Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, О некоторых свойствах одного класса диагонализуемых состояний неймановских алгебр, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 350–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:03:35

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ДИАГОНАЛИЗУЕМЫХ СОСТОЯНИЙ НЕЙМАНОВСКИХ АЛГЕБР

Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов

В данной работе строится один класс представлений равномерно гиперфинитных алгебр и изучаются соответствующие им алгебры фон Неймана. Доказано, что марковские состояния при некоторых условиях порождают в представлении ГНС факторы типа III_λ , где $\lambda \in (0, 1)$, что дает отрицательный ответ гипотезе о том, что факторы соответствующие гамильтонианам с нетривиальными взаимодействиями, имеют тип III_1 . Показано, что для одного класса гамильтонианов существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. В данной работе строится один класс представлений равномерно гиперфинитных алгебр и изучаются соответствующие им алгебры фон Неймана. Серию представлений, построенных Пауэрсом [1] по product-мерам, можно трактовать как свободную решетчатую квантовую спиновую систему с двумя состояниями в каждой точке, причем первое состояние занято с вероятностью p , а второе – с вероятностью $q = 1 - p$; тогда соответствующая алгебра фон Неймана является фактором типа III_λ , где $\lambda = p/q$.

В [2] высказывается предположение, что “по-видимому (в настоящее время не доказано), пример Пауэрса [1] является нетипичным для квантовых спиновых систем (с нетривиальными взаимодействиями) и всегда следует ожидать появления факторов типа $\text{III}_1 \dots$ ”.

Во втором пункте приводятся необходимые сведения из теории алгебр фон Неймана. В третьем пункте данной работы приводится пример, опровергающий вышеупомянутую гипотезу. В четвертом пункте доказывается единственность трансляционно-инвариантного основного состояния для одного класса гамильтонианов.

2. Предварительные сведения и определения. В этом пункте приведем некоторые необходимые факты из теории алгебр фон Неймана. Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H (над полем комплексных чисел).

Замкнутая в слабой операторной топологии $*$ -подалгебра M в $B(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она содержит тождественный оператор 1. Через $\text{Proj}(M)$ обозначается множество всех проекторов на M . Алгебру фон Неймана называют *фактором*, если ее центр $Z(M) = \{x \in M : xy = yx \ \forall y \in M\}$ тривиален, т.е.

$$Z(M) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Алгебры фон Неймана классифицируются по типам I ($I_n, n < \infty, I_\infty$), II (II_1, II_∞) и III (подробности можно найти, например, в [3], [4]).

Пусть M – алгебра фон Неймана. Линейное биективное отображение $\alpha: M \rightarrow M$ называется **-автоморфизмом*, если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ для всех $x, y \in M$. Линейный функционал ω на M называется *положительным*, если $\omega(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in M$. Положительный функционал ω на M с $\|\omega\| = 1$ называется *состоянием*. Состояние ω называется *следом*, если $\omega(xy) = \omega(yx)$ для всех $x, y \in M$.

Пусть M – фактор и ω – точное нормальное состояние на M (см. [4, определение 2.4.20]) и σ_t^ω – модулярная группа, ассоциированная с ω на M (см. [4, определение 2.5.15]). Через $\Gamma(\sigma^\omega)$ обозначим спектр Конна модулярной группы σ_t^ω (см. [4], [5, определение 2.2.1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [5]. Фактор M имеет тип:

- (i) III_1 , если $\Gamma(\sigma^\omega) = \mathbb{R}$;
- (ii) III_λ , если $\Gamma(\sigma^\omega) = \{n \ln \lambda, n \in \mathbb{Z}\}, \lambda \in (0, 1)$;
- (iii) III_0 , если $\Gamma(\sigma^\omega) = \{0\}$.

