Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гольдман, Оценки для сужений монотонных операторов на конус убывающих функций в пространстве Орлича, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 1, 30–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:45:21

Оценки для сужений монотонных операторов на конус убывающих функций в пространстве Орлича

М. Л. Гольдман

Рассматривается сужение монотонного оператора P на конус Ω неотрицательных убывающих функций из весового пространства Орлича $L_{\varphi, v}$ без дополнительных априорных предположений о свойствах функции Орлича φ и весовой функции v . Мы устанавливаем точную по порядку двустороннюю оценку нормы этого сужения с помощью специально построенной процедуры дискретизации. Аналогичные оценки получены также для монотонных операторов над соответствующими пространствами Орлича–Лоренца $\Lambda_{\varphi, v}$. В качестве приложений мы получаем описания ассоциированных пространств для конуса Ω и для пространства Орлича–Лоренца. Результаты являются новыми и актуальными в теории этих пространств.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: монотонный оператор, весовое пространство Орлича, конус убывающих функций, ассоциированные нормы, класс Орлича–Лоренца, метод дискретизации.

DOI: 10.4213/mzm11121

1. Определения и предварительные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Обозначим через A класс функций, обладающих следующими свойствами: $\varphi \in A$ означает, что $\varphi \in C[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$; φ строго возрастает и для любого $c \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$

$$d(c) := \inf\{d > 0 : \varphi(dt) \geq c\varphi(t) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+\} < \infty. \quad (1.1)$$

Ясно, что для всякой функции $\varphi \uparrow$ мы имеем

$$c \in (0, 1] \implies d(c) \in (0, 1], \quad c > 1 \implies d(c) \geq 1. \quad (1.2)$$

Кроме того,

$$\text{существует } \lim_{t \rightarrow +0} [t^{-1}\varphi(t)] \in \mathbb{R}_+ \implies d(c) \geq c. \quad (1.3)$$

ПРИМЕР 1.2. Если $\varphi(t) = t^\varepsilon$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon > 0$, то $d(c) = c^{1/\varepsilon}$.

Исследование проведено в Математическом институте им. В. А. Стеклова при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00443).

ПРИМЕР 1.3. Пусть $\varphi(t) = e^t - 1$. Тогда

$$c \in (0, 1] \implies d(c) = 1, \quad c > 1 \implies d(c) = c. \quad (1.4)$$

ПРИМЕР 1.4. Пусть

$$\varphi(t) = \ln^\gamma(t+1), \quad t \in [0, \infty), \quad \gamma > 0.$$

Тогда $d(c) = \infty$ для любого $c > 1$. Действительно, если $c > 1$, то для любого $d \in \mathbb{R}_+$ неравенство $\ln^\gamma(dt+1) \geq c \ln^\gamma(t+1)$ нарушается при достаточно больших $t \in \mathbb{R}_+$, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln^\gamma(dt+1)}{\ln^\gamma(t+1)} \right] = 1. \quad (1.5)$$

ПРИМЕР 1.5. Пусть $\varepsilon > 0$, и $\varphi(t)t^{-\varepsilon} \uparrow$ на $\mathbb{R}_+$. Тогда

$$d(c) \leq \max\{1, c^{1/\varepsilon}\}. \quad (1.6)$$

Действительно, для $c \in (0, 1]$ имеем $d(c) \in (0, 1]$; см. (1.2). Если $c > 1$, то

$$\varphi(c^{1/\varepsilon}t) = (c^{1/\varepsilon}t)^\varepsilon [\varphi(c^{1/\varepsilon}t)(c^{1/\varepsilon}t)^{-\varepsilon}] \geq (c^{1/\varepsilon}t)^\varepsilon [\varphi(t)t^{-\varepsilon}] = c\varphi(t)$$

для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, $d(c) \leq c^{1/\varepsilon}$ при $c > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Относительно общих свойств функций в пространствах Орлича см. [1] и [2]. Отметим, что

$$\varphi \in A \implies \varphi(+\infty) = \infty,$$

так что φ есть так называемая φ функция, см. [1; гл. 2]. В то же время, каждая функция Орлича (т.е., выпуклая φ функция, см. [1; гл. 10]), принадлежит A . Действительно, функция Орлича φ выпукла, так что $\varphi(t)t^{-1} \uparrow$, и пример 1.5 с $\varepsilon = 1$ охватывает такие функции. Отметим, что для функций Орлича

$$d(c) \leq \max\{1, c\}.$$

Это верно также для N -функций (см. [1], [2; гл. 8], а также здесь раздел 4). Через $M = M(R_+)$ обозначим множество измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+$, $M^+ = \{f \in M : f \geq 0\}$. Не ограничивая общности, будем всюду в работе считать рассматриваемые измеримые функции конечными почти всюду относительно меры Лебега на $\mathbb{R}_+$.

Для $f \in M$ определим функционал

$$J_\lambda(f) := \int_0^\infty \varphi(\lambda^{-1}|f(t)|)v(t) dt, \quad \lambda > 0 \quad (1.7)$$

(интегрирование по мере Лебега). Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что весовая функция $v \in M^+$ удовлетворяет условиям $0 < v < \infty$ почти всюду. Кроме того, со 2-й части п. 2 будем считать

$$0 < V(t) := \int_0^t v d\tau < \infty \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.8)$$

Кроме того, считаем, что V строго возрастает и

$$V(+\infty) = \infty. \quad (1.9)$$

Теперь для $f \in M$ определим функционал Люксембурга

$$\|f\|_{\varphi, v} := \inf\{\lambda > 0 : J_\lambda(f) \leq 1\}. \quad (1.10)$$

Тогда для $c \in [0, \infty)$, $f, g \in M$ имеем

$$\|cf\|_{\varphi, v} = c\|f\|_{\varphi, v}, \quad |f| \leq |g| \implies \|f\|_{\varphi, v} \leq \|g\|_{\varphi, v}.$$

Рассмотрим весовое пространство Орлича $L_{\varphi, v}$ и в нем конус неотрицательных функций:

$$L_{\varphi, v} = \{f \in M : \|f\|_{\varphi, v} < \infty\}, \quad L_{\varphi, v}^+ = \{f \in L_{\varphi, v} : f \geq 0\}. \quad (1.11)$$

Следующие предложения позволяют нам делать заключения относительно значений $\|f\|_{\varphi, v}$, используя свойства $J_\lambda(f)$. Первое из них показывает, что двусторонняя оценка значений $J_\lambda(f)$ влечет соответствующую двустороннюю оценку для $\|f\|_{\varphi, v}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть $\varphi \in A$, $c \in \mathbb{R}_+$, и $f_1, f_2 \in M$. Если для любых $\lambda > 0$

$$J_\lambda(f_1) \leq cJ_\lambda(f_2), \quad (1.12)$$

то

$$\|f_1\|_{\varphi, v} \leq d(c)\|f_2\|_{\varphi, v} \quad (1.13)$$

с постоянной $d(c)$, определенной в (1.1).

