Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 4, 519–530

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:48:50

Приближение в L_2

частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Для приближений в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля доказано неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности. Оптимальность аргумента в модуле непрерывности устанавливается с помощью квадратурной формулы Гаусса на полупрямой по нулям собственной функции оператора Штурма–Лиувилля.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля на полупрямой, пространство L_2 , преобразование Фурье, неравенство Джексона, квадратурная формула Гаусса.

DOI: 10.4213/mzm11110

1. Введение. Задача о точной константе в неравенстве Джексона между величиной наилучшего приближения и модулем непрерывности функции в пространстве L_2 является важной экстремальной задачей теории приближений.

В пространстве $L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ на полупрямой со степенным весом $t^{2\alpha+1}$, $\alpha \geq -1/2$, точное неравенство Джексона

$$E_R(f)_{2,\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2q_\alpha}{R}, f\right)_{2,\alpha} \quad (1.1)$$

для приближений целыми функциями экспоненциального типа не выше R и модуля непрерывности первого порядка доказано Бабенко [1] и Московским [2]. Здесь q_α – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_\alpha(t)$.

Позже в [3] было показано, что в неравенстве (1.1) аргумент $2q_\alpha/R$ в модуле непрерывности является оптимальным (минимальным). Для доказательства оптимальности аргумента применялась квадратурная формула Гаусса на полупрямой по нулям функции Бесселя, установленная в [4], [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00308), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К) и фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

Примеры точных неравенств Джексона с оптимальными аргументами в модуле непрерывности можно найти в работах [6]–[13].

Приближение целыми функциями в пространстве $L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ можно рассматривать как приближение частичными интегралами разложений по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(w(t) \frac{d}{dt} y(t) \right) + (\lambda^2 + \lambda_0^2) w(t) y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1, \quad \frac{d}{dt} y(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которой $w(t) = t^{2\alpha+1}$, а $\lambda_0 = 0$. В этом случае решением задачи (1.2) является нормированная функция Бесселя $j_\alpha(\lambda t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(\lambda t) / (\lambda t)^\alpha$, а разложение функций из $L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ осуществляется с помощью преобразования Фурье–Ганкеля.

При некоторых ограничениях на вес $w(t)$ мы устанавливаем аналог неравенства (1.1) для приближений частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям общей задачи Штурма–Лиувилля (1.2). Оптимальность аргумента в модуле непрерывности доказывается с помощью нашего обобщения [14] квадратурной формулы Гаусса на полупрямой по нулям собственной функции задачи (1.2). Также мы используем результаты теории операторов обобщенного сдвига, связанных с задачей Штурма–Лиувилля (см., например, [15]).

2. Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой. Пусть $w(t)$ – непрерывная весовая функция на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, которая положительна и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, параметр $\lambda_0 \geq 0$.

Предположим, что задача (1.2) при $\lambda \geq 0$ имеет решение $\varphi(t, \lambda)$, которое будем называть *собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля*. Также в дальнейшем будем предполагать, что для задачи Штурма–Лиувилля выполнены следующие свойства.

Свойство 1. Собственная функция $\varphi(t, \lambda)$ действительная, четная по t на $\mathbb{R}$ и четная целая функция экспоненциального типа $|t|$ при $t \neq 0$ по λ ,

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad |\varphi(t, \lambda)| \leq 1, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Свойство 2. Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, \lambda) = \varphi(t, 0) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)} \right),$$

где $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ – положительные нули $\varphi(t, \lambda)$ по λ . Нули $\lambda_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают при $t > 0$. При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ – положительные нули функции $\varphi(t, \lambda)$ по $t > 0$.

Свойство 3. Спектральная мера $\sigma(\lambda)$ задачи (1.2) непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$ и

$$\sigma'(\lambda) = s(\lambda) \asymp \lambda^{2\alpha+1}, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

Пусть $d\mu(t) = w(t) dt$, $1 \leq p < \infty$, $L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

$L_p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda)|^p d\sigma(\lambda) \right)^{1/p} < \infty,$$

$C(\mathbb{R}_+)$ – пространство непрерывных функций, $C_0(\mathbb{R}_+) \subset C(\mathbb{R}_+)$ – подпространство функций с компактным носителем, $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ – пространство измеримых существенно ограниченных функций на полупрямой. Нормы в $C(\mathbb{R}_+)$, $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначаем $\|\cdot\|_\infty$.

