Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, Регуляризованные следы несамосопряженных операторов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 783–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:57:26

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ НЕСАМОСOPЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Дубровский

Проблема вычисления регуляризованных следов восходит к работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [1]. Ими был рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Асимптотика упорядоченных по возрастанию собственных чисел λ_n этой задачи имеет вид

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx,$$

поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0)$$

сходится. Гельфандом и Левитаном было доказано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{2}c_0 - \frac{q(0) + q(\pi)}{4},$$

где $q(x)$ – дважды дифференцируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция.

Л. А. Дикий в работе [2] вычислил регуляризованные следы регулярного оператора Штурма–Лиувилля высших порядков и исследовал дзета-функцию этого оператора. В работах [3], [4] В. Б. Лидского и В. А. Садовниченко вычислены регуляризованные следы всех операторов для обыкновенных дифференциальных операторов со сложным вхождением спектрального параметра.

Для дифференциальных операторов с частными производными высоких порядков впервые была вычислена регуляризованная сумма в работе [5]. На данном этапе развития теории регуляризованных следов следует особое внимание обратить на получение формул регуляризованных следов для дифференциальных операторов с частными производными второго порядка (см. [6]).

Наша работа посвящена абстрактной формуле Гельфанда–Левитана для несамосопряженных операторов.

Пусть H – сепарабельное комплексное гильбертово пространство, T – полуограниченный, самосопряженный оператор в H с ядерной резольventой, λ_n – собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, v_n – собственные ортонормированные векторы оператора T , отвечающие собственным числам λ_n . Далее, P – ограниченный,

Автор поддержан грантом 192d общеобразовательного фонда Сороса.

вообще говоря, несамосопряженный оператор в H , μ_n – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Предположим, что $\lambda_n \sim cn^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 1$.

Очевидны следующие утверждения (см. [7], [8]).

ЛЕММА 1. Существует бесконечная последовательность натуральных чисел n_m такая, что

$$\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} \geq \frac{c}{2} n_m^{\alpha-1} > 0.$$

ЛЕММА 2. Если $|n - n_m| \geq c_0 n_m$, где c_0 – фиксированное, сколь угодно малое, положительное число, то

$$|\lambda_n - \lambda_{n_m}| \geq \text{const} \{n_m^\alpha, n^\alpha\} > 0.$$

Оценим сверху ядерную норму резольвенты оператора T .

ЛЕММА 3. На окружностях $\gamma_{n_m} = \{\lambda \mid \lambda = r_{n_m} = (\lambda_{n_m} + \lambda_{n_{m+1}})/2\}$ справедлива оценка сверху ядерной нормы резольвенты оператора T :

$$\|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 \leq \text{const } n_m^{-\alpha+2},$$

где $\lambda \in \gamma_{n_m}$ и const не зависит от n_m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем при $\lambda \in \gamma_{n_m}$

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-1} = \sum_{n=1}^{n_m - [c_0 n_m]} + \sum_{n=n_m - [c_0 n_m] + 1}^{n_m + [c_0 n_m]} + \sum_{n=n_m + [c_0 n_m] + 1}^{\infty} \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Оценим сверху каждое из слагаемых J_j , $j = 1, 2, 3$. По лемме 2 получаем, что

$$J_1 = \sum_{n=1}^{n_m - [c_0 n_m]} |\lambda - \lambda_n|^{-1} \leq \sum_{n=1}^{n_m - [c_0 n_m]} \frac{\text{const}}{n^\alpha} \leq \text{const } n_m^{-\alpha+1}.$$

По лемме 1 имеем

$$J_2 \leq \frac{2c_0 n_m}{n_m^{\alpha-1}} = \text{const } n_m^{-\alpha+2}.$$

J_3 оценивается так же, как и J_1 , с помощью леммы 2. Лемма 3 доказана.