Рассмотрим C^* -алгебру $A = \bigotimes_{\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C})$, где $M_2(\mathbb{C})$ – алгебра матриц 2×2 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Взаимодействием* называется функция Φ , сопоставляющая конечным подмножествам $X \subset \mathbb{Z}$ самосопряженные элементы A такие, что $\Phi(X) \in A_X$ ($= \bigotimes_{x \in X} M_2(\mathbb{C})$). Заметим, что конечным подмножествам $X \subset \mathbb{Z}$ отвечают полные матричные алгебры $\bigotimes_{x \in X} A_x, A_x = M_2(\mathbb{C})$, которые изоморфны подалгебрам $A_X \subset A$, а потому и (формально) отождествляются с ними. Каждое $\Phi(X)$ представляет энергию взаимодействия множества всех частиц в конечном подмножестве X . Общая энергия $H_\Phi(\Lambda)$ в объеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ определяется как

$$H_\Phi(\Lambda) = \sum_{X \subseteq \Lambda} \Phi(X),$$

и она называется *гамильтонианом, ассоциированным с Λ* . Через H_Φ обозначается энергия системы, т.е. $H_\Phi = H_\Phi(\mathbb{Z})$. В этом случае H_Φ рассматривается как формальный ряд. Положим

$$A_{\text{loc}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigotimes_{j=-n}^n M_2(\mathbb{C}).$$

Предположим, что для гамильтониана H_Φ можно определить однопараметрическую группу автоморфизмов на A следующим образом:

$$\gamma_t(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}} e^{itH_\Phi(\Lambda)} x e^{-itH_\Phi(\Lambda)},$$

где $t \in \mathbb{R}$ и x из A . Состояние ω на A называется *основным состоянием* относительно H_Φ , если выполнено условие

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \omega(x^* \gamma_t(x)) \Big|_{t=0} \geq 0$$

для всех x из A_{loc} .

Напомним, что некоммутативное марковское состояние впервые было введено в [6] и определяется следующим образом (см. [6]): пусть N – алгебра матриц $n \times n$, $\varphi_1(\cdot) = \text{tr}(\rho(\cdot))$ – состояние на N , где tr – след на N и ρ – положительный оператор с единичным следом. Пусть $T: N \rightarrow N$ – линейное отображение такое, что $\varphi_1(x) = \varphi_1(Tx)$ для всех $x \in N$. В алгебре

$$\bigotimes_n N = \underbrace{N \otimes N \otimes \cdots \otimes N}_n$$

определяется линейный функционал

$$\varphi_n(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varphi_1(a_1 T(a_2(\dots T(a_n) \dots))).$$

Если отображение T таково, что φ_n – состояние, то говорят, что φ_n является *марковским состоянием*. В алгебре $\bigotimes^\infty N = \bigcup_n \bigotimes^n N$ марковское состояние определяется как $\varphi_\infty = \bigcup_{k=1}^\infty \varphi_k$. Заметим, что более общее определение марковского состояния было введено в [7].

Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ – стохастическая матрица, т.е. $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^2 p_{ij} = 1$, $i = 1, 2$, такая, что $p_{ij} > 0$ для всех i и j . Пусть далее $\pi = (p_1, p_2)$ – вектор такой, что $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, и $\pi P = \pi$, а $e_1 (= e_{11})$, $e_2 (= e_{22})$, $e_3 (= e_{12})$, $e_4 (= e_{21})$ – матричные единицы алгебры $M_2(\mathbb{C})$. Через $\mathcal{C}M_2(\mathbb{C})$ обозначим коммутативную подалгебру $M_2(\mathbb{C})$, порожденную элементами e_1 и e_2 .

Рассмотрим C^* -алгебру $A = \bigotimes_{\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C})$ и положим $\mathcal{C}A = \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}M_2(\mathbb{C})$. Элементы коммутативной алгебры $\mathcal{C}A$ будем представлять как функции на пространстве $\Omega = \{e_1, e_2\}^{\mathbb{Z}}$. Пусть на измеримом пространстве (Ω, Σ) задана мера μ , где Σ – σ -алгебра, порожденная конечномерными цилиндрическими подмножествами Ω . Построим состояние ω_μ на A следующим образом. Положим $\omega_\mu(x) = 0$, если тензорный одночлен x от матричных единиц e_i , $i = 1, \dots, 4$, содержит, по крайней мере, одну частичную изометрию. Если же $x \in \mathcal{C}A$, то положим

$$\omega_\mu(x) = \int_{\Omega} x d\mu.$$

Состояние, построенное таким образом, было введено в [8], и называлось *диагональным*.

