Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Кармазин, Уточнение теоремы Линделефа и другие применения теории предконцов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 787–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:59:04

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИНДЕЛЁФА И ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДКОНЦОВ

А. П. Кармазин

Используя построенную автором в [1]–[3] теорию предконцов областей из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, мы приведем здесь ряд следствий этой теории типа теорем Линделёфа и Каратеодори о граничном поведении отображений некоторых классов гомеоморфизмов. Рассмотренный в [1]–[3] случай областей с внутренней метрикой Мазуркевича является модельным, и в настоящем сообщении мы приведем некоторые направления, по которым можно распространить полученные там результаты.

1. Уточнение теоремы Линделёфа. Приведем необходимые нам понятия из [1]. Под *областью* из $\mathbb{R}^n$ мы понимаем ограниченный гомеоморф шара из $\mathbb{R}^n$. Пусть $d(x, y)$ – евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, $\delta_{\mathcal{D}}(x, y)$ – внутренняя метрика Мазуркевича области $\mathcal{D}$, равная $\inf$ евклидовых диаметров связанных подмножеств из $\mathcal{D}$, содержащих точки $x, y \in \mathcal{D}$. Пусть

$$V_{\mathcal{D}}(x, \alpha) = \{y \in \mathcal{D}, \delta_{\mathcal{D}}(x, y) < \alpha\}, \quad x \in \mathcal{D};$$

$\partial_{\mathcal{D}} A$ – относительная евклидова граница множества A в $\mathcal{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $\{V_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, связанных открытых подмножеств области $\mathcal{D}$ образует *предцепь*, если $\forall m$

$$1) V_{m+1} \subset V_m; \quad 2) \delta_{\mathcal{D}}(\partial_{\mathcal{D}} V_m, \partial_{\mathcal{D}} V_{m+1}) > 0.$$

Две предцепи *эквивалентны*, если они входят друг в друга. Класс эквивалентных предцепей назовем *предконцом* в $\mathcal{D}$; $V[\mathcal{D}]$ – множество всех предконцов в $\mathcal{D}$. Предконцы V, W *сравнимы* и $V \leq W$, если V входит в W ; $V_0[\mathcal{D}]$ – множество минимальных элементов $V[\mathcal{D}]$, которые мы будем называть *простыми предконцами* в $\mathcal{D}$.

Если $L: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ есть непрерывная кривая в $\mathcal{D}$, $t_m \rightarrow 1$, $\varepsilon_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, то предель

$$\{V_{\mathcal{D}}(L[t_m, 1], \varepsilon_m)\}$$

определяет предконеч $V(L)$ в $\mathcal{D}$. Кривую L назовем *образующей кривой* предконца V , если $V(L) = V$. В силу 1.1.4 из [1] любая кривая из $\mathcal{D}$, сходящаяся к элементу $U \in V_0[\mathcal{D}]$, является образующей для U . Аналогично через $P(L)$ обозначим минимальный конец области $\mathcal{D}$, к которому сходится кривая L (понятие конца см. в [1], [4]). В силу результатов из [1], если L есть образующая кривая простого предконца из $\mathcal{D}$, то $P(L)$ есть простой конец области $\mathcal{D}$. В случае, если область $\mathcal{D}$ плоская, то при этом L всегда является главным путем $P(L)$.

В силу 2.1.5 из [1] кривая L является образующей кривой простого предконца области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow L$ тогда и только тогда, когда L удовлетворяет следующему V_0 -условию в $\mathcal{D}$: $\forall t_m, \tau_m \in [0, 1)$ таких, что $t_m, \tau_m \rightarrow 1$ и

$$\delta_{\mathcal{D}}(L(t_m), L(\tau_m)) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty;$$

всегда либо $d(L_m) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, где $L_m = ([t_m, \tau_m])$, либо в противном случае

$$\sup_{x \in L_m} \delta_{\mathcal{D}}\left(x, L([0, 1)) \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} L_m\right)\right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

В общем случае кривая L может удовлетворять V_0 -условию в $\mathcal{D}$, но не быть главным путем простого конца $P(L)$.