СЛЕДСТВИЕ 1.8. В частности, имеем

$$J_\lambda(f_1) \leq J_\lambda(f_2) \text{ для всех } \lambda > 0 \implies \|f_1\|_{\varphi, v} \leq \|f_2\|_{\varphi, v}. \quad (1.14)$$

Действительно, если $c = 1$ в (1.12), то $d(c) \leq 1$ в (1.13), см. (1.2).

СЛЕДСТВИЕ 1.9. Пусть $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, и $f_1, f_2 \in M$. Если для любого $\lambda > 0$

$$c_1 J_\lambda(f_2) \leq J_\lambda(f_1) \leq c_2 J_\lambda(f_2), \quad (1.15)$$

то

$$d_1 \|f_2\|_{\varphi, v} \leq \|f_1\|_{\varphi, v} \leq d_2 \|f_1\|_{\varphi, v}, \quad (1.16)$$

где (см. (1.1))

$$d_1 = d(c_1^{-1})^{-1}, \quad d_2 = d(c_2). \quad (1.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.7. Из (1.12) следует, что

$$\|f_1\|_{\varphi, v} = \inf\{\lambda > 0 : J_\lambda(f_1) \leq 1\} \leq \inf\{\lambda > 0 : cJ_\lambda(f_2) \leq 1\}. \quad (1.18)$$

Если $c \in (0, 1]$, то это неравенство влечет оценку (1.13) с $d(c) = 1$.

Пусть теперь $c > 1$. Тогда при $d > d(c)$ имеем $c\varphi(t) \leq \varphi(dt)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и, таким образом,

$$cJ_\lambda(f_2) \leq J_\lambda(df_2).$$

Следовательно,

$$\inf\{\lambda > 0 : cJ_\lambda(f_2) \leq 1\} \leq \inf\{\lambda > 0 : J_\lambda(df_2) \leq 1\} = \|df_2\|_{\varphi,v}. \quad (1.19)$$

Из (1.18) и (1.19) получаем, что

$$\|f_1\|_{\varphi,v} \leq \|df_2\|_{\varphi,v} = d\|f_2\|_{\varphi,v}. \quad (1.20)$$

Неравенство (1.20) справедливо для всех $d > d(c)$. Таким образом, (1.20) влечет (1.13).

Следующие известные результаты полезны при вычислении нормы оператора на весовом пространстве Орлича (относительно известных результатов об интерполяции и об общих свойствах пространств Орлича см. формулировки и ссылки в работах [1]–[6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть $\varphi \in C[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$; φ возрастает. Тогда, для $f \in M$, $v \in M^+$, имеет место следующая эквивалентность:

$$\|f\|_{\varphi,v} \leq 1 \iff J_1(f) = \int_0^\infty \varphi(|f(t)|)v(t) dt \leq 1. \quad (1.21)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Пусть φ p -выпукла для некоторого $p \in (0, 1]$, т.е., для $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^p + \beta^p = 1$,

$$\varphi(\alpha t + \beta \tau) \leq \alpha^p \varphi(t) + \beta^p \varphi(\tau), \quad t, \tau \in [0, \infty). \quad (1.22)$$

Тогда для пространства $L_{\varphi,v}$ справедливо неравенство треугольника в следующей форме:

$$\|f + g\|_{\varphi,v} \leq (\|f\|_{\varphi,v}^p + \|g\|_{\varphi,v}^p)^{1/p}. \quad (1.23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12. Отметим, что если φ p -выпукла, то $\varphi(t)t^{-p}$ возрастает, так что $\varphi \in A$, см. пример 1.5. Таким образом, в этом случае применимы все приведенные выше результаты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. Пусть φ p -выпукла при некотором $p \in (0, 1]$, и весовая функция v удовлетворяет условию $0 < v < \infty$ почти всюду. Тогда $L_{\varphi,v}$ есть идеальное пространство, т.е. квазibanахово пространство (банахово при $p = 1$) измеримых функций, снабженное монотонной квазинормой $\|\cdot\|_{\varphi,v}$, (нормой при $p = 1$). Кроме того, оно обладает свойством Фату:

$$f_m \in M^+, \quad f_m \uparrow f \quad \mu\text{-a.e.} \implies \|f_m\|_{\varphi,v} \uparrow \|f\|_{\varphi,v}. \quad (1.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.14. Общей теории монотонных операторов и конусов в банаховых решетках посвящены работы [7]–[10], результаты об операторах в идеальных и перестановочно инвариантных пространствах приведены в [3], [6], а также [11]. Вопросы двойственности в пространствах Орлича, Лоренца и Орлича–Лоренца, включая описания ассоциированных норм в различных вариантах этих пространств, исследовались, в частности, в работах [2], [4], [12]–[16]. Основу для многих исследований в этом направлении дали фундаментальные результаты Сойера [17].