Рассмотрим *марковскую меру* μ_P на (Ω, Σ) , определенную с помощью стохастической матрицы P следующим образом:

$$\mu_P\{x = (x_n) \in \Omega \mid x_{k+1} = e_{i_1}, x_{k+2} = e_{i_2}, \dots, x_{k+n} = e_{i_n}\} = p_{i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}, \quad (1)$$

где $i_k \in \{1, 2\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Через ω_P обозначим диагональное состояние, порожденное марковской мерой μ_P . Отметим, что состояние ω_P является марковским состоянием на A . Действительно, в нашем случае $N = M_2(\mathbb{C})$, $\rho = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, а $T: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ определяется следующим образом:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a + p_{12}d & 0 \\ 0 & p_{21}a + p_{22}d \end{pmatrix}.$$

Через $e_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, обозначим матричные единицы алгебры $M_2(\mathbb{C})$, находящиеся на n -м месте в произведении $\bigotimes_{\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C})$. Тогда $*$ -автоморфизм $\beta: A \rightarrow A$ называется *сдвигом*, если для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеет место $\beta(e_i^{(n)}) = e_i^{(n+1)}$. Состояние ω на A называется *трансляционно-инвариантным*, если выполнено равенство

$$\omega(\beta(x)) = \omega(x) \quad \text{для всех } x \in A.$$

Заметим, что марковское состояние ω_P является трансляционно-инвариантным.

3. О типе алгебры фон Неймана, порождаемой марковским состоянием при ассоциированном представлении. Рассмотрим на C^* -алгебре $A = \bigotimes_{\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C})$ марковское состояние ω_P , определенное с помощью стохастической матрицы $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$. На конечномерной C^* -подалгебре $A_{[-n,n]} \subset A$ перепишем состояние ω_P в виде

$$\omega_P(x) = \frac{\text{tr}(e^{H([-n,n], \partial)} x)}{\text{tr}(e^{H([-n,n], \partial)})}, \quad x \in A_{[-n,n]}, \quad (2)$$

где tr – след на $A_{[-n,n]}$. Из (1), пользуясь результатом [9, гл. 1, § 2, п. 1], вид гамильтониана $H([-n,n], \partial)$ в стандартном базисе в $A_{[-n,n]}$ (т.е. относительно матричных единиц) представляется как

$$H([-n,n], \partial) = - \sum_{i=-n}^{n-1} \Phi_{i,i+1} + \left(\begin{array}{cc} \ln p_1 & 0 \\ 0 & \ln p_2 \end{array} \right) \bigotimes_{i=-n+1}^n 1, \quad (3)$$

$$\Phi_{i,i+1} = \begin{pmatrix} \ln p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln p_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln p_{22} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_{i,i+1} \in A_{[i,i+1]}$, т.е. оно записывается следующим образом:

$$\Phi_{i,i+1} = \sum_{m,l=1}^2 \ln p_{ml} e_m^{(i)} \otimes e_l^{(i+1)}. \quad (4)$$

Известно (см. [10], [11]), что на $\mathbb{Z}$ для потенциалов конечного радиуса взаимодействия существует единственное предельное гиббсовское состояние. В силу этого потенциалу

$$H = - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi_{i,i+1},$$

который далее будем называть *марковским гамильтонианом*, отвечает единственное предельное гиббсовское состояние ω на A . В силу (2) и единственности предельного состояния ω следует, что $\omega = \omega_P$. Следовательно, ω_P является фактор-состоянием (см. [10, теорема 5.3.30]). Положим $M = \pi_{\omega_P}(A)''$, где π_{ω_P} – представление, ассоциированное с состоянием ω_P (см. [4, определение 2.3.18]). Определим теперь тип фактора M . Модулярная группа на M определяется следующим образом:

$$\sigma_t^{\omega_P}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}} e^{itH(\Lambda)} x e^{-itH(\Lambda)}.$$

Существование этого предела доказано в [10, теорема 6.2.4]. Через M_{ω_P} обозначим централизатор состояния ω_P , который определяется как

$$M_{\omega_P} = \{x \in M : \omega_P(xy) = \omega_P(yx) \text{ для всех } y \in M\}. \quad (5)$$