Используя предыдущие утверждения, мы можем следующим образом уточнить теорему Линделёфа (см. [4, теорема 9.8]) для случая конформных отображений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: B \rightarrow \mathcal{D}$ есть конформный гомеоморфизм круга $B = \{x \mid x| < 1\}$ из $\mathbb{R}^2$ на ограниченную односвязную область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда образ $\gamma = f \circ L: [0, 1) \rightarrow \mathcal{D}$ любого некасательного пути $L: [0, 1) \rightarrow B$, оканчивающегося в точке ∂B , удовлетворяет V_0 -условию в $\mathcal{D}$.

С другой стороны, мы получаем метрическое условие на кривую из $\mathcal{D}$, обеспечивающее существование предела вдоль нее любого конформного отображения.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы вдоль пути $\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathcal{D}$ конформное отображение $g: \mathcal{D} \rightarrow B$ имело предел, достаточно, чтобы кривая γ удовлетворяла V_0 -условию в $\mathcal{D}$. Кроме того, если вдоль пути γ отображение g имеет предел $b \in \partial B$ и γ не удовлетворяет V_0 -условию в $\mathcal{D}$, то кривая $L = g \circ \gamma$ не может лежать ни в каком углу, исходящем из b и лежащем в B .

Утверждение из теоремы 2 является и необходимым, если множество $V_0[\mathcal{D}]$ совпадает с множеством простых концов из $\mathcal{D}$.

Гомеоморфизм $f: \mathcal{D} \rightarrow G$ областей $\mathcal{D}$, G из $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $BL^{n/2}$, если f и обратное к нему отображение f^{-1} имеют ограниченный интеграл Дирихле на областях $\mathcal{D}$, G соответственно. В работе [5] И. С. Овчинниковым приведен аналог теоремы Линделёфа для случая гомеоморфизмов класса $BL^{n/2}$, $n \geq 3$, шара $B^n = \{x \mid |x| < 1\}$ из $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область из $\mathbb{R}^n$. Снова используя перечисленные выше результаты из [1], мы получаем полные аналоги теорем 1 и 2 для случая пространственных гомеоморфизмов класса $BL^{n/2}$. В частности, теоремы 1 и 2 справедливы также и для случая любого квазиконформного гомеоморфизма $f: B^n \rightarrow \mathcal{D}$ шара на ограниченную область из $\mathbb{R}^n$.

2. Теоремы Каратеодори для квазиизометрий. В работах [1]–[3] приведены две общие конструкции, позволяющие на основе элементов из $V[\mathcal{D}]$ определить новые граничные элементы области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^n$, присоединение которых к $\mathcal{D}$ дает хаусдорфово топологическое пространство, в котором сама $\mathcal{D}$ секвенциально предкомпактна. Мы опишем эти конструкции в общем виде, не конкретизируя метрику, на основе которой дано понятие предконца.

Определим в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ некоторую метрику $\lambda_{\mathcal{D}}(x, y)$. Взяв в определении 1 вместо $\delta_{\mathcal{D}}$ метрику $\eta_{\mathcal{D}}$, мы получим некоторые множества $V[\mathcal{D}]$ и $V_0[\mathcal{D}]$ предконцов и простых предконцов области $\mathcal{D}$. Обычным образом (см. [1]) в $\mathcal{D} \cup V_0[\mathcal{D}]$ вводится топология, и $\mathcal{D} \cup V_0[\mathcal{D}]$ есть T_1 -пространство с первой аксиомой счетности. Оно в общем случае не хаусдорфово, а сама область $\mathcal{D}$ не секвенциально предкомпактна в нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\{U \in V_0[\mathcal{D}], U \leq V\}$ назовем *цоколем* предконца V . Оно не пусто в силу 1.1.5 из [1] и всегда замкнуто в $\mathcal{D} \cup V_0[\mathcal{D}]$. Скажем, что предконцы V, W *эквивалентны*, если их цоколи совпадают; $\Phi[\mathcal{D}]$ – множество всех классов эквивалентных предконцов из $\mathcal{D}$. На $\Phi[\mathcal{D}]$ введем отношение частичного порядка: $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \forall W \in \psi, \exists V \in \varphi, V \leq W$ в $V[\mathcal{D}]$; $\Phi_0[\mathcal{D}]$ – множество минимальных элементов из $\Phi[\mathcal{D}]$.