2. Процедура дискретизации. 1. Сначала кратко опишем дискретную версию приведенных выше конструкций. Пусть $\varphi \in A$, см. определение 1.1. Пусть задана весовая последовательность

$$\beta = \{\beta_m\}, \quad \beta_m \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

По аналогии с (1.7)–(1.11) определим для $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\alpha_m \in \mathbb{R}$,

$$j_\lambda(\alpha) := \sum_m \varphi(\lambda^{-1}|\alpha_m|)\beta_m, \quad \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} := \inf\{\lambda > 0 : j_\lambda(\alpha) \leq 1\}. \quad (2.1)$$

Справедливы формулы

$$j_\lambda(0 \cdot \alpha) = 0, \quad c \in \mathbb{R}_+ \implies j_\lambda(c\alpha) = j_{\lambda/c}(\alpha). \quad (2.2)$$

Также пусть $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\gamma = \{\gamma_m\}$. Тогда

$$|\alpha_m| \leq |\gamma_m| \implies j_\lambda(\alpha) \leq j_\lambda(\gamma) \implies \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}}, \quad (2.3)$$

$$\|c\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} = c\|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}}, \quad c \in \mathbb{R}_+. \quad (2.4)$$

Справедливы следующие аналоги предложений 1.7 и 1.10.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\varphi \in A$, $c \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\gamma = \{\gamma_m\}$. Если для любого $\lambda > 0$

$$j_\lambda(\alpha) \leq c j_\lambda(\gamma), \quad (2.5)$$

то

$$\|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq d(c)\|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}} \quad (2.6)$$

с постоянной $d(c)$, определенной в (1.1).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. В частности, имеем

$$j_\lambda(\alpha) \leq j_\lambda(\gamma) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \implies \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}}. \quad (2.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ и $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\gamma = \{\gamma_m\}$. Если для любого $\lambda > 0$

$$c_1 j_\lambda(\gamma) \leq j_\lambda(\alpha) \leq c_2 j_\lambda(\gamma), \quad (2.8)$$

то при $d_1 = d(c_1^{-1})^{-1}$, $d_2 = d(c_2)$, см. (1.1), справедливы оценки

$$d_1 \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq d_2 \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}}. \quad (2.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\varphi \in C[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$; φ возрастает. Тогда для $\alpha = \{\alpha_m\}$, $\beta = \{\beta_m\}$, $\beta_m \in \mathbb{R}_+$, имеет место эквивалентность

$$\|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq 1 \iff j_1(\alpha) = \sum_m \varphi(|\alpha_m|)\beta_m \leq 1. \quad (2.10)$$

Для того, чтобы обосновать эти дискретные аналоги результатов раздела 1, мы можем ввести последовательность $\{\mu_m\}$ такую, что

$$\mu_m < \mu_{m+1}, \quad R_+ = \bigcup_m \Delta_m, \quad \Delta_m = [\mu_m, \mu_{m+1}). \quad (2.11)$$

Введем весовую функцию $v > 0$, удовлетворяющую условиям

$$\int_{\Delta_m} v dt = \beta_m. \quad (2.12)$$

Затем мы сузим рассмотрения раздела 1 на множество ступенчатых функций

$$\tilde{L}_{\varphi,v} = \left\{ f \in L_{\varphi,v} : f = \sum_m \alpha_m \chi_{\Delta_m}, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2.13)$$

где χ_{Δ_m} – характеристическая функция промежутка Δ_m . Для таких функций,

$$J_\lambda(f) = j_\lambda(\alpha), \quad \|f\|_{\varphi,v} = \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}}. \quad (2.14)$$

Действительно,

$$J_\lambda(f) = \int_0^\infty \varphi(\lambda^{-1}|f(t)|)v(t) dt = \sum_m \int_{\Delta_m} \dots = \sum_m \varphi(\lambda^{-1}|\alpha_m|) \int_{\Delta_m} v dt = j_\lambda(\alpha).$$

Теперь все упомянутые выше дискретные формулы являются частными случаями соответствующих формул раздела 1.

2. Опишем процедуру дискретизации для интегральных соотношений на конусе убывающих функций из пространства $L_{\varphi,v}$:

$$\Omega \equiv \{f \in L_{\varphi,v} : 0 \leq f \downarrow\}. \quad (2.15)$$

Мы считаем, что весовая функция v удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9). Для фиксированного числа $b > 1$ введем последовательность $\{\mu_m\}$ по формулам

$$\mu_m = V^{-1}(b^m) \iff V(\mu_m) = b^m, \quad m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (2.16)$$

где V^{-1} – обратная функция к непрерывной возрастающей функции V . Тогда выполнены условия (2.11), поскольку

$$0 < \mu_m \uparrow, \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} \mu_m = 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu_m = \infty.$$

Введем также конусы неотрицательных ступенчатых функций

$$S \equiv L_{\varphi,v}^+ \cap \tilde{L}_{\varphi,v} = \left\{ f \in L_{\varphi,v} : f = \sum_m \gamma_m \chi_{\Delta_m}, \gamma_m \geq 0, m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (2.17)$$

и неотрицательных убывающих ступенчатых функций

$$\tilde{\Omega} \equiv \Omega \cap \tilde{L}_{\varphi,v} = \left\{ f \in L_{\varphi,v} : f = \sum_m \alpha_m \chi_{\Delta_m}, 0 \leq \alpha_m \downarrow \right\}. \quad (2.18)$$

Для $f \in \Omega$ определим ступенчатые функции $f_0, f_1 \in \tilde{\Omega}$ (см. (2.11)):

$$f_0 := \sum_m f(\mu_{m+1}) \chi_{\Delta_m}, \quad f_1 := \sum_m f(\mu_m) \chi_{\Delta_m}. \quad (2.19)$$

Тогда

$$f_0 \leq f \leq f_1 \implies \|f_0\|_{\varphi, v} \leq \|f\|_{\varphi, v} \leq \|f_1\|_{\varphi, v} \quad (2.20)$$

(левое неравенство в (2.20) выполнено всюду на R_+).

Применим равенства (2.12)–(2.14) к ступенчатым функциям f_0 и f_1 . Тогда

$$\|f_0\|_{\varphi, v} = \|\{\alpha_{m+1}\}\|_{l_{\varphi, \beta}}, \quad \|f_1\|_{\varphi, v} = \|\{\alpha_m\}\|_{l_{\varphi, \beta}}, \quad \alpha_m := f(\mu_m). \quad (2.21)$$

Здесь в соответствии с (2.12) и (2.16)

$$\beta_m = \int_{\Delta_m} v \, dt = V(\mu_{m+1}) - V(\mu_m) = b^m(b-1), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. При дискретизации вида (2.16)–(2.22) операторы сдвига

$$T_+[\{\gamma_m\}] = \{\gamma_{m+1}\}, \quad T_-[\{\gamma_m\}] = \{\gamma_{m-1}\} \quad (2.23)$$

оказываются ограниченными как операторы в $l_{\varphi, \beta}$.

Это частный случай следующего результата.