Так как гиббсовское состояние ω_P является точным нормальным состоянием на M и гамильтониан определяет модулярную группу, отсюда следует совпадение централизатора M_{ω_P} точного нормального состояния ω_P с подалгеброй неподвижных точек соответствующей модулярной группы (см. [10, предложение 5.3.28]):

$$M^\sigma = \{x \in M : \sigma_t^{\omega_P}(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Через $\Pi[n]$ обозначим группу перестановок множества $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$, состоящую из элементов γ таких, что

$$\gamma(k) = k \quad \forall k \in \{-n, n\}.$$

Каждый элемент $\gamma \in \Pi[n]$ определяет автоморфизм $\alpha_\gamma : M \rightarrow M$, который определяется следующим образом:

$$\alpha_\gamma \left(\bigotimes_{k \in [-n, n]} a_k \right) = \bigotimes_{k \in [-n, n]} a_{\gamma(k)}, \quad \alpha_\gamma|_{\bigotimes_{k \notin [-n, n]} M_q(\mathbb{C})} = \text{id}. \quad (6)$$

Обозначим

$$\mathcal{S}_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\alpha_\gamma \mid \gamma \in \Pi[n]\}.$$

В [12] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Группа

$$G_0 = \{\alpha \in \mathcal{S}_0 \mid \omega_P(\alpha(x)) = \omega_P(x) \quad \forall x \in M\}$$

действует эргодическим образом на M , т.е. из равенства $\alpha(x) = x \quad \forall \alpha \in G_0$ следует $x = \theta \mathbf{1}$, $\theta \in \mathbb{C}$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ — стохастическая матрица такая, что $p_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$, и хотя бы один элемент этой матрицы отличен от $1/2$, и пусть ω_P — соответствующее матрице P марковское состояние на A . Тогда M^σ есть фактор типа II_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения автоморфизма α_γ (см. (6)) следует, что каждый автоморфизм $\alpha \in G_0$ является внутренним, т.е. существует унитарный оператор $u_\alpha \in M$ такой, что $\alpha(x) = u_\alpha x u_\alpha^*$, $x \in M$. Из условия $\omega_P \circ \alpha = \omega_P$ находим

$$\omega_P(u_\alpha x u_\alpha^*) = \omega_P(x) \quad \forall x \in M.$$

Из (5) следует, что $u_\alpha \in M_{\omega_P}$. В силу предложения 3.1 группа G_0 действует эргодическим образом, т.е. из справедливости равенства $u_\alpha x = x u_\alpha$ для всех $\alpha \in G_0$ следует, что $x = \theta \mathbf{1}$, $\theta \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\{u_\alpha \mid \alpha \in G_0\}' = \mathbb{C} \mathbf{1}$. Из включения $M^{\sigma'} \subset \{u_\alpha\}'$ получим

$$M^{\sigma'} \cap M = \mathbb{C} \mathbf{1}.$$

В частности, $M^{\sigma'} \cap M^\sigma = \mathbb{C} \mathbf{1}$. Это означает, что M^σ есть фактор. Из того, что сужение состояния ω_P на M_{ω_P} есть след и из включения $\mathbb{C} \mathbf{1} \subset M^\sigma$ находим, что M^σ имеет тип II_1 . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичная лемма для более общего класса марковских состояний была доказана в [13].

Известно (см. [5, предложение 2.2.2]), что спектр Конна $\Gamma(\alpha)$ группы автоморфизмов $\alpha = \{\alpha_g\}_{g \in G}$ алгебры фон Неймана M имеет следующий вид:

$$\Gamma(\alpha) = \cap \{ \text{Sp}(\alpha^e) \mid e \in \text{Proj}(Z(M^\alpha)), e \neq 0 \}, \quad (7)$$

где $Z(M^\alpha)$ – центр подалгебры

$$M^\alpha = \{x \in M : \alpha_g(x) = x \ \forall g \in G\},$$

$\alpha^e(x) = \alpha(exe)$, $x \in eMe$. Здесь $\text{Sp}(\alpha)$ – спектр Арвеса группы автоморфизмов α (см. более подробно [5], [14]). Из леммы 3.1 следует, что $Z(M^\sigma) = \mathbb{C}1$. Отсюда в силу равенства (7) имеем $\Gamma(\sigma^{\omega_P}) = \text{Sp}(\sigma^{\omega_P})$.

