Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колесников, О непрерывных образах меры Лебега,
Матем. заметки, 1999, том 65, выпуск 5, 790–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 03:12:58

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОБРАЗАХ МЕРЫ ЛЕБЕГА

А. В. Колесников

В этой заметке изложено решение задачи описания мер, являющихся непрерывным образом меры Лебега на $[0, 1]$. Эта задача была поставлена П. В. Парамоновым в связи с некоторыми вопросами теории оптимального поиска (см. [1], [2]). Результат состоит в том, что вероятностная борелевская мера в топологическом пространстве является непрерывным образом меры Лебега на $[0, 1]$ в точности тогда, когда ее носитель есть связный и локально связный компакт (что, как известно, равносильно тому, что этот носитель есть непрерывный образ отрезка).

Напомним сначала некоторые определения из теории меры и общей топологии. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $(E, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, $\xi: \Omega \mapsto E$ – измеримое отображение. Равенство

$$\mu \circ \xi^{-1}(B) = \mu(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B},$$

определяет меру на $\mathcal{B}$. Мера $\mu \circ \xi^{-1}$ называется *образом* меры μ при отображении ξ .

Пусть μ – борелевская вероятностная мера на топологическом пространстве. Пусть S_μ – пересечение всех замкнутых подмножеств полной меры. Если $\mu(S_\mu) = 1$, то S_μ называется *носителем* меры μ . Известно, что в полном сепарабельном метрическом пространстве каждая борелевская вероятностная мера обладает носителем; более того, всякая мера Радона обладает носителем (см. [3, предложение 3.4, с. 36]).

Работа написана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96–15–96865, № 97–01–00932, и российско-германского гранта.

Топологическое пространство называется *локально связным в точке x* , если всякая открытая окрестность точки x содержит некоторую ее связную окрестность (здесь и далее под *окрестностью* точки x подразумевается любое множество, содержащее некоторое открытое подмножество V , причем $x \in V$). Топологическое пространство называется *локально связным*, если оно локально связно в каждой своей точке.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что образ отрезка при непрерывном отображении является метризуемым компактом (см. [4, теорема 4.4.15]). Кроме того, метрический компакт является непрерывным образом отрезка в точности тогда, когда он связан и локально связан (см. [4, 6.3.14]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – метрический компакт, являющийся образом отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении f , μ – борелевская вероятностная мера на K , причем K – ее носитель. Тогда существует такое непрерывное сюръективное отображение $g: [0, 1] \rightarrow K$, что $\mu = \lambda \circ g^{-1}$, где λ – мера Лебега на отрезке $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 2, 3 и 4, изложенных ниже.

Всюду ниже сохраняются обозначения, введенные в теореме.

ЛЕММА 1. У любой точки $y \in K$ существует сколь угодно малая окрестность U , являющаяся непрерывным образом отрезка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_k = [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Положим $U = \bigcup_{k: y \in f(A_k)} f(A_k)$. Очевидно, U – непрерывный образ отрезка. Это множество – окрестность, так как вместе с y оно содержит открытое множество $K \setminus \bigcup_{k: y \notin f(A_k)} f(A_k)$. В силу равномерной непрерывности f и неравенства треугольника окрестность U можно сделать сколь угодно малой, увеличивая n .

ЛЕММА 2. Существует такое непрерывное сюръективное отображение

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow K,$$

что $\mu(\varphi(V)) \neq 0$ для любого открытого V из $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить φ , исходя из отображения f . Пусть V_0 – объединение всех таких открытых множеств, которые f переводит в множество меры нуль. Имеем $V_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, где $J_i = (a_i, b_i)$, либо $J_i = [0, b_i)$, либо $J_i = (a_i, 1]$, причем $J_i \cap J_j = \emptyset$, если $i \neq j$. Считаем, что длина J_i не возрастает с ростом i . Пусть m – наименьшее натуральное число такое, что существуют такие $J_1, J_2, \dots, J_{k_1}$, что длина каждого из них не меньше $1/2^m$. Пусть c_1 – середина интервала J_1 . По предыдущей лемме найдем окрестность U_1 точки $f(c_1)$, являющуюся непрерывным образом отрезка, с диаметром меньше чем $1/2$ (в метрике K). Кроме того, найдется δ_1 такое, что $(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$ лежит в J_1 и $f(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1) \subset U_1$. Построим такое непрерывное отображение f_1 отрезка $[c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1]$ на U_1 , что

$$f_1(c_1 - \delta_1) = f(c_1 - \delta_1), \quad f_1(c_1 + \delta_1) = f(c_1 + \delta_1).$$