ЛЕММА 2.6. Пусть $b > 1$, $\varphi \in A$, $\beta = \{\beta_m\}$, $\beta_m \in R_+$, $1 \leq \beta_{m+1}/\beta_m \leq b$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\|T_+\| \leq 1, \quad \|T_-\| \leq d(b), \quad (2.24)$$

где $d(b)$ – постоянная (1.1) при $c = b > 1$. Если φ – выпуклая функция (в частности, если φ есть N -функция), мы получаем оценки (2.24) с $d(b) = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить оценки (2.24), отметим, что

$$j_\lambda(\{\gamma_{m+1}\}) \leq j_\lambda(\{\gamma_m\}), \quad j_\lambda(\{\gamma_{m-1}\}) \leq b j_\lambda(\{\gamma_m\}). \quad (2.25)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} j_\lambda(\{\gamma_{m+1}\}) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_{m+1}|)\beta_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_m|)\beta_{m-1}, \\ j_\lambda(\{\gamma_{m-1}\}) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_{m-1}|)\beta_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_m|)\beta_{m+1}, \end{aligned}$$

и мы получаем неравенства (2.25), принимая во внимание условия на $\beta = \{\beta_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Из (2.25) и (2.5)–(2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \|T_+[\{\gamma_m\}]\|_{l_{\varphi, \beta}} &= \|\{\gamma_{m+1}\}\|_{l_{\varphi, \beta}} \leq \|\{\gamma_m\}\|_{l_{\varphi, \beta}}, \\ \|T_-[\{\gamma_m\}]\|_{l_{\varphi, \beta}} &= \|\{\gamma_{m-1}\}\|_{l_{\varphi, \beta}} \leq d(b)\|\{\gamma_m\}\|_{l_{\varphi, \beta}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Если φ выпукла, то $d(b) = \max\{1, b\} = b$. Таким образом, мы приходим к оценкам (2.24).

Применим оценку (2.24) к последовательности $\{\gamma_m\} = \{\alpha_{m+1}\}$. Тогда согласно (2.21) получим

$$\|f_1\|_{\varphi, v} = \|\{\alpha_m\}\|_{l_{\varphi, \beta}} \leq d(b)\|\{\alpha_{m+1}\}\|_{l_{\varphi, \beta}} = d(b)\|f_0\|_{\varphi, v}. \quad (2.27)$$

Подстановка (2.27) в (2.20) приводит к следующему заключению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 2.7. Пусть $b > 1$, $\varphi \in A$, вес v удовлетворяет условиям (1.8), (1.9). Реализуем процедуру дискретизации (2.16)–(2.22) для функции $f \in \Omega$, см. (2.15). Тогда

$$d(b)^{-1} \|f_1\|_{\varphi, v} \leq \|f\|_{\varphi, v} \leq \|f_1\|_{\varphi, v}, \quad (2.28)$$

где $d(b)$ определена в (1.1) при $c = b > 1$. Здесь для ступенчатой функции f_1 , определенной в (2.19), справедливо равенство (2.21).

3. Оценки для нормы монотонного оператора на конусе Ω . Мы сохраняем все обозначения разделов 1 и 2. Пусть (N, η) – пространство с неотрицательной полной σ -конечной мерой η ; пусть $L = L(N, \eta)$ – множество всех η -измеримых функций $u: N \rightarrow \mathbb{R}$, $L^+ = \{u \in L : u \geq 0\}$. Здесь поточечные неравенства подразумеваются выполненными η -почти всюду. Пусть $Y = Y(N, \eta) \subset L$ – идеальное пространство, т.е., банахово (или квазибанахово) пространство измеримых функций с монотонной нормой (или квазинормой) $\|\cdot\|_Y$, так что

$$u_1 \in L, \quad |u_1| \leq |u_2|, \quad u_2 \in Y \quad \implies \quad u_1 \in Y, \quad \|u_1\|_Y \leq \|u_2\|_Y. \quad (3.1)$$

Общая теория идеальных пространств (в нормированном случае) была рассмотрена в [3], некоторый специальный вариант банаховых функциональных пространств, включающий пространства Орлича, был развит в [11]. Пусть $P: M^+ \rightarrow L^+$ – так называемый монотонный оператор, т.е.,

$$f, h \in M^+, \quad f \leq h \quad \mu\text{-почти всюду} \quad \implies \quad Pf \leq Ph \quad \eta\text{-почти всюду}. \quad (3.2)$$

Для конусов Ω (2.15) и $\tilde{\Omega}$ (2.18) определим нормы сужений оператора P :

$$\|P\|_{\Omega \rightarrow Y} = \sup\{\|Pf\|_Y : f \in \Omega, \|f\|_{\varphi, v} \leq 1\}, \quad (3.3)$$

$$\|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} = \sup\{\|Pf\|_Y : f \in \tilde{\Omega}, \|f\|_{\varphi, v} \leq 1\}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $b > 1$, $\varphi \in A$. Предположим, что весовая функция удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9), и реализуем процедуру дискретизации (2.16)–(2.22) для функции $f \in \Omega$. В приведенных выше обозначениях имеют место следующие оценки:

$$\|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \leq \|P\|_{\Omega \rightarrow Y} \leq d(b) \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y}, \quad (3.5)$$

где $d(b)$ определена в (1.1) при $c = b > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство в (3.5) очевидно ввиду вложения $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. С другой стороны, для каждой функции $f \in \Omega$, при f_1 вида (2.19), имеем

$$f \leq f_1 \quad \implies \quad Pf \leq Pf_1,$$

и $\|f_1\|_{\varphi, v} \leq d(b) \|f\|_{\varphi, v}$ (см. заключение 2.7). При этом,

$$f \in \Omega \quad \implies \quad f_1 = \sum_m f(\mu_m) \chi_{\Delta_m} \in \tilde{\Omega}.$$

Следовательно, для каждой $f \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|Pf\|_Y &\leq \|Pf_1\|_Y \leq \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \|f_1\|_{\varphi, v} \leq d(b) \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \|f\|_{\varphi, v}, \\ \|P\|_{\Omega \rightarrow Y} &= \sup\{\|Pf\|_Y : f \in \Omega, \|f\|_{\varphi, v} \leq 1\} \leq d(b) \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь рассмотрим норму сужения оператора на конус S (2.17):

$$\|P\|_{S \rightarrow Y} = \sup\{\|Pf\|_Y : f \in S, \|f\|_{\varphi, v} \leq 1\}. \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.1. В приведенных обозначениях имеет место следующая двусторонняя оценка:

$$c(b)^{-1}\|P\|_{S \rightarrow Y} \leq \|P\|_{\Omega \rightarrow Y} \leq d(b)\|P\|_{S \rightarrow Y}, \quad (3.8)$$