Пусть $\Lambda = [-n, n]$ и рассмотрим

$$H(\Lambda) = \sum_{i=-n}^n \Phi_{i,i+1}.$$

Через $\text{Sp}(H(\Lambda))$ обозначим спектр $H(\Lambda)$. Если положить

$$\sigma_t^{\omega_P, \Lambda}(x) = e^{itH(\Lambda)} x e^{-itH(\Lambda)},$$

то

$$\text{Sp}(\sigma^{\omega_P, \Lambda}) = \text{Sp}(H(\Lambda)) - \text{Sp}(H(\Lambda)) = \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in \text{Sp}(H(\Lambda))\}.$$

Положим $\lambda_1 = \ln p_{11}$, $\lambda_2 = \ln p_{12}$, $\lambda_3 = \ln p_{21}$, $\lambda_4 = \ln p_{22}$. Поскольку $H(\Lambda)$ имеет следующий вид:

$$H(\Lambda) = \sum_{i=-n}^{n-1} \bigotimes_{j \notin \{i, i+1\}} 1 \otimes \Phi_{i,i+1},$$

из (3) следует, что $\text{Sp}(\sigma^{\omega_P, \Lambda})$ порождается элементами вида

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_3 - \lambda_4.$$

Так как

$$\frac{p_{11}}{p_{22}} = \frac{p_{11}}{p_{12}} \frac{p_{12}}{p_{22}}, \quad \frac{p_{12}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} \frac{p_{22}}{p_{21}},$$

то $\text{Sp}(H(\Lambda))$ порождается

$$\ln \frac{p_{11}}{p_{12}}, \ln \frac{p_{11}}{p_{21}}, \ln \frac{p_{12}}{p_{22}}, \ln \frac{p_{21}}{p_{22}}.$$

Если существует такое наименьшее $\lambda \in (0, 1)$, что

$$\frac{p_{11}}{p_{12}} = \lambda^{m_1}, \quad \frac{p_{11}}{p_{21}} = \lambda^{m_2}, \quad \frac{p_{12}}{p_{22}} = \lambda^{m_3}, \quad \frac{p_{21}}{p_{22}} = \lambda^{m_4}, \quad (8)$$

где $m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, 4$, то $\text{Sp}(H(\Lambda)) = \{n \ln \lambda\}_{n=-m}^m$, откуда следует, что

$$\text{Sp}(\sigma^{\omega_P}) = \{n \ln \lambda\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Таким образом, в этом случае $\pi_{\omega_P}(A)''$ имеет тип III $_\lambda$ и, если условие (8) не имеет места, то из $\Gamma(\sigma^{\omega_P}) \neq 0$ следует, что $\Gamma(\sigma^{\omega_P}) = \mathbb{R}$. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^2$ – стохастическая матрица такая, что $p_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$, и хотя бы один элемент этой матрицы отличен от $1/2$, и пусть ω_P – соответствующее матрице P марковское состояние. Если существует наименьшее $\lambda \in (0, 1)$ такое, что справедливо (8), то $\pi_{\omega_P}(A)''$ – фактор типа III_λ , а в противном случае – фактор типа III_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если все элементы стохастической матрицы P равны $1/2$, то для соответствующего марковского состояния ω_P фактор $\pi_{\omega_P}(A)''$ имеет тип II_1 (см. [15]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассматриваемые здесь марковские состояния отличны от состояний, изученных в [16]. Действительно, пусть ω_R – состояние на алгебре канонических антикоммутирующих соотношений (КАС), построенное по положительному сжатию $\mathcal{R} = q\mathbf{1} + A$, где $0 < q < 1/2$ и A – оператор Гильберта–Шмидта. Тогда состояние $\omega_{\mathcal{R}}$ порождает модулярную группу $\sigma^{\omega_{\mathcal{R}}}$ со спектром Арвесона, который может быть достаточно сложным в зависимости от A , и, в то же время, спектр Конна имеет вид $\{(q/(1-q))^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Таким образом, это состояние определяет фактор типа III_λ , где $\lambda = q/(1-q)$.