Прямое и обратное преобразования Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi(t, \lambda) d\mu(t), \quad \widetilde{g}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda)$$

осуществляют изоморфизм между $L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $L_2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, и справедливы равенства Планшереля

$$\|\widehat{f}\|_{2,d\sigma} = \|f\|_{2,d\mu}, \quad \|\widetilde{g}\|_{2,d\mu} = \|g\|_{2,d\sigma}.$$

СВОЙСТВО 4. Для $t > 0$ равномерно на каждом компакте из $(0, \infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda^{\alpha+1/2}\varphi(t, \lambda) = C_t(\cos(t\lambda - c_t) + e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}O(|\lambda|^{-1})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad (2.3)$$

где α из (2.2).

СВОЙСТВО 5. Если $f \in C(\mathbb{R}_+) \cap L_1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то для $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо поточечное равенство

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(\lambda)\varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda).$$

Условия 1–5 являются достаточными для построения квадратурной формулы Гаусса на полуоси по нулям $\lambda_k(t)$ [14] (см. далее лемму 5.2).

СВОЙСТВО 6. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(\lambda)\varphi(t, \lambda)\varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

действующего в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) d\tau_{x,t}(z), \quad (2.4)$$

где для всех $x, t \in \mathbb{R}_+$ $\tau_{x,t}$ – борелевская, вероятностная мера, для которой $\tau_{x,t} = \tau_{t,x}$ и носитель $\operatorname{supp} \tau_{x,t} \subset [|x-t|, x+t]$.

Оператор T^t является положительным и самосопряженным оператором, $T^t f(x) \in C(\mathbb{R}_+)$, если $f \in C(\mathbb{R}_+)$ [15].

Покажем, что представление (2.4) позволяет распространить T^t на пространства $L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}_+$. При $p = \infty$ это очевидно. При $p = 1$ пользуясь самосопряженностью оператора, получим

$$\begin{aligned} \|T^t\|_{1 \rightarrow 1} &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} (T^t f) \bar{g} d\mu : \|f\|_{1, d\mu} \leq 1, \|g\|_{\infty} \leq 1, f, g \in C_0(\mathbb{R}_+) \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f \overline{T^t g} d\mu : \|f\|_{1, d\mu} \leq 1, \|g\|_{\infty} \leq 1, f, g \in C_0(\mathbb{R}_+) \right\} \\ &\leq \|T^t\|_{\infty \rightarrow \infty} = 1. \end{aligned}$$

При $1 < p < \infty$ пользуемся теоремой Рисса–Торина.

Отметим также следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\begin{aligned} T^0 f(x) &= f(x), & T^t 1 &= 1, \\ T^t \varphi(x, \lambda) &= \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda), & \widehat{(T^t f)}(\lambda) &= \varphi(t, \lambda) \widehat{f}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} T^t f d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu, \quad f \in L_1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad (2.6)$$

$$T^t f(x) = 0, \quad \text{если} \quad \text{supp } f \subset [0, l], \quad |x - t| \geq l. \quad (2.7)$$

Свойства 1–6 выполняются для широкого класса весов w ; в частности, для степенного и гиперболического весов (см. [14], [16]–[18])

$$\begin{aligned} w(t) &= t^{2\alpha+1}, & \alpha &\geq -\frac{1}{2}, \\ w(t) &= (\text{sh } t)^{2\alpha+1} (\text{ch } t)^{2\beta+1}, & \alpha &\geq \beta \geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Константа Джексона. Пусть для функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$

$$E_R(f)_2 = \inf \{ \|f - g\|_{2, d\mu} : g \in L_2(\mathbb{R}_+, d\mu), \text{supp } \widehat{g} \subset [0, R] \}$$

– величина ее наилучшего приближения частичными интегралами порядка $R > 0$.