где $d(b)$ определена в (1.1) при $c = b > 1$, и

$$c(b) = d(c_0(b)), \quad c_0(b) = [b(b-1)^{-1}] > 1. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.8) следует из (3.5) и из аналогичного неравенства

$$\|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \leq \|P\|_{S \rightarrow Y} \leq c(b)\|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y}. \quad (3.10)$$

Левое неравенство в (3.10) очевидно в силу включения $\tilde{\Omega} \subset S$. Докажем правое. Введем $\sup$ -оператор A по формуле $A\gamma = \alpha$, где $\gamma = \{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$, $\alpha = \{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$, и

$$\alpha_m = \sup_{k \geq m} |\gamma_k|, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Докажем ограниченность оператора A : $l_{\varphi, \beta} \rightarrow l_{\varphi, \beta}$. В первую очередь отметим, что $\varphi \in C[0, \infty)$ возрастает, так что

$$|\gamma_k| \leq \alpha_m \quad \text{для всех } k \geq m \quad \implies \quad \sup_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|) \leq \varphi(\lambda^{-1}\alpha_m). \quad (3.12)$$

Обратное неравенство также верно. Действительно, для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеется две возможности:

- 1) найдется $k(m) \geq m$ такое, что $|\gamma_{k(m)}| = \alpha_m$;
- 2) найдется $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такая, что $m \leq k_j \uparrow +\infty$, $|\gamma_{k_j}| \uparrow \alpha_m$.

В случае 1)

$$\varphi(\lambda^{-1}\alpha_m) = \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_{k(m)}|) \leq \sup_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|). \quad (3.13)$$

В случае 2)

$$\varphi(\lambda^{-1}\alpha_m) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_{k_j}|) \leq \sup_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|).$$

Следовательно,

$$\varphi(\lambda^{-1}\alpha_m) = \sup_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|) \leq \sum_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|). \quad (3.14)$$

Тогда

$$j_\lambda(\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}\alpha_m)\beta_m \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m \sum_{k \geq m} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1}|\gamma_k|) \sum_{m \leq k} \beta_m.$$

Согласно (2.22) $\beta_m = b^{m+1} - b^m$, так что

$$\sum_{m \leq k} \beta_m = b^{k+1} = \beta_k c_0(b) \quad (3.15)$$

с учетом равенства (3.9). Следовательно,

$$j_\lambda(\alpha) \leq c_0(b) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda^{-1} |\gamma_k|) \beta_k = c_0(b) j_\lambda(\gamma). \quad (3.16)$$

Это неравенство вместе с (2.5) и (2.6) дает

$$\|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq c(b) \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}}, \quad c(b) = d(c_0(b)). \quad (3.17)$$

Теперь для каждой $f \in S$ обозначим $\gamma = \{\gamma_m\}$, $\gamma_m = f(\mu_m) \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$f = f_{(\gamma)} := \sum_m \gamma_m \chi_{\Delta_m}.$$

Далее введем $\alpha_m = \sup_{k \geq m} \gamma_k$, $m \in \mathbb{Z}$, и для $\alpha = \{\alpha_m\}$ рассмотрим функцию

$$f_{(\alpha)} = \sum_m \alpha_m \chi_{\Delta_m}.$$

Тогда $f_{(\alpha)} \in \tilde{\Omega}$, см. (2.18), и

$$f_{(\alpha)} \geq f_{(\gamma)}, \quad \|f_{(\alpha)}\|_{\varphi,v} = \|\alpha\|_{l_{\varphi,\beta}} \leq c(b) \|\gamma\|_{l_{\varphi,\beta}} = c(b) \|f_{(\gamma)}\|_{\varphi,v}, \quad (3.18)$$

см. (3.17). Из (3.18) следует, что для $f = f_{(\gamma)} \in S$ существует $f_{(\alpha)} \in \tilde{\Omega}$ такая, что

$$Pf \leq Pf_{(\alpha)}, \quad \|f_{(\alpha)}\|_{\varphi,v} \leq c(b) \|f\|_{\varphi,v}.$$

Отметим, что $f_{(\alpha)} \in \tilde{\Omega}$, и получим отсюда, что для любой функции $f \in S$

$$\|Pf\|_Y \leq \|Pf_{(\alpha)}\|_Y \leq \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \|f_{(\alpha)}\|_{\varphi,v} \leq c(b) \|P\|_{\tilde{\Omega} \rightarrow Y} \|f\|_{\varphi,v}.$$

Это дает второе неравенство в (3.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Теорема 3.2 раскрывает основную цель проведенной выше дискретизации (2.16)–(2.22). В этой теореме оценки сужения монотонного оператора на конус убывающих функций Ω сведены к оценкам этого оператора на множестве всех неотрицательных ступенчатых функций. Полученная редукция в ряде случаев позволяет использовать известные результаты для ступенчатых функций (или их чисто дискретные аналоги), чтобы получить нужные оценки на конусе Ω . Этот подход реализован в разделе 4 на примере описания ассоциированных норм.