Пусть $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Положим

$$(l_1, l_2) = \max \left\{ |l| : \frac{l_1}{l} \in \mathbb{Z}, \frac{l_2}{l} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Обозначим

$$\frac{p_{11}}{p_{12}} = e^{-l_1}, \quad \frac{p_{11}}{p_{21}} = e^{-l_2}, \quad \frac{p_{12}}{p_{22}} = e^{-l_3}, \quad \frac{p_{21}}{p_{22}} = e^{-l_4}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Если $l_i/l_{i+1} \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, 3$, то $\pi_{\omega_P}(A)''$ имеет тип III_λ , где

$$\lambda = e^{-((l_1, l_2), (l_3, l_4))}.$$

В противном случае $\pi_{\omega_P}(A)''$ имеет тип III_1 .

Приведем примеры, которые удовлетворяют и не удовлетворяют условию (8).

ПРИМЕР 3.1. Пусть $p \in (0, 1)$. Рассмотрим стохастическую матрицу

$$P = \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & p \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что марковское состояние ω_P , соответствующее стохастической матрице P , является состоянием Пауэрса (см. [1]). Нетрудно проверить, что справедливо равенство (8) с параметрами $m_1 = 0$, $m_2 = -1$, $m_3 = 1$, $m_4 = 0$ и $\lambda = p$. Тогда из теоремы 3.1 следует, что состояние ω_P порождает фактор типа III_λ , т.е. теорема 3.1 согласуется с теоремой Пауэрса (см. [1, теорема 4.8]).

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим уравнение $x^5 - x^3 - x + 1 = 0$ или $(x-1)(x^3(x+1)-1) = 0$. Пусть μ есть решение уравнения $x^3(x+1)-1 = 0$, принадлежащее интервалу $(0, 1)$. Определим стохастическую матрицу

$$p_{11} = \frac{1}{1+\mu^5}, \quad p_{21} = \frac{1}{1+\mu^2}, \quad p_{12} = 1 - p_{11}, \quad p_{22} = 1 - p_{21}.$$

Тогда нетрудно убедиться в справедливости равенства (8) с параметрами $\lambda = \mu$, $m_1 = -5$, $m_2 = -1$, $m_3 = -2$, $m_4 = 2$. Из теоремы 3.1 следует, что марковское состояние, порожденное матрицей P , порождает фактор типа III_μ .

ПРИМЕР 3.3. Определим стохастическую матрицу следующим образом: $p_{11} = 1/3$, $p_{12} = 2/3$, $p_{21} = 1/4$, $p_{22} = 3/4$; тогда легко проверить, что условие (8) не имеет места и, следовательно, по теореме 3.1 $\pi_{\omega_P}(A)''$ имеет тип III_1 .

Пусть Σ – совокупность всех стохастических матриц. На этом множестве определим отображение $\gamma: \Sigma \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, полагая

$$\gamma \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{pmatrix} = (p_{11}, p_{21}).$$

Из определения отображения γ следует, что оно является взаимнооднозначным отображением. Пусть F – борелевская σ -алгебра на $[0, 1] \times [0, 1]$ и ν – лебеговская мера на $([0, 1] \times [0, 1], F)$. На измеримом пространстве $(\Sigma, \gamma^{-1}(F))$ определим лебеговскую меру

$$\nu_\Sigma(B) = \nu(\gamma(B)),$$

где $B \in \gamma^{-1}(F)$.

Множество всех стохастических матриц, удовлетворяющих условию (8), обозначим через Σ_0 , а через Δ_m , где $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{Z}^4$, обозначим совокупность всех стохастических матриц, удовлетворяющих условию (8) при фиксированных значениях m_j , где $j = 1, \dots, 4$. Отсюда следует

$$\Sigma_0 = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^4} \Delta_m.$$

Так как $\gamma(\Delta_m)$ содержится на некоторой “кривой” на $[0, 1] \times [0, 1]$, то $\nu(\gamma(\Delta_m)) = 0$. В силу σ -аддитивности ν_Σ находим $\nu_\Sigma(\Sigma_0) = 0$. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.3. *Множество Σ_0 всех стохастических матриц, удовлетворяющих условию (8), имеет лебегову меру нуль, т.е.*

$$\nu_\Sigma(\Sigma_0) = 0.$$

4. О единственности трансляционно-инвариантного основного состояния для марковского гамильтониана. В этом пункте дается описание трансляционно-инвариантных основных состояний для марковского гамильтониана H . Пусть на C^* -алгебре $A = \bigotimes_{\mathbb{Z}} M_2(\mathbb{C})$ задано состояние ω . Напомним, что состояние ω называется *трансляционно-инвариантным* (см. п. 2), если выполнено равенство