Из равенства Планшереля вытекает, что наилучшее приближение достигается на частичном интеграле обратного преобразования Фурье и

$$E_R^2(f)_2 = \int_R^\infty |\widehat{f}|^2 d\sigma. \quad (3.1)$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ определим равенством

$$\omega(\delta, f)_2 = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \Delta(t, f), \quad \delta > 0,$$

где

$$\Delta(t, f)_2 = \left(\int_{\mathbb{R}_+} T^t |f(\cdot) - f(x)|^2(x) d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Так как

$$|f(\cdot) - f(x)|^2 = |f(\cdot)|^2 + |f(x)|^2 - 2 \operatorname{Re}\{f(\cdot)f(x)\},$$

то в силу (2.5), (2.6), равенства Планшереля

$$\begin{aligned} \Delta^2(t, f)_2 &= \int_{\mathbb{R}_+} (T^t |f(x)|^2 + |f(x)|^2 - 2 \operatorname{Re}\{f(x)T^t f(x)\}) d\mu(x) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} (|f(x)|^2 - \operatorname{Re}\{f(x)T^t f(x)\}) d\mu(x) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} (1 - \varphi(t, \lambda)) |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda), \end{aligned} \quad (3.2)$$

поэтому

$$\omega^2(\delta, f)_2 = 2 \sup_{0 \leq t \leq \delta} \int_{\mathbb{R}_+} (1 - \varphi(t, \lambda)) |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda). \quad (3.3)$$

Константа Джексона

$$D(R, \delta)_2 = \sup \left\{ \frac{E_R(f)_2}{\omega(\delta, f)_2} : f \in L_2(\mathbb{R}_+, d\mu) \right\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_2 \leq D\omega(\delta, f)_2.$$

Нижняя оценка константы Джексона дается в следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. Если $R, \delta > 0$ и выполнены свойства 1, 3, 6, то

$$D(R, \delta)_2 \geq 2^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, χ_ε – характеристическая функция отрезка $[0, \varepsilon]$. В силу (3.1), (3.2), (2.1)

$$\begin{aligned} \Delta^2(t, \chi_\varepsilon)_2 &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} (|\chi_\varepsilon(x)|^2 - \operatorname{Re}\{\chi_\varepsilon(x)T^t \chi_\varepsilon(x)\}) d\mu(x) \leq 2 \int_0^\varepsilon d\mu(x) = 2\mu(\varepsilon), \\ |\widehat{\chi_\varepsilon}(\lambda)| &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |\chi_\varepsilon(x)\varphi(x, \lambda)| d\mu(x) \leq \int_0^\varepsilon d\mu(x) = \mu(\varepsilon), \\ E_R^2(\chi_\varepsilon)_2 &= \|\chi_\varepsilon\|_{2, d\mu}^2 - \int_0^R |\widehat{\chi_\varepsilon}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \geq \mu(\varepsilon)(1 - \mu(\varepsilon)\sigma(R)), \end{aligned}$$

поэтому

$$D^2(R, \delta)_2 \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{E_R^2(\chi_\varepsilon)_2}{\omega^2(\delta, \chi_\varepsilon)_2} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1 - \mu(\varepsilon)\sigma(R)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\delta > 0$, $S^+[0, \delta]$ – множество неубывающих на отрезке $[0, \delta]$ функций $\nu(t)$, для которых $\nu(0) = 0$, $\nu(\delta) = 1$ (вероятностных борелевских мер),

$$K_\delta = \left\{ f(\lambda) = \int_0^\delta \varphi(t, \lambda) d\nu(t) : \nu \in S^+[0, \delta] \right\}$$

– класс четных целых функций экспоненциального типа не выше δ ,

$$\Gamma(R, \delta) = \inf_{f \in K_\delta} \sup_{\lambda \geq R} f(\lambda). \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.2. Если $R, \delta > 0$ и выполнены свойства 1, 3, 5, 6, то

$$2D^2(R, \delta)_{2, \mu} = \frac{1}{1 - \Gamma(R, \delta)}. \quad (3.5)$$

Существуют мера $\nu^* \in S^+[0, \delta]$ и функция $f^* \in K_\delta$, для которых

$$\Gamma(R, \delta) = \sup_{\lambda \geq R} \int_0^\delta \varphi(t, \lambda) d\nu^*(t) = \sup_{\lambda \geq R} f^*(\lambda). \quad (3.6)$$