4. Ассоциированные нормы для конуса неотрицательных убывающих функций в весовом пространстве Орлича. Мы сохраняем здесь все обозначения разделов 1–3 и применяем результаты раздела 3 в важном частном случае, когда идеальное пространство Y совпадает с весовым пространством Лебега $L_1(R_+; g)$, $g \in M^+$, а монотонный оператор P есть тождественный оператор. В этом случае

$$\begin{aligned} \|P\|_{\Omega \rightarrow Y} &= \sup \left\{ \int_0^\infty f g \, dt : f \in \Omega; \|f\|_{\varphi,v} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_0^\infty f g \, dt : f \in \Omega; J_1(f) \leq 1 \right\} = \|g\|' \end{aligned} \quad (4.1)$$

(см. (3.3); напомним, что имеет место эквивалентность $\|f\|_{\varphi,v} \leq 1 \Leftrightarrow J_1(f) \leq 1$, см. (1.21)). Это значит, что в данном случае норма $\|P\|_{\Omega \rightarrow Y}$ совпадает с ассоциированной нормой для конуса Ω (2.15), снабженного функционалом

$$J_1(f) = \int_0^\infty \varphi(f)v \, dt.$$

Согласно результатам раздела 3, см. теорему 3.2, имеем

$$\|P\|_{\Omega \rightarrow Y} \cong \|P\|_{S \rightarrow Y}, \quad (4.2)$$

где в нашем случае

$$\|P\|_{S \rightarrow Y} = \sup \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m g_m : \alpha_m \geq 0, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\alpha_m) \beta_m \leq 1 \right\} \quad (4.3)$$

при

$$g_m = \int_{\Delta_m} g \, dt \geq 0, \quad \beta_m = \int_{\Delta_m} v \, dt = b^m(b-1), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

Отметим, что норма (4.3) совпадает с дискретным вариантом нормы Орлича, см. [2]:

$$\|\{g_m\}\|'_{\varphi,\beta} = \sup \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m |g_m| : \alpha_m \geq 0, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(\alpha_m) \beta_m \leq 1 \right\}. \quad (4.5)$$

Наша ближайшая цель состоит в описании нормы (4.5) в явной форме в терминах дополнительной функции ψ . Мы ограничимся случаем N -функций, см. [2; гл. 8]. Итак, пусть φ есть N -функция, т.е., $\varphi \in C[0, \infty)$,

$$\varphi(s) = \int_0^s p(\sigma) \, d\sigma, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad (4.6)$$

где p – возрастающая непрерывная справа функция, $p(0) = 0$, $p(+\infty) = \infty$. Пусть ψ – дополнительная функция, т.е.

$$\psi(t) = \int_0^t q(\tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad q(\tau) = \sup\{\sigma : p(\sigma) \leq \tau\}. \quad (4.7)$$

Функция q имеет те же свойства, что и p , так что $\psi \in \mathbb{N}$. Хорошо известно, что

$$\psi(t) = \sup_{s \geq 0} [st - \varphi(s)], \quad st \leq \varphi(s) + \psi(t), \quad s, t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.8)$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда $p(s) = t$ или $q(t) = s$).

Следующий известный результат теории дискретных весовых пространств Орлича справедлив для любой положительной весовой последовательности. Он играет ключевую роль в эквивалентном описании нормы Орлича (4.5).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть φ, ψ – дополнительные N -функции, пусть $\beta = \{\beta_m\}$, $\beta_m \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда норма Орлича (4.5) эквивалентна норме

$$\|\{g_m\}\|_{\tilde{l}_{\psi,\beta}} := \|\{\beta_m^{-1} g_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.9)$$

Именно,

$$\|\{g_m\}\|_{\tilde{l}_{\psi,\beta}} \leq \|\{g_m\}\|'_{\varphi,\beta} \leq 2\|\{g_m\}\|_{\tilde{l}_{\psi,\beta}}. \quad (4.10)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 4.2. *Подведем некоторые итоги наших рассуждений.*

Пусть φ, ψ являются дополнительными N -функциями, пусть выполнены условия (1.8) и (1.9), и реализована процедура дискретизации (2.16)–(2.22). Тогда для нормы (4.1) имеет место следующая эквивалентность:

$$\|g\|' \cong \|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, \quad \beta = \{\beta_m\}, \quad \rho_m = \beta_m^{-1} \int_{\Delta_m} |g| dt. \quad (4.11)$$

Теперь наша цель – представить этот ответ в интегральной форме.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть φ, ψ являются дополнительными N -функциями, пусть выполнены условия (1.8) и (1.9). Для фиксированного числа $0 < a < 1$ справедлива следующая двусторонняя оценка ассоциированной нормы (4.1):*

$$\|g\|' \cong \|\rho_a(g)\|_{\psi,v} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \psi(\lambda^{-1} \rho_a(g; t)) v(t) dt \leq 1 \right\}, \quad (4.12)$$

$$\rho_a(g; t) := V(t)^{-1} \int_{\delta_a(t)}^t |g(\tau)| d\tau, \quad \delta_a(t) := V^{-1}(aV(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.13)$$

При различных значениях $a \in (0, 1)$ нормы (4.12) эквивалентны.

Здесь и ниже мы используем обозначение

$$A \cong B \iff \text{существует } c = c(a) \in [1, \infty) \text{ такое, что } c^{-1} \leq A/B \leq c. \quad (4.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Предположим дополнительно, что в теореме 4.3 функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию, т.е.

$$\text{существует } C \in (1, \infty) : \varphi(2t) \leq C\varphi(t) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.15)$$

Тогда

$$\|g\|' \cong \left\| V(t)^{-1} \int_0^t |g(\tau)| d\tau \right\|_{\psi,v}. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Мы используем описание (4.11) с $b = a^{-1/2} > 1$. Тогда $a = b^{-2}$ и

$$\rho'_m \leq \rho_a(g; t) = V(t)^{-1} \int_{V^{-1}(aV(t))}^t |g| d\tau \leq \rho''_m, \quad t \in \Delta_m, \quad (4.17)$$

где

$$\rho'_m = b^{-(m+1)} \int_{\mu_{m-1}}^{\mu_m} |g| d\tau, \quad \rho''_m = b^{-m} \int_{\mu_{m-2}}^{\mu_{m+1}} |g| d\tau. \quad (4.18)$$

Поэтому

$$F_0(t) \leq \rho_a(g; t) \leq F_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.19)$$

где F_0, F_1 – это ступенчатые функции

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \sum_m \rho'_m \chi_{\Delta_m}(t), & F_1(t) &= \sum_m \rho''_m \chi_{\Delta_m}(t), \\ \|F_0\|_{\psi,v} &= \|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, & \|F_1\|_{\psi,v} &= \|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, \end{aligned}$$

так что

$$\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq \|\rho_a(g)\|_{\psi,v} \leq \|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.20)$$

Таким образом, требуемый результат (4.12) будет следовать из эквивалентности

$$\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \cong \|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \cong \|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.21)$$