В силу теоремы 2.1 из [3] область $\mathcal{D}$ секвенциально предкомпактна в $\mathcal{D} \cup \Phi_0[\mathcal{D}]$. Таким образом, факторизация множества $V[\mathcal{D}]$ позволяет “компактифицировать” область $\mathcal{D}$. Однако в общем случае пространство $\mathcal{D} \cup \Phi_0[\mathcal{D}]$ не обязательно хаусдорфово. Следующая конструкция позволит нам получить хаусдорфово пополнение области $\mathcal{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что элементы $\varphi, \psi \in \Phi[\mathcal{D}]$ *сцеплены*, если найдутся $V \in \varphi, W \in \psi$ и последовательность точек из $\mathcal{D}$, сходящаяся одновременно к V и W . Подмножество Π из $\Phi_0[\mathcal{D}]$ назовем *полным бруском*, если любые два элемента из Π сцеплены и $\forall \psi \in \Phi_0[\mathcal{D}] \setminus \Pi, \exists \varphi \in \Pi$, не сцепленный с ψ . Говорим, что система $(\Pi_1, \dots, \Pi_m)$ полных брусков из $\Phi_0[\mathcal{D}]$ *соединяет* Π_1 и Π_m , если $\Pi_k \cap \Pi_{k+1} \neq \emptyset, k = 1, \dots, m-1$. Совокупность с полных брусков из $\Phi_0[\mathcal{D}]$ назовем *звеном*, если для любых $\Pi', \Pi'' \in \mathcal{C}$ существует конечная система из $\mathcal{C}$, соединяющая Π' и Π'' . Два звена c_1, c_2 сравнимы и $c_1 \leq c_2$, если $c_1 \subset c_2$. Максимальные звенья из $\mathcal{D}$ называем *молекулами* области $\mathcal{D}$; $M[\mathcal{D}]$ – множество всех молекул области $\mathcal{D}$.

В силу 6.3 из [3] любой элемент $\varphi \in \Phi_0[\mathcal{D}]$ лежит в некоторой единственной молекуле области $\mathcal{D}$, и любые две молекулы из $\mathcal{D}$ не контактируют, т.е. не сцеплены друг с другом. Следовательно, $\mathcal{D} \cup M[\mathcal{D}]$ является хаусдорфовым топологическим пространством, а сама $\mathcal{D}$ секвенциально предкомпактна в $\mathcal{D} \cup M[\mathcal{D}]$. Отметим, что в случае плоской области $\mathcal{D}$ любая молекула $\mathcal{D}$ совпадает с обычным каратеодориевским простым концом области $\mathcal{D}$.

Гомеоморфизм $f: \mathcal{D} \rightarrow G$ областей $\mathcal{D}, G$ из $\mathbb{R}^n$ называется *квазиизометрией*, если при отображении f метрики $\lambda_{\mathcal{D}}$ и λ_G квазиинвариантны. Так как элементы из $V_0[\mathcal{D}], \Phi_0[\mathcal{D}]$ и $M[\mathcal{D}]$ построены только с помощью инвариантов квазиизометрий, то мы получаем следующий аналог теоремы Каратеодори о граничном поведении квазиизометрических гомеоморфизмов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow G$ есть квазиизометрия областей $\mathcal{D}, G$ из $\mathbb{R}^n$. Тогда f продолжается до гомеоморфизмов

$$f^*: \mathcal{D} \cup \Phi_0[\mathcal{D}] \rightarrow G \cup \Phi_0[G], \quad f^*: \mathcal{D} \cup M[\mathcal{D}] \rightarrow G \cup M[G].$$

При этом любая область $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^n$ секвенциально предкомпактна в $\mathcal{D} \cup \Phi_0[\mathcal{D}]$, $\mathcal{D} \cup M[\mathcal{D}]$, а пространство $\mathcal{D} \cup M[\mathcal{D}]$ еще и хаусдорфово.