Если $\Gamma(R, \delta) = 0$, то

$$f^* \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \quad \text{и} \quad \tilde{f}^*(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f^*(\lambda) d\sigma(\lambda) \geq 0. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Вначале докажем (3.5), (3.6). Согласно (3.1), (3.3)

$$2D^2(R, \delta)_2 = \sup_{f \in L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)} \frac{\int_R^\infty |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}{\sup_{0 \leq t \leq \delta} \int_0^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}.$$

В силу (2.1) функция $1 - \varphi(t, \lambda) \geq 0$ при $t, \lambda \geq 0$, поэтому для $R > 0$

$$\int_0^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \geq \int_R^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)$$

и, следовательно,

$$2D^2(R, \delta)_2 \leq \sup_{f \in L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)} \frac{\int_R^\infty |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}{\sup_{0 \leq t \leq \delta} \int_R^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) |\hat{f}(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda)}.$$

Обратное неравенство очевидно, если рассмотреть $\sup$ по функциям f , для которых $\text{supp } \hat{f} \subset [R, \infty)$. Поэтому, вводя обозначение $g(\lambda) = |\hat{f}(\lambda)|^2 / \int_R^\infty |\hat{f}|^2 d\sigma$, получаем

$$2D^2(R, \delta)_2 = \frac{1}{\inf_{G \in H_R} \sup_{0 \leq t \leq \delta} G(t)},$$

где

$$H_R = \left\{ G(t) = \int_R^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) g(\lambda) d\sigma(\lambda) : g \geq 0, \int_R^\infty g d\sigma = 1 \right\}.$$

Величину

$$(2D^2(R, \delta)_2)^{-1} = \inf_{G \in H_R} \sup_{0 \leq t \leq \delta} G(t)$$

можно рассматривать как наилучшее приближение нуля в $C[0, \delta]$ выпуклым замкнутым подмножеством H_R . По теореме двойственности [19; гл. 2] и в силу неотрицательности функций из H_R имеем

$$(2D^2(R, \delta)_2)^{-1} = \sup_{\nu \in S^+[0, \delta]} \inf_{G \in H_R} \int_0^\delta G(t) d\nu(t) = \inf_{G \in H_R} \int_0^\delta G(t) d\nu^*(t) \quad (3.8)$$

для некоторой меры $\nu^* \in S^+[0, \delta]$.

Покажем, что для любой меры $\nu \in S^+[0, \delta]$

$$\inf_{G \in H_R} \int_0^\delta G(t) d\nu(t) = \inf_{\lambda \geq R} h(\lambda), \quad (3.9)$$

где $h(\lambda) = \int_0^\delta (1 - \varphi(t, \lambda)) d\nu(t)$.

Действительно, для любой функции $G \in H_R$ имеем

$$\int_0^\delta G(t) d\nu(t) = \int_0^\delta \int_R^\infty (1 - \varphi(t, \lambda)) g(\lambda) d\sigma(\lambda) d\nu(t) = \int_R^\infty g(\lambda) h(\lambda) d\sigma(\lambda).$$

Откуда следует, что

$$\inf_{G \in H_R} \int_0^\delta G(t) d\nu(t) \geq \inf_{\lambda \geq R} h(\lambda).$$

С другой стороны, для любых $\lambda \geq R$, $0 < \varepsilon < R$, рассматривая подмножество функций g вида $\chi_{[\lambda, \lambda+\varepsilon]}(\lambda') / \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} d\sigma$ и используя непрерывность $h(\lambda')$, получаем

$$\inf_{G \in H_R} \int_0^\delta G(t) d\nu(t) \leq \inf_{0 < \varepsilon < R} \frac{\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} h(\lambda') d\sigma(\lambda')}{\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} d\sigma} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} h(\lambda') d\sigma(\lambda')}{\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} d\sigma} = h(\lambda).$$

Теперь можно перейти к $\inf$ по $\lambda \geq R$. Равенство (3.9) доказано.