Остается доказать (4.21). Равенства (4.11) и (4.18) показывают, что

$$\rho'_m = b^{-2}(b-1)\rho_{m-1}, \quad (4.22)$$

$$\rho''_m = \rho'_{m-1} + b\rho'_m + (b-1)\rho_m. \quad (4.23)$$

Следовательно,

$$\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} = b^{-2}(b-1)\|\{\rho_{m-1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq b^{-1}(b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, \quad (4.24)$$

$$\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} = b^2(b-1)^{-1}\|\{\rho'_{m+1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq b^2(b-1)^{-1}\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.25)$$

В последнем неравенстве мы принимаем во внимание ограниченность операторов сдвига в пространстве $l_{\psi,\beta}$ с N -функцией ψ и $\beta = \{\beta_m\}$ из (2.22) (см. замечание 2.5 и лемму 2.6). Итак,

$$\|\{\rho_{m-1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq b\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, \quad \|\{\rho'_{m+1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq \|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}.$$

В силу (4.23) имеем

$$(b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq \|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}, \quad (4.26)$$

$$\|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq \|\{\rho'_{m-1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} + b\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} + (b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.27)$$

Так же, как в (4.24), справедлива оценка

$$\|\{\rho'_{m-1}\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq b\|\{\rho'_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}.$$

Подставим эту оценку в (4.27), учтем неравенство (4.24) и получим

$$\|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq 3(b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}.$$

Следовательно,

$$(b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq \|\{\rho''_m\}\|_{l_{\psi,\beta}} \leq 3(b-1)\|\{\rho_m\}\|_{l_{\psi,\beta}}. \quad (4.28)$$

Оценки (4.24), (4.25), и (4.28) дают требуемую эквивалентность (4.21).

5. Приложения к весовым классам Орлича–Лоренца. Напомним понятие убывающей перестановки функции. Пусть $M_0 = M_0(\mathbb{R}_+)$ есть подпространство всех функций $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, измеримых относительно меры Лебега μ , конечных почти всюду и таких, что для $f \in M_0$ функция распределения λ_f не тождественна бесконечности, где

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| > y\}, \quad y \in \mathbb{R}_+. \quad (5.1)$$

Тогда $0 \leq \lambda_f \downarrow$, $\lambda_f(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow +\infty$.

Пусть f^* есть убывающая перестановка функции f , т.е.

$$f^*(t) = \inf\{y \in \mathbb{R}_+ : \lambda_f(y) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.2)$$

Мы рассматриваем версию Орлича–Лоренца $\Lambda_{\varphi,v}$ для пространства Орлича $L_{\varphi,v}$. Для $f \in M_0$ определим

$$J_\lambda(f^*) = \int_0^\infty \varphi(\lambda^{-1}f^*(t))v(t) dt, \quad \lambda > 0, \quad (5.3)$$

где $v \in M^+$, интегрирование по мере Лебега, и весовая функция удовлетворяет условию (1.8). Весовой класс Орлича–Лоренца $\Lambda_{\varphi,v}$ состоит из функций $f \in M_0(\mathbb{R}_+)$ таких, что $f^* \in L_{\varphi,v}$. Мы снабжаем его функционалом

$$\|f^*\|_{\varphi,v} = \inf\{\lambda > 0 : J_\lambda(f^*) \leq 1\}. \quad (5.4)$$

Чтобы иметь дело с линейным пространством $\Lambda_{\varphi,v}$ следовало предположить дополнительно, что весовая функция V (1.8) удовлетворяет Δ_2 -условию, т.е.

$$\text{существует } C \in \mathbb{R}_+ : V(2t) \leq CV(t) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.5)$$

Известно, что это предположение необходимо и достаточно для справедливости неравенства треугольника в пространстве Лоренца (см., например, [14]). Однако мы не нуждаемся в оценке (5.5) в наших рассмотрениях. В любом случае мы можем рассматривать класс $\Lambda_{\varphi,v}$ как конус в M_0 , состоящий из функций, имеющих конечные значения функционала (5.4). Здесь мы представляем аналоги результатов раздела 3 об оценках норм монотонных операторов над классами Орлича–Лоренца. Напомним некоторые описания. Пусть (N, η) – пространство с неотрицательной σ -конечной мерой η . Через $L = L(N, \eta)$ обозначим пространство всех η -измеримых функций $u : N \rightarrow \mathbb{R}$, $L^+ = \{u \in L : u \geq 0\}$. Пусть $Y_i = Y_i(N, \eta) \subset L$, $i = 1, 2$, – идеальные пространства, $P : M_0^+(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^+$ – монотонный оператор, связанный с этими пространствами следующим условием: для $h \in \Omega$

$$\|Ph\|_{Y_2} = \sup\{\|Pf\|_{Y_1} : f \in M_0^+(\mathbb{R}_+), f^* = h\}. \quad (5.6)$$

Проиллюстрируем эти условия двумя примерами.

ПРИМЕР 5.1. Пусть P – тождественный оператор на $M_0^+(\mathbb{R}_+)$,

$$Y_1 = L_1(\mathbb{R}_+; g), \quad g \in M_0^+(\mathbb{R}_+), \quad Y_2 = L_1(\mathbb{R}_+; g^*).$$

Тогда, равенство (5.6) отражает известное экстремальное свойство убывающих перестановок (см. [11; пп. 2.3–2.8])

$$\sup\left\{\int_0^\infty |fg| dt : f \in M_0, f^* = h\right\} = \int_0^\infty hg^* dt.$$

ПРИМЕР 5.2. Пусть Y – это идеальное пространство, а монотонный оператор $P : M_0^+(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^+$ удовлетворяет условию

$$\|Pf\|_Y \leq \|Pf^*\|_Y, \quad f \in M_0^+(\mathbb{R}_+). \quad (5.7)$$

Тогда, равенство (5.6) справедливо с $Y_1 = Y_2 = Y$.