Далее, будем пользоваться методикой работы [9] для изучения функции

$$f(\lambda) = \text{Sp } \lambda(T + P - \lambda E)^{-1} - \text{Sp } \lambda(T - \lambda E)^{-1} + \text{Sp } \lambda(T - \lambda E)^{-1} P(T - \lambda E)^{-1}.$$

ЛЕММА 4. При $\alpha > 1$ существует и конечен предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} \{\mu_n - \lambda_n - (Pv_n, v_n)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала с помощью леммы 3 оценим сверху $|f(\lambda)|$ на окружностях γ_{n_m} :

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \gamma_{n_m}} |f(\lambda)| r_{n_m}^{-2} &= \sup_{\lambda \in \gamma_{n_m}} \{ \lambda \operatorname{Sp}(T + P - \lambda E)^{-1} - \lambda \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} \\ &\quad - \lambda \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} \} r_{n_m}^{-2} \\ &\leq \sup_{\lambda \in \gamma_{n_m}} \{ |\lambda| \| (T + P - \lambda E)^{-1} \|_1 + |\lambda| \| (T - \lambda E)^{-1} \|_1 \\ &\quad + |\lambda| \| (T - \lambda E)^{-1} \|_1 \| P \|_1 \| (T - \lambda E)^{-1} \|_1 \} r_{n_m}^{-2} \\ &\leq \operatorname{const} \left\{ \frac{n_m^\alpha n_m^{-\alpha+2}}{n_m^{2\alpha}} + \frac{n_m^\alpha n_m^{-\alpha+2}}{n_m^{2\alpha}} + \frac{n_m^\alpha n_m^{-\alpha+2} n_m^{-\alpha+1}}{n_m^{2\alpha}} \right\} \\ &\leq \frac{\operatorname{const}}{n_m^{2\alpha-2}} \rightarrow 0, \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Обозначим совокупность собственных чисел операторов $T + P$ и T через $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$, занумерованных в порядке возрастания их модулей с учетом кратности, причем $\beta_0 = 0$.

Представим

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(1 - \frac{z}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^3} + \frac{z^3}{\lambda^4} + \frac{1}{(\lambda - z)} \frac{z^4}{\lambda^4}.$$

Тогда вблизи γ_{n_m}

$$f(z) = \sum_0^{2n_m} G_n(z) + \sum_{j=0}^2 \frac{z^j}{2\pi i} \int_{\gamma_{n_m}} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{1+j}} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n_m}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} \frac{z^3}{\lambda^3} d\lambda. \quad (1)$$

Далее,

$$\operatorname{res}_{\lambda=\beta_n} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} = -G_n(\lambda), \quad n = 0, \dots, 2n_m.$$

Если

$$f(\lambda) = \frac{A_{-j_k}^{(n)}}{(\lambda - \beta_n)^{\gamma_k}} + \dots + \frac{A_{-1}^{(n)}}{\lambda - \beta_n} + A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(\lambda - \beta_n) + \dots,$$

то (см. [9])

$$G_n(\lambda) = \frac{A_{-j_k}^{(n)}}{(\lambda - \beta_n)^{\gamma_k}} + \dots + \frac{A_{-1}^{(n)}}{\lambda - \beta_n}.$$

Суммирование в формуле (1) справа в первом выражении идет без учета кратности величин β_k . Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n_m}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} \frac{z^4}{\lambda^4} d\lambda \right| r_{n_m} \leq \operatorname{const} \frac{2\pi n_m^\alpha |z|^4}{n_m^{4\alpha} n_m^{\alpha-1}} n_m^\alpha n_m^{-\alpha+2} = \frac{\operatorname{const}}{n_m^{4\alpha-3}} \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$f(z) = \sum_0^{2n_m} G_k(z) + \sum_{j=0}^3 \frac{z^j}{2\pi i} \int_{\gamma_{n_m}} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{1+j}} d\lambda + O\left(\frac{1}{n_m^{4\alpha-3}}\right).$$

Проинтегрируем функцию $f(z)$ по окружности γ_{n_m} с множителем $-1/(2\pi i)$ по dz :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{n_m}} f(\lambda) d\lambda &= \operatorname{Sp} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{n_m}} \lambda \operatorname{Sp}(T + P - \lambda E)^{-1} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{n_m}} \lambda \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{n_m}} \lambda \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} d\lambda + \oint_{\gamma_{n_m}} \frac{O(1)}{n_m^{4\alpha-3}} d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{n_m} [\mu_n - \lambda_n - (Pv_n, v_n)] + \frac{O(1)}{n_m^{3\alpha-3}}. \end{aligned}$$