Аналогично для всех $1 \leq i \leq k_1$ строим отображения f_i в δ_i -окрестностях точек c_i , где c_i – середина J_i . Пусть отображение φ_1 совпадает с f вне этих окрестностей, а на них совпадает с f_i ; тогда φ_1 непрерывно, причем $\rho(f, \varphi_1) \leq 1/2$, где ρ – равномерная метрика. Наибольшее открытое множество, которое φ_1 переводит в множество меры нуль, не содержит интервалов длины большей чем $1/2^m$, так как $\mu(U_i) \neq 0$, где $1 \leq i \leq k_1$. Выделим теперь интервалы $J_{k_1+1}, J_{k_1+2}, \dots, J_{k_2}$, длина каждого из которых больше чем $1/2^{m_1}$ для некоторого $m_1 > m$. Аналогично строим непрерывное отображение φ_2 с условием $\rho(\varphi_1, \varphi_2) \leq 1/4$. Проведя эти построения конечное или счетное число раз, получим последовательность непрерывных отображений φ_n , причем $\rho(\varphi_n, \varphi_{n+1}) \leq 1/2^{n+1}$. В пределе получаем непрерывное отображение φ . Пусть $X_0 = [0, 1] \setminus V_0$, $X_i = [0, 1] \setminus V_i$, где V_i – наибольшее открытое множество, которое φ_i переводит в множество меры нуль. Так как по построению каждое из φ_j , где $j > i$, совпадает на X_i с φ_i , а $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ всюду плотно на $[0, 1]$, то φ переводит открытые множества в множества положительной меры. Далее, $\varphi[0, 1] = K$, поскольку уже $f(X_0) = K$ (иначе существовало бы открытое множество в K μ -меры нуль).

ЛЕММА 3. Пусть X и K – метрические компакты, $f: X \rightarrow K$ сюръективное непрерывное отображение метрических компактов и μ – борелевская вероятностная мера на K . Тогда существует такая борелевская вероятностная мера ν на X , что $\nu \circ f^{-1} = \mu$. Если $\mu(f(W)) \neq 0$ для любого открытого W в X , то можно выбрать ν такой, что ее носитель совпадает со всем X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение хорошо известно (см., например [5, теорема 6.14]). Оно доказывается следующим образом. В пространстве $C(X)$ рассмотрим подпространство, состоящее из функций вида $\psi \circ f$, $\psi \in C(K)$. На нем определим линейный функционал L по формуле

$$L(\psi \circ f) = \int_K \psi(y) \mu(dy).$$

Норма этого функционала равна единице. По теореме Хана–Банаха продолжим его на все $C(X)$ с сохранением нормы. По теореме Рисса существует такая знакопеременная борелевская мера ν на X , что для всех непрерывных $\varphi \in C(X)$

$$L(\varphi) = \int_X \varphi(x) \nu(dx).$$

В частности, для всех непрерывных $\psi \in C(K)$

$$\int_X \psi(f(x)) \nu(dx) = \int_K \psi(y) \mu(dy). \quad (1)$$

Для $\psi = 1$ получаем, что $\nu(X) = 1$. Теперь если $\nu = \nu_+ - \nu_-$ – разложение ν на положительную и отрицательную части, то в силу того, что норма L равна единице, имеем $\nu_+(X) + \nu_-(X) = 1$. Отсюда видно, что мера ν неотрицательна. Соотношение (1) означает, что меры $\nu \circ f^{-1}$ и μ приписывают равные интегралы ограниченным непрерывным функциям, что влечет равенство $\nu \circ f^{-1} = \mu$.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим счетную базу окрестностей $\{W_i\}$ в X . Так как $\mu(f(W_i)) \neq 0$, существует такой компакт $K_i \subset W_i$, что $\mu(f(K_i)) \neq 0$ (так как любое открытое подмножество метрического компакта является счетным объединением компактов). На K_i построим меру ν_{i1} , которая является прообразом меры $\mu|_{f(K_i)}$, т.е. ν_{i1} – такая неотрицательная мера на K_i , что $\nu_{i1} \circ f^{-1} = \mu|_{f(K_i)}$. На X выберем меру ν_{i2} , которая является прообразом меры, равной нулю на $f(K_i)$ и совпадающей с мерой μ на $K \setminus f(K_i)$. Положим $\nu_i = \nu_{i1} + \nu_{i2}$. Имеем $\nu_i \circ f^{-1} = \mu$, причем $\nu_i(W_i) \neq 0$. Положим

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \nu_i.$$

Очевидно, что носитель ν совпадает с X и

$$\nu \circ f^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \nu_i \circ f^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mu = \mu.$$

ЛЕММА 4. Любая борелевская вероятностная мера ν на отрезке $[0, 1]$ с носителем $[0, 1]$ является образом меры Лебега на $[0, 1]$ при некотором непрерывном сюръективном отображении $s: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F(t) = \nu([0, t])$ – функция распределения, то искомое отображение задается формулой

$$s(t) = \sup_{x \in [0, 1]} \{x : F(x) \leq t\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Непрерывные образы меры Лебега на $[0, 1]$ – это вероятностные борелевские меры, носители которых являются связными, локально связными компактами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве простого следствия получаем, что непрерывные образы меры Лебега на $[0, 1]^n$ – это вероятностные борелевские меры, носители которых являются связными, локально связными компактами.

В заключение отметим, что П. В. Парамоновым были поставлены вопросы об описании образов меры Лебега при более специальных отображениях (например, непрерывно дифференцируемых заданного порядка). Эти вопросы остаются пока открытыми.

Автор благодарен П. В. Парамонову за постановку задачи и плодотворное обсуждение, а также В. И. Богачеву за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парамонов П. В. // Автоматика и телемеханика. 1988. № 11. С. 102–112.
2. Парамонов П. В. Исследование на экстремум интегрального функционала, связанного с задачей оптимального поиска // Тезисы докладов Международной конференции по комплексному анализу и смежным вопросам. Нижний Новгород, Июнь, 1997. С. 55–56.
3. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. Богачев В. И. Меры на топологических пространствах // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Т. 36. М.: ВИНТИ, 1996.