Действительно, $f \in M_0^+(\mathbb{R}_+) \Rightarrow h := f^* \in M_0^+(\mathbb{R}_+)$, $h^* = h$, и

$$\|Ph\|_Y \leq \sup\{\|Pf\|_Y : f \in M_0^+(\mathbb{R}_+), f^* = h\}.$$

С другой стороны, для любой функции $f \in M_0^+(\mathbb{R}_+)$: $f^* = h$, имеем, согласно (5.7),

$$\|Pf\|_Y \leq \|Pf^*\|_Y = \|Ph\|_Y \implies \sup\{\|Pf\|_Y : f \in M_0^+(\mathbb{R}_+), f^* = h\} \leq \|Ph\|_Y.$$

ПРИМЕР 5.3. В частности, пример 5.2 охватывает операторы вида

$$(Pf)(x) = \int_0^\infty k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{N}, \quad (5.8)$$

где k – неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$, и $k(x, \tau)$ убывает и непрерывна справа как функция от $\tau \in \mathbb{R}_+$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{N}$ мы получим по известной лемме Харди

$$|(Pf)(x)| \leq \int_0^\infty k(x, \tau) |f(\tau)| d\tau \leq \int_0^\infty k(x, \tau) f^*(\tau) d\tau = |(Pf^*)(x)|.$$

Следовательно, для таких операторов неравенство (5.7) справедливо для любого идеального пространства Y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. В обозначениях этого раздела пусть справедливо равенство (5.6). Введем нормы

$$\|P\|_{\Lambda_{\varphi, v} \rightarrow Y_1} = \sup\{\|Pf\|_{Y_1} : f \in M_0^+(\mathbb{R}_+), \|f^*\|_{\varphi, v} \leq 1\}, \quad (5.9)$$

$$\|P\|_{\Omega \rightarrow Y_2} = \sup\{\|Ph\|_{Y_2} : h \in \Omega, \|h\|_{\varphi, v} \leq 1\}. \quad (5.10)$$

Тогда эти нормы совпадают:

$$\|P\|_{\Lambda_{\varphi, v} \rightarrow Y_1} = \|P\|_{\Omega \rightarrow Y_2}. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем эквивалентность

$$f \in M_0, \quad \|f^*\|_{\varphi, v} \leq 1 \iff h = f^* \in \Omega : \|h\|_{\varphi, v} \leq 1,$$

и получим

$$\|P\|_{\Lambda_{\varphi, v} \rightarrow Y_1} = \sup[\sup\{\|Pf\|_{Y_1} : f \in M_0^+(\mathbb{R}_+), f^* = h\} : h \in \Omega, \|h\|_{\varphi, v} \leq 1].$$

Согласно (5.6) правая часть здесь совпадает с

$$\sup[\|Ph\|_{Y_2} : h \in \Omega, \|h\|_{\varphi, v} \leq 1] = \|P\|_{\Omega \rightarrow Y_2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Это предложение позволяет свести оценки нормы $\|P\|_{\Lambda_{\varphi, v} \rightarrow Y_1}$ (5.9) к оценкам, представленным в разделах 3 и 4. В частности, с помощью примера 5.1 мы сводим вычисление ассоциированной нормы для функции $g \in M$ на классе Орлича–Лоренца к ассоциированной норме на конусе Ω для ее убывающей перестановки g^* :

$$\|g\|'_* := \sup\left\{\int_0^\infty |fg| dt : f \in M_0; \|f^*\|_{\varphi, v} \leq 1\right\} = \|g^*\|'.$$

Тогда теорема 4.3 и замечание 4.4 приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть выполнены предположения теоремы 4.3. Тогда

$$\|g\|'_* \cong \|\rho_a(g^*)\|_{\psi,v} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \psi(\lambda^{-1} \rho_a(g^*; t)) v(t) dt \leq 1 \right\}, \quad (5.12)$$

где ρ_a была определена в (4.13). Для разных значений $a \in (0, 1)$ нормы (5.12) эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Предположим дополнительно, что в теореме 5.6 функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию. Тогда

$$\|g\|'_* \cong \left\| V(t)^{-1} \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right\|_{\psi,v}. \quad (5.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. В (5.12) и (5.13) представлены некоторые модификации результатов работы [12], развивающих предшествующие результаты работы [13]. В частности, в [13] была установлена формула (5.13) в предположении, что обе функции φ , ψ удовлетворяют Δ_2 условию. О вопросах двойственности для пространств Орлича и Орлича–Лоренца см. также работы [2], [4], [15], [16].

Благодарим рецензента за ценные замечания, учет которых способствовал улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1958.
- [2] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminários de Matemática, **5**, Univ. Estadual de Campinas, Departamento de Matemática, Campinas, 1989.
- [3] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [4] H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastlyo, “On the dual of Orlicz–Lorentz space”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:6 (2002), 1645–1654.
- [5] В. И. Овчинников, “Интерполяция в квазибанаховых пространствах Орлича”, *Функци. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 78–79.
- [6] П. П. Забрейко, “Об одной интерполяционной теореме для линейных операторов”, *Матем. заметки*, **2**:6 (1967), 593–598.
- [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [8] Г. Я. Лозановский, “О некоторых банаховых решетках”, *Сиб. матем. журн.*, **10** (1969), 584–599.
- [9] Г. Я. Лозановский, “О некоторых банаховых решетках. II”, *Сиб. матем. журн.*, **12** (1971), 562–567.
- [10] V. I. Ovchinnikov, “The method of orbits in interpolation theory”, *Math. Rep.*, **1**:2 (1984), 349–515.
- [11] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure Appl. Math., **129**, Acad. Press, Boston, MA, 1988.
- [12] M. L. Goldman, R. Kerman, “On the principal of duality in Orlicz–Lorentz spaces”, *Function Spaces. Differential Operators. Problems of Mathematical Education*, Vol. 1, Moscow, 1998, 179–183.
- [13] H. Heinig, A. Kufner, “Hardy operators on monotone functions and sequences in Orlicz Spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **53**:2 (1996), 256–270.

- [14] A. Kaminska, L. Maligranda, “Order convexity and concavity in Lorentz spaces $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **160**:3 (2004), 267–286.
- [15] A. Kaminska, M. Mastylo, “Abstract duality Sawyer formula and its applications”, *Monatsh. Math.*, **151**:3 (2007), 223–245.
- [16] A. Kaminska, Y. Raynaud, “New formula for decreasing rearrangements and a class of Orlicz–Lorentz spaces”, *Rev. Mat. Complut.*, **27**:2 (2014), 587–621.
- [17] E. Sawyer, “Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces”, *Studia Math.*, **96**:2 (1990), 145–158.

М. Л. Гольдман

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: seulydia@yandex.ru

Поступило

02.09.2015

Исправленный вариант

12.01.2016