Следовательно, предел в формулировке леммы 4 существует и конечен. Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} [\mu_n - \lambda_n - (Pv_n, v_n)] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} [\mu_n - \lambda_n - (Pv_n, v_n)] \right| \\ &= \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \left\{ -\operatorname{Sp}(T + P - \lambda E)^{-1} + \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_n \frac{(Pv_n, v_n)}{(\lambda_n + \lambda)(\lambda + \mu_n)} \right\} \right| \\ &= \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \left\{ -\operatorname{Sp}(T + P - \lambda E)^{-1} + \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} - \sum_n \frac{(Pv_n, v_n)}{(\lambda_n + \lambda)^2} \right\} \right| \\ &= \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \left| -\operatorname{Sp}(T + P - \lambda E)^{-1} + \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \operatorname{Sp}(T - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} \right| \right| \\ &= \left| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \operatorname{Sp} \{ (T + P - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} P (T - \lambda E)^{-1} \} \right| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \frac{\operatorname{const}}{\lambda^2} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 = 0, \end{aligned}$$

так как $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 = 0$.

Пусть $T_0 = -\Delta$ – оператор Лапласа, заданный на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$, P – оператор умножения на, вообще говоря, комплексную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x, y)$, λ_t^α – собственные числа оператора $T = T_0^\alpha$, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, $t = 1, \dots, \infty$. Из элементарных соображений известно, что

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \lambda_{m_t, n_t} = \frac{\pi^2}{a^2} m_t^2 + \frac{\pi^2}{b^2} n_t^2, \quad m_t, n_t \in \mathbb{N}, \\ v_t &= v_{m_t, n_t} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi}{a} m_t x \sin \frac{\pi}{b} n_t y, \end{aligned}$$

где $T_0^\alpha = \int \lambda^\alpha dE(\lambda)$, а $E(\lambda)$ – спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\alpha > 1$. Тогда

$$\lambda_t^\alpha \sim c_\alpha t^\alpha;$$

$\mu_{m,n}^\alpha$ – собственные числа оператора $T_0^\alpha + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом кратности. Тогда $|\mu_{m,n}^\alpha - \lambda_{m,n}^\alpha| \leq \operatorname{const}$.

Из работы [10] вытекает, что справедлива следующая формула первого регуляризованного следа для оператора $T_0^\alpha + P$ при $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{n>0, m>0} \left(\left(\mu_{m,n}^\alpha - \left(\frac{\pi^2}{a^2} m^2 + \frac{\pi^2}{b^2} n^2 \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{a} \cos x - \cos \frac{2\pi}{b} \cos y \right) dx dy \right) \\ &= \frac{p(0, 0) + p(0, b) + p(a, 0) + p(a, b)}{16} + \frac{1}{8b} \int_0^b (p(a, y) + p(0, y)) dy \\ & \quad + \frac{1}{8a} \int_0^a (p(x, b) + p(x, 0)) dx - \frac{1}{4ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Суммирование в этой формуле слева производится со скобками. Скобки можно снять, если a^2/b^2 – рациональное число.

Автор благодарит В. Е. Подольского за участие в обсуждении работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 591–596.
2. Дикий Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 18. № 4. С. 187–200.
3. Лидский В. Б., Садовничий В. А. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 2. С. 259–262.
4. Лидский В. Б., Садовничий В. А. // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 2. С. 52–59.
5. Садовничий В. А., Дубровский В. В. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2033–2042.
6. Садовничий В. А., Дубровский В. В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
7. Дубровский В. В., Печенцов А. С. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 299. № 5. С. 852–868.
8. Дубровский В. В. // УМН. 1991. Т. 46. № 3. С. 187–188.
9. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966.
10. Дубровский В. В. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1978. Т. 4. С. 227–231.

Магнитогорский государственный педагогический институт

Поступило

30.09.1996

Исправленный вариант

30.12.1997