$$\omega(\beta(x)) = \omega(x) \quad \text{для всех } x \in A.$$

Из [10, теорема 6.2.58] следует, что трансляционно-инвариантное состояние ω является основным состоянием тогда и только тогда, когда оно минимизирует следующий функционал:

$$H(\omega) = \sum_{X \ni 0} \frac{\omega(\Phi(X))}{|X|}.$$

Учитывая (4) и трансляционную инвариантность состояния ω , вычислим $H(\omega)$:

$$H(\omega) = -\frac{\omega(\Phi_{-1,0})}{2} - \frac{\omega(\Phi_{0,1})}{2} = \omega(\Phi_{0,1}) = -\sum_{m,l=1}^2 \ln p_{ml} \omega(e_m \otimes e_l).$$

Положим $a_{ij} = \omega(e_i \otimes e_j)$, $i, j = 1, 2$. Из равенств

$$\omega(e_1 \otimes e_2) + \omega(e_1 \otimes e_1) = \omega(e_1) = \omega(e_2 \otimes e_1) + \omega(e_1 \otimes e_1)$$

следует

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{при } i \neq j. \quad (9)$$

В силу сказанного выше мы приходим к следующей вариационной задаче:

$$\left[\begin{array}{l} -\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \ln p_{ij} \rightarrow \min, \\ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} = 1, \quad a_{ij} \geq 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Имея в виду (9), получим

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \ln p_{ij} = \ln \frac{p_{11}}{p_{22}} a_{11} + \ln \frac{p_{12} p_{21}}{p_{22} p_{22}} a_{12} + \ln p_{22}.$$

Положим

$$C = \ln \frac{p_{11}}{p_{22}}, \quad D = \ln \frac{p_{12} p_{21}}{p_{22} p_{22}}. \quad (11)$$

Тогда задача (10) эквивалентна следующей задаче:

$$\left[\begin{array}{l} C a_{11} + D a_{12} \rightarrow \max, \\ 0 \leq 1 - a_{11} - 2 a_{12} \leq 1, \\ a_{11}, a_{12} \geq 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Рассмотрим следующие случаи:

- (i) $p_{11} > p_{22}$, $p_{21} \leq p_{22}$;
- (ii) $p_{11} < p_{22}$, $p_{22} \leq p_{21}$;
- (iii) $p_{11} \cdot p_{21} \geq p_{22}^2$.

Тогда из (11) соответственно имеем:

- (i) $C > 0, D < 0$;
- (ii) $C < 0, D > 0$;
- (iii) $C > 0, D > 0$.

Рассмотрим случай (i). Положим $D_1 = -D$. Отсюда (12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} Ca_{11} - D_1 a_{12} \rightarrow \max, \\ 0 \leq 1 - a_{11} - 2a_{12} \leq 1, \\ a_{11}, a_{12} \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, что решение (13) есть $a_{11} = 1, a_{12} = 0$, т.е.

$$\omega(e_1 \otimes e_1) = 1, \quad \omega(e_1 \otimes e_2) = \omega(e_2 \otimes e_1) = \omega(e_2 \otimes e_2) = 0. \quad (14)$$

Аналогично, рассматривая остальные (ii) и (iii) случаи, соответственно получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega(e_1 \otimes e_1) = 0, \quad \omega(e_1 \otimes e_2) = \omega(e_2 \otimes e_1) = \frac{1}{2}, \quad \omega(e_2 \otimes e_2) = 0, \\ \omega(e_1 \otimes e_1) = 0, \quad \omega(e_1 \otimes e_2) = \omega(e_2 \otimes e_1) = 0, \quad \omega(e_2 \otimes e_2) = 1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнено одно из условий (i), (ii), (iii). Тогда трансляционно-инвариантное основное состояние для марковского гамильтониана диагонализуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай (i). Тогда основное состояние ω удовлетворяет условию (14). Легко видеть, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \omega(\underbrace{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}_n) = 1, \\ \omega(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = 0, \quad \text{если хотя бы один из } i_k \text{ равен 2.} \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия (14) и положительности ω следует

$$\omega(e_3) = \omega(e_4) = 0.$$

Покажем, что $\omega(e_i \otimes e_j) = 0$, если хотя бы один из i или j равен 3 или 4. Определим положительные функционалы $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, полагая

$$\varphi(x) = \omega(e_1 \otimes x), \quad \psi(x) = \omega(e_2 \otimes x), \quad x \in M_2(\mathbb{C}). \quad (16)$$