Согласно (3.4), (3.8), (3.9)

$$\begin{aligned} (2D^2(R, \delta)_2)^{-1} &= \sup_{\nu \in S^+[0, \delta]} \inf_{\lambda \geq R} \int_0^\delta (1 - \varphi(t, \lambda)) d\nu(t) \\ &= 1 - \inf_{\nu \in S^+[0, \delta]} \sup_{\lambda \geq R} \int_0^\delta \varphi(t, \lambda) d\nu(t) \\ &= 1 - \Gamma(R, \delta) = 1 - \sup_{\lambda \geq R} \int_0^\delta \varphi(t, \lambda) d\nu^*(t) = 1 - \sup_{\lambda \geq R} f^*(\lambda) \end{aligned}$$

для некоторой меры $\nu^* \in S^+[0, \delta]$ и функции $f^* \in K_\delta$. Равенства (3.5), (3.6) доказаны.

Отметим, что впервые соображения двойственности в задаче о точной константе в неравенстве Джексона в L_2 применял Арестов [20]. Мы следуем этой работе. Многомерные варианты равенства (3.5) имеются в [9], [13].

2. При доказательстве (3.7) будем следовать работе Логана [21].

Пусть $\psi_\varepsilon(t) = \max(1 - t/\varepsilon, 0)$, $c_\varepsilon^{-1} = \int_0^\varepsilon \psi_\varepsilon d\mu$. Рассмотрим функцию

$$\Psi_\varepsilon(x) = c_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}_+} \psi_\varepsilon(t) T^t \psi_\varepsilon(x) d\mu(t).$$

Применяя (2.7) и ограниченность оператора обобщенного сдвига в $L_1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, получим

$$\Psi_\varepsilon \geq 0, \quad \text{supp } \Psi_\varepsilon \subset [0, 2\varepsilon], \quad \Psi_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C(\mathbb{R}_+). \quad (3.10)$$

Согласно (2.5)

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) = c_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}_+} \psi_\varepsilon(t) \varphi(t, \lambda) \widehat{\psi}_\varepsilon(\lambda) d\mu(t) = c_\varepsilon^2 |\widehat{\psi}_\varepsilon(\lambda)|^2,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} c_\varepsilon \widehat{\psi}_\varepsilon(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} c_\varepsilon \int_0^\varepsilon \psi_\varepsilon(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t) = \varphi(0, \lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

поэтому

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C(\mathbb{R}_+), \quad 0 \leq \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) \leq 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (3.11)$$

$$\Psi_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.12)$$

Пусть $f^* \in K_\delta$,

$$\sup_{\lambda \geq R} f^*(\lambda) = \sup_{\lambda \geq R} \int_0^\delta \varphi(t, \lambda) d\nu^*(t) = \Gamma(R, \delta) = 0.$$

Тогда $f^*(0) = 1$, $|f^*(\lambda)| \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, и $f^*(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \geq R$. Отсюда и из (3.10)–(3.12)

$$\int_{\mathbb{R}_+} f^*(\lambda) \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) = \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) \varphi(t, \lambda) d\sigma(\lambda) d\nu^*(t) = \int_0^\delta \Psi_\varepsilon(t) d\nu^*(t) \geq 0,$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+} f^*(\lambda) \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) = \int_0^R f^*(\lambda) \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) - \int_R^\infty |f^*(\lambda)| \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda),$$

$$\int_0^\infty |f^*(\lambda)| \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq 2 \int_0^R |f^*(\lambda)| \widehat{\Psi}_\varepsilon(\lambda) d\sigma(\lambda) \leq 2 \int_0^R d\sigma(\lambda).$$

По лемме Фату $f^* \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, а по теореме Лебега об ограниченной сходимости $\int_{\mathbb{R}_+} f^* d\sigma \geq 0$. Лемма доказана.

4. Неравенство Джексона. Напомним, что $t_1(R)$ – наименьший положительный нуль функции $\varphi(t, R)$, $R > 0$ (см. свойство 2). Справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. Если для задачи Штурма–Лиувилля (1.2) выполнены условия 1, 3, 6, то для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ справедливо точное неравенство Джексона

$$E_R(f)_2 \leq 2^{-1/2} \omega(2t_1(R), f)_2. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.2 для доказательства неравенства (4.1) достаточно построить функцию $f \in K_{2t_1(R)}$, для которой $f(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \geq R$.

