Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло, Матричный оператор Шрёдингера с δ -