Из (15) и положительности этих функционалов следует

$$\varphi(e_3) = \varphi(e_4) = 0, \quad \psi(x) = 0 \quad \forall x \in M_2(\mathbb{C}). \quad (17)$$

Учитывая (16), (17) и положительность ω , имеем

$$\omega(e_3 \otimes e_4) = \omega(e_4 \otimes e_4) = 0. \quad (18)$$

Из (16)–(18) вытекает требуемое равенство.

Предположим, что для состояния, удовлетворяющего условию (14) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$\omega(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = 0, \quad \text{если хотя бы один из } i_k \text{ равен 3 или 4,}$$

где $k \in \{1, \dots, n\}$. Покажем, что тогда это равенство верно и для $n + 1$. Для любого $k \in \{1, \dots, n + 1\}$ определим положительные функционалы следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \omega(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k-1} \otimes e_1 \otimes x_k \otimes \cdots \otimes x_n), \\ \psi_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \omega(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k-1} \otimes e_2 \otimes x_k \otimes \cdots \otimes x_n), \end{aligned} \quad (19)$$

где $x_i \in M_2(\mathbb{C})$, $i = 1, \dots, n$.

Легко видеть, что φ_k удовлетворяет условию (14). Следовательно, по предположению имеем

$$\varphi_k(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = 0, \quad (20)$$

если хотя бы один i_l , $l \in \{1, \dots, n + 1\}$, равен 3 или 4. Из положительности ψ_k и условия (15) вытекает

$$\psi_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = 0 \quad \forall x_i \in M_2(\mathbb{C}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Итак, учитывая (15), (19)–(21) и положительность ω , получим требуемое равенство. Таким образом, по индукции заключаем, что состояние, удовлетворяющее условию (14), диагонализуемо.

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

Из этой леммы немедленно следует следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнено одно из условий (i), (ii), (iii). Тогда для марковского гамильтониана H существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания, которые, несомненно, способствовали улучшению текста статьи. Также отметим, что пример в замечании 3 указан рецензентом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Powers R. Representation of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings // Ann. of Math. 1967. V. 81. P. 138–171.
- [2] Блехер П. М. Некоторые применения факторов // Дж. фон Нейман “Избранные труды по функциональному анализу II”. М.: Наука, 1987. С. 353–359.
- [3] фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу II. М.: Наука, 1987.
- [4] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
- [5] Connes A. Une classification des facteurs de type III // Ann. Ecole Norm. Sup. 1973. V. 6. P. 133–252.
- [6] Pillis J. Non commutative Markov processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 125. № 2. P. 264–279.
- [7] Аккарди Л. О некоммутативном марковском свойстве // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 8. № 1. С. 1–8.
- [8] Шухов А. Г. Об энтропии диагонализуемых состояний неймановских алгебр // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 2. С. 95–96.
- [9] Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
- [10] Bratteli O., Robinson D. Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics II. Berlin: Springer Verlag, 1981.
- [11] Araki H. On uniqueness of KMS states of one-dimensional quantum lattice systems // Comm. Math. Phys. 1975. V. 44. P. 1–7.
- [12] Kriger W. On the finitary isomorphism of Markov shifts that have finite coding time // Z. Wahr. verw. Geb. 1983. V. 65. P. 323–328.
- [13] Golodets V. Ya., Neshveyev S. V. Non-Bernoullian K -systems // Comm. Math. Phys. 1998. V. 195. P. 213–232.
- [14] Stratila S. Modular Theory in Operator Algebras. Bucuresti: Abacus Press, 1981.
- [15] Glimm J. Type I C^* -algebras // Ann. of Math. 1961. V. 73. P. 572–612.
- [16] Murakami T., Yamagami S. On types of quasifree representations of Clifford algebras // Publ. RIMS. 1995. V. 31. P. 33–44.

Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент
E-mail: root@im.tashkent.su, far75m@yandex.ru

Поступило
 17.06.2001
 Исправленный вариант
 20.11.2003