Покажем, что в качестве такой функции можно положить

$$\Psi_R(t) = a_R T^{t_1(R)} \psi_R(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$\psi_R(t) = \begin{cases} \varphi(t, R), & 0 \leq t \leq t_1(R), \\ 0, & t > t_1(R), \end{cases}$$

и константа a_R выбрана из условия $\int_{\mathbb{R}_+} \Psi_R d\mu = 1$.

Функция Ψ_R непрерывна, неотрицательна и в силу (2.7) $\text{supp } \Psi_R \subset [0, 2t_1(R)]$, поэтому преобразование Фурье

$$\widehat{\Psi}_R(\lambda) = \int_0^{2t_1(R)} \Psi_R(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t) \in K_{2t_1(R)}.$$

Остается показать, что $\widehat{\Psi}_R(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \geq R$. Тогда функция $f(\lambda) = \widehat{\Psi}_R(\lambda)$ будет искомой.

Применяя известное для дифференциального уравнения (1.2) тождество

$$(w(t)(\varphi'(t, R)\varphi(t, \lambda) - \varphi(t, R)\varphi'(t, \lambda)))' + (R^2 - \lambda^2)w(t)\varphi(t, R)\varphi(t, \lambda) = 0,$$

находим

$$\widehat{\psi}_R(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi_R(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t) = \int_0^{t_1(R)} \psi_R(t) \varphi(t, \lambda) d\mu(t) = b_R \frac{\varphi(t_1(R), \lambda)}{R^2 - \lambda^2},$$

где $b_R = -w(t_1(R))\varphi'(t_1(R), R) > 0$, так как $\varphi(0, R) = 1$, а $t_1(R)$ – первый простой положительный нуль функции $\varphi(t, R)$.

В силу (2.5)

$$\widehat{\Psi}_R(\lambda) = a_R \varphi(t_1(R), \lambda) \widehat{\psi}_R(\lambda) = a_R b_R \frac{\varphi^2(t_1(R), \lambda)}{R^2 - \lambda^2},$$

поэтому $\widehat{\Psi}_R(\lambda) \leq 0$ при $\lambda \geq R$. Неравенство (4.1) доказано. Его точность установлена в лемме 3.1. Теорема 4.1 доказана.

Способ построения функций, подобных Ψ_R , $\widehat{\Psi}_R$, в задаче о точном неравенстве Джексона в L_2 на многомерном торе впервые был предложен Юдиным [22]. Он использовал задачу на собственные значения для оператора Лапласа в шаре. В работах [1], [2] используется задача на собственные значения для оператора Бесселя на полупрямой.

Величину

$$\delta_R = \inf\{\delta > 0 : D(R, \delta)_2 = 2^{-1/2}\}$$

назовем *оптимальным аргументом*.

5. Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона. Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если для задачи Штурма–Лиувилля (1.2) справедливы условия 1–6, то для $R > 0$*

$$\delta_R = 2t_1(R). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (5.1) вытекает из неравенства (4.1) в теореме 4.1. Получим оценку снизу

$$\delta_R \geq 2t_1(R). \quad (5.2)$$

Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 5.2 [14]. Пусть для задачи Штурма–Лиувилля (1.2) выполнены условия 1–5. Тогда для произвольной четной целой функции $f \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ экспоненциального типа не выше 2δ справедлива квадратурная формула Гаусса

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\delta) f(\lambda_k(\delta)),$$

в которой узлы $\lambda_k(\delta)$ – положительные нули функции $\varphi(\delta, \lambda)$ веса $\gamma_k(\delta) > 0$, а ряд сходится абсолютно.

ЛЕММА 5.3 [23; приложение VII, лемма Ахизера]. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F – целая функция экспоненциального типа $\sigma > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω – целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F , индикатор $h_\Omega(0) = h_\Omega(\pi)$ и

$$\liminf_{y \rightarrow \pm\infty} e^{-\sigma|y|} y^m |\Omega(iy)| > 0.$$

Тогда функция

$$\psi(z) = \frac{F(z)}{\Omega(z)}$$

есть многочлен степени не больше m .

