группы и свободной полугруппы, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 779–783

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:23:32

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ И СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Р. И. Григорчук

1. Введение. Подобно тому как теорема Вейля о равномерном распределении на окружности предшествовала появлению эргодических теорем Биркгофа и фон Неймана, теорема Арнольда и Крылова [1] о равномерном распределении на сфере предшествовала эргодическим теоремам для действий некоммутативных групп преобразований.

Вначале были доказаны: статистическая эргодическая теорема для действий аменабельных групп, индивидуальная эргодическая теорема для действий аменабельных групп, удовлетворяющих условию Кальдерона [2], и статистическая эргодическая теорема для унитарных представлений свободной группы [3].

В 1987 году автор анонсировал индивидуальную эргодическую теорему для действий свободной группы [4], а в 1994 году аналогичный результат был переоткрыт в [5]. При этом был определен новый тип усреднения в конечно порожденных группах: рассмотрение чезаровских средних последовательности усреднений по сферическим подмножествам.

В этой заметке мы анонсируем несколько утверждений, носящих характер индивидуальной и статистической эргодических теорем для действий свободной группы и свободной полугруппы. Эти результаты докладывались на конференции по теории случайных блужданий и теории потенциала, проходившей в Кортоне (Италия) в июне 1997 года.

Основным новшеством в сформулированных ниже утверждениях является предположение о стационарности меры, а не более сильное условие ее инвариантности, обычно налагаемое в формулировках эргодических теорем. Наличие эргодических теорем в предположении стационарности меры является важным обстоятельством, что продиктовано текущими задачами. Например, стационарные меры возникают при рассмотрении границ Пуассона конечно порожденных групп, а также при исследовании статистических свойств фрактальных множеств. Существенным обстоятельством является также то, что инвариантная мера при действии неаменабельной группы на компакте обычно не существует, в то время как стационарная мера существует.

2. Индивидуальная эргодическая теорема для действия свободной полугруппы. Пусть X – пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств, $T = \{T_1, \dots, T_m\}$ – набор измеримых преобразований пространства X , $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ – распределение вероятностей. Назовем *марковским оператором на функциях* оператор M , действующий на функции по формуле:

$$(Mf)(x) = \sum_{i=1}^m p_i f(T_i x).$$

Аналогично определяется *марковский оператор на мерах*:

$$M\mu = \sum_{i=1}^m p_i T_i \mu,$$

где $(T\mu)(A) = \mu(T^{-1}A)$ для преобразования T и измеримого подмножества $A \subset X$.

Мера μ называется *P-стационарной*, если $M\mu = \mu$. Очевидно, что мера, инвариантная относительно каждого из преобразований T_i , $1 \leq i \leq m$, является стационарной.

Породив преобразованиями T_i , $1 \leq i \leq m$, полугруппу преобразований, получим действие на X (вообще говоря, неточное) свободной полугруппы $G = FS_m$ с m порождающими (единица предполагается принадлежащей G). Элементы полугруппы $FS_m = \langle T_1, \dots, T_m \rangle$ отождествляются со словами над алфавитом $\{T_1, \dots, T_m\}$. Пусть $|g|$ – длина элемента $g \in FS_m$. Имеется m^n элементов длины n , составляющих “сферу” радиуса n .

Определим последовательность распределений $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ на G : $P_n(g) = 0$, если $|g| \neq n$, и $P_n(g) = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n}$, если $g = T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_n}$. При этом P_1 совпадает с исходным распределением P .

Для произвольной функции f на X определим средние по сферам

$$M_n f = \sum_{|g|=n} P_n(g) \cdot (gf) \quad (1)$$

и чезаровские средние

$$C_n f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i f \quad (2)$$

(заметим, что $M_0 = 1$, $M_1 = M$ и $(gf)(x) = f(gx)$). Для равномерного распределения $P = \{1/m, \dots, 1/m\}$ средние (1) имеют вид:

$$M_n f = \frac{1}{m^n} \sum_{|g|=n} gf.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть свободная полугруппа $G = FS_m$ с m порождающими действует на пространстве с мерой (X, μ) и мера μ P -стационарна.

Тогда для любого p , $1 \leq p < +\infty$, и произвольной функции $f \in L_p(X, \mu)$ средние (2) сходятся μ -почти непрерывно к некоторой M -инвариантной функции $\tilde{f} \in L_p(X, \mu)$, причем если $\mu(X) < \infty$, то выполнено равенство

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X \tilde{f}(x) d\mu(x).$$

Также во всех случаях имеет место сходимость средних (2) к $\tilde{f}$ по норме и функция $\tilde{f}$ является G -инвариантной.

3. Индивидуальные и статистические теоремы для действий свободной группы. Пусть $G = F_m$ – свободная группа с m свободными порождающими $T_1, \dots, T_m$, действующая измеримыми преобразованиями на пространстве X (а следовательно, действующая на функции и на меры на X) или изометриями банахова пространства E . Во избежание громоздких обозначений будем обозначать через $gx, gf, g\mu, gh$ образ точки $x \in X$, функции f меры μ или вектора $y \in E$ под действием элемента $g \in G$, при этом $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$, $(g\mu)(A) = \mu(g^{-1}A)$.

Через $|g|$ обозначим длину g относительно системы порождающих (т.е. длину записи элемента g несократимым словом в алфавите $\{T_1, \dots, T_m, T_1^{-1}, \dots, T_m^{-1}\}$). Заметим, что имеется $2m \times (2m - 1)^{n-1}$ элементов длины n , составляющих “сферу” радиуса n .

Мера μ на X называется *стационарной*, если

$$\mu = \frac{1}{2m} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{i=1}^m T_i^\varepsilon \mu.$$

По аналогии с полугрупповым случаем определим операторы усреднения по сферам и соответствующие им чезаровские средние:

$$M_n = \frac{1}{2m(2m-1)^{n-1}} \sum_{|g|=n} g,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть свободная группа $G = F_m$ с $m \geq 2$ образующими действует на пространстве (X, μ) и мера μ – стационарна.

Тогда гильбертово пространство $H = L_2(X, \mu)$ допускает разложение $H = H_{-1} \oplus H_0 \oplus H_1$, где H_1 – подпространство G -инвариантных функций, подпространство H_{-1} определяется соотношением

$$H_{-1} = \{f \in H : Mf = -f\},$$

а на подпространстве H_0 последовательность операторов M_n сильно сходится к нулевому оператору.

ТЕОРЕМА 3. Пусть свободная группа $G = F_m$ с $m \geq 1$ образующими действует изометриями в рефлексивном банаховом пространстве E .

Тогда для любого $x \in E$ средние $C_n x$ сходятся к некоторому M -инвариантному вектору $y \in E$. Если E строго выпукло, то y является G -инвариантным.

Переходим к формулировке индивидуальной эргодической теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть свободная группа $G = F_m$ с $m \geq 1$ образующими действует на пространстве (X, μ) и мера μ стационарна.

Тогда имеют место все утверждения теоремы 1.

4. О доказательствах. В доказательстве теоремы 2 используется теорема о существовании унитарного степенного продолжения у произвольного сжатия в гильбертовом пространстве.

Доказывая теорему 3, мы применяем теорему Иосиды–Какутани–Рисса–Лорча к матричному оператору

$$\frac{1}{2m-1} \begin{pmatrix} T_1 & 0 & T_2 & T_2^{-1} & \dots & T_m & T_m^{-1} \\ 0 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} & \dots & T_m & T_m^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} & \dots & T_m & 0 \\ T_1 & T_1^{-1} & T_2 & T_2^{-1} & \dots & 0 & T_m^{-1} \end{pmatrix},$$

действующему в пространстве $E \oplus \dots \oplus E$ ($2m$ слагаемых).

При доказательстве индивидуальных эргодических теорем 1, 4 применяется теорема Биркгофа и ее усиления для сжимающих операторов в форме теорем Данфорда–Шварца или Чакона и Акого. Редукция к классическим теоремам основана на конструкции скрещенного произведения динамической системы, порожденной несколькими преобразованиями на подходящий сдвиг Бернулли. Так, например, при доказательстве теоремы 1 используется скрещенное произведение $(Q, X \times \Omega_m, \mu \times \nu)$, $Q(x, \omega) = (T_\omega x, \sigma\omega)$, динамической системы $(T_1, \dots, T_m, X; \mu)$ на сдвиг Бернулли (σ, Ω_m) , где $\Omega_m = \{T_1, \dots, T_m\}^{\mathbb{N}}$, ν – мера Бернулли, определенная распределением T_ω , а T_ω совпадает с преобразованием T_i , если последовательность ω начинается с символа T_i . При этом, в качестве вспомогательных, фигурируют следующие два утверждения.

ЛЕММА 1. *Мера μ является P -стационарной тогда и только тогда, когда мера $\mu \times \nu$ Q -инвариантна.*

ЛЕММА 2. *Динамическая система $(T_1, \dots, T_m, X; \mu)$ эргодична в том и только том случае, если преобразование Q эргодично.*

При доказательстве теоремы 4 используется тот же прием, однако вместо пространства Ω_m рассматривается пространство Ω_m^* , состоящее из свободно несократимых последовательностей символов алфавита $\{T_1, \dots, T_m, T_1^{-1}, \dots, T_m^{-1}\}$, снабженное равномерной мерой, т.е. мерой, определенной на цилиндрических множествах соотношением

$$\mu(\overline{T_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots T_{i_n}^{\varepsilon_n}}) = \frac{1}{2m(2m-1)^{n-1}}.$$

5. Энтропия системы некоммутирующих преобразований. Пусть $(T_1, \dots, T_m, X; \mu)$ – динамическая система, порожденная преобразованиями $T_1, \dots, T_m$ пространства X (и тем самым определено действие свободной полугруппы $G = FSm = \langle T_1, \dots, T_m \rangle$), причем мера μ является P -стационарной относительно некоторого распределения вероятностей P . Если W – слово над алфавитом $\{T_1, \dots, T_m\}$, определяющее элемент полугруппы G , а ξ – разбиение пространства X , то через ξ_W обозначим разбиение $\bigvee_{U < W} T_U^{-1}\xi$, где U пробегает множество начал слова W и $T_U = T_{i_1} \dots T_{i_k}$, если $U = T_{i_1} \dots T_{i_k}$.

Пусть $H(\xi)$ обозначает энтропию разбиения ξ , т.е.

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^l \mu(A_i) \log \mu(A_i),$$

где $\{A_i\}_{i=1}^l$ есть множество атомов разбиения ξ .

Определим энтропию набора $\overline{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ относительно разбиения ξ как

$$h(\overline{T}, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{|W|=n} P_n(W) H(\xi_W), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем словам длины n , а P_n – последовательность распределений, определенная в п. 2. В случае равномерного распределения соотношение (3) приобретает вид

$$h(\overline{T}, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{|W|=n} H(\xi_W).$$

Наконец, определим энтропию набора $\overline{T}$ равенством $h(\overline{T}) = \sup_{\xi} h(\overline{T}, \xi)$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место соотношение $h(\overline{T}) = h(Q) - h(\sigma)$, где Q – скрещенное произведение динамической системы $(\overline{T}, X, \mu)$ на сдвиг Бернулли (σ, Ω_m, ν) , определенное в п. 4, а $h(\sigma) = - \sum p_i \log p_i$ – энтропия сдвига Бернулли.*

Отметим, что понятие топологической энтропии набора преобразований $\overline{T}$ компактного метрического пространства введено Буфетовым в [6], где также получена формула, аналогичная соотношению из теоремы 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Крылов А. Л. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 4. № 1. С. 1–5. 2. Темпельман А. А. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 2. С. 190–193. 3. Guivarc'h Y. // Comptes Rendus Acad. Sci. 1969. V. 268. P. 1020. 4. Григорчук Р. И. Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп // Тезисы докладов XII школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. 1. Тамбов, 1987. С. 57. 5. Nevo A., Stein E. M. // Acta Math. 1994. V. 173. P. 135–154. 6. Bufetov A. Topological entropy of free semigroup actions and skew-product transformations // Dynamical and Control Systems. To appear..

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
25.12.1998