Отметим кроме того, что при отображении f^* все типы элементов из $\Phi_0[\mathcal{D}], M[\mathcal{D}]$ не изменяются, и области $\mathcal{D}$ и $G = f(\mathcal{D})$ имеют совершенно одинаковое строение с точки зрения теории предконцов.

3. Теория предконцов на основе внутренних метрик областей. Наиболее содержательной теория предконцов будет в том случае, если понятие предконца определено на основе какой-либо внутренней метрики области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^n$. Это обусловлено тем, что каждая такая метрика некоторым образом описывает строение области $\mathcal{D}$.

Зададим в области $\mathcal{D}$ следующие четыре внутренние метрики: метрику Мазуркевича $\delta_{\mathcal{D}}(x, y)$; метрику Римана $\varrho_{\mathcal{D}}(x, y)$, равную $\inf$ длин кривых из $\mathcal{D}$, соединяющих точки $x, y \in \mathcal{D}$; емкостное расстояние $r_{\mathcal{D}}(x, y)$ (см. [6]); квазигиперболическую метрику $k_{\mathcal{D}}(x, y)$ (см., например, [7]).

Вопросы граничного поведения δ -квазиизометрий и теория δ -предконцов разработана в [1]–[3]. Применяя схемы построений из [1]–[3], мы можем построить соответственно теории ϱ -, r - и k -предконцов. Следствием этих теорий являются, например, полные аналоги теоремы 3 о граничном соответствии ϱ -, r - и k -квазиизометрий.

Любая δ -квазиизометрия является одновременно ϱ -квазиизометрией, а класс ϱ -квазиизометрий совпадает с классом локально билипшицевых (относительно евклидовой метрики) гомеоморфизмов. В силу квазиинвариантности емкостного расстояния при квазиконформных гомеоморфизмах эти отображения составляют подкласс r -квазиизометрий. Класс k -квазиизометрий (см. [7]) образует широкий класс гомеоморфизмов и еще подробно не изучен.

Таким образом, теория предконцов позволяет эффективно изучать граничные и метрические свойства различных классов гомеоморфизмов. Например, пополнение области $\mathcal{D}$ по метрике $k_{\mathcal{D}}$ всегда пусто, тогда как она секвенциально предкомпактна в пространствах $\mathcal{D} \cup \Phi_0[\mathcal{D}]$, $D \cup M[\mathcal{D}]$, элементы которых построены на основе метрики $k_{\mathcal{D}}$. В заключение отметим, что достаточно просто теория предконцов переносится на случай различных поверхностей и топологических многообразий без края с использованием, например, любой из перечисленных выше внутренних метрик, заданных на них.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кармазин А. П. Простые предконцы пространственных областей. Томский ун-т. Деп. ВИНТИ № 2220-B92. М.: ВИНТИ, 1992.
2. Кармазин А. П. Теория предконцов пространственных областей: факторизация предконцов по их общему поколю // Ред. Сиб. матем. ж. Деп. ВИНТИ № 1102-B95. М.: ВИНТИ, 1995.
3. Кармазин А. П. Основные теоремы теории предконцов // Ред. Сиб. матем. ж. Деп. ВИНТИ № 23-B98. М.: ВИНТИ, 1998.
4. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971.
5. Овчинников И. С. Метрические вопросы теории функций и отображений. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1968.
6. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 5. С. 1040–1042.
7. Латфуллин Т. Г. // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 3. С. 610–615.