ЛЕММА 5.4 [12]. Существует четная целая функция $\omega(z)$ экспоненциального типа 2, для которой

$$\begin{aligned} \omega(x) &> 0, \quad x > 0, \\ \omega(x) &\asymp x^{2\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad |\omega(iy)| \asymp |y|^{2\alpha+1} e^{2|y|}, \quad y \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Предположим, что

$$\delta_{R,\mu} < 2\delta' < 2t_1(R).$$

Согласно лемме 3.2 и (2.1) существует функция $f^* \in K_{2\delta'}$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f^* &\in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma), \quad \tilde{f}^*(0) \geq 0, \quad f^*(\lambda) \leq 0, \quad \lambda \geq R, \\ |f^*(\lambda)| &\leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f^*(0) = 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из свойства 2 нулей собственной функции $\varphi(t, \lambda)$ имеем $\lambda_1(\delta') > \lambda_1(t_1(R)) = R$. Применяя лемму 5.2 и (5.4), получим

$$0 \leq \tilde{f}^*(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f^*(\lambda) d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\delta') f^*(\lambda_k(\delta')) \leq 0.$$

Поэтому функция $f^*(\lambda)$ в точках $\lambda_k(\delta')$, $k \geq 1$, имеет двойные нули. Согласно (2.2), асимптотике (2.3) и лемме 5.4 для функций

$$F(z) = \omega(z) f^*(z), \quad \Omega(z) = \omega(z) \varphi^2(\delta', z)$$

выполнены условия леммы 5.3, причем

$$|\Omega(iy)| \asymp e^{2(\delta'+1)|y|}, \quad y \rightarrow \pm\infty.$$

Применяя ее, получим $f^*(\lambda) = c\varphi^2(\delta', \lambda)$, $c > 0$. Пришли к противоречию, поскольку согласно (2.2) и (2.3) функция $\varphi^2(\delta', \lambda) \notin L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, а также в (5.4) не выполняется свойство $f^*(\lambda) \leq 0$, $\lambda \geq R$.

Неравенство (5.2) и теорема 5.1 доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ ”, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН, **5**, 1998, 183–198.
- [2] А. В. Московский, “Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ ”, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **3:1** (1997), 44–70.
- [3] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа”, *Матем. заметки*, **68:2** (2000), 179–187.
- [4] C. Frappier, P. Oliver, “A quadrature formula involving zeros of Bessel functions”, *Math. Comp.*, **60:201** (1993), 303–316.
- [5] G. R. Grozev, Q. I. Rahman, “A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes”, *Math. Comp.*, **64** (1995), 715–725.
- [6] V. V. Arestov, N. I. Chernykh, “On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials”, *Approximation and Functions Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43.
- [7] Е. Е. Бердышева, “Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **66:3** (1999), 336–350.
- [8] А. В. Иванов, “Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2010, № 1, 26–44.
- [9] А. В. Иванов, “Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 29–58.
- [10] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Матем. заметки*, **94:3** (2013), 338–348.
- [11] В. И. Иванов, А. В. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля”, *Матем. заметки*, **96:5** (2014), 674–686.
- [12] D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, R. A. Veprintsev, “Optimal argument in the sharp Jackson inequality in the space L_2 with hyperbolic weight”, *Math. Notes*, **96:6** (2014), 904–913.
- [13] Р. А. Вепринцев, “Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби”, *Матем. заметки*, **97:6** (2015), 815–831.
- [14] Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, “Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа”, *Матем. сб.*, **206:8** (2015), 63–98.
- [15] Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука, М., 1973.
- [16] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию*, Наука, М., 1970.
- [17] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988.
- [18] M. Flensted-Jensen, T. H. Koornwinder, “Jacobi functions. The addition formula and the positivity of dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, **17** (1979), 139–151.
- [19] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближений*, Наука, М., 1976.
- [20] В. В. Аrestov, В. Ю. Попов, “Неравенство Джексона на сфере в L_2 ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 8, 13–20.

- [21] B. F. Logan, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**:2 (1983), 249–252.
- [22] В. А. Юдин, “Многомерная теорема Джексона в L_2 ”, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 309–315.
- [23] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

Д. В. Горбачев

Тульский государственный университет

E-mail: dvgmail@mail.ru

Поступило

09.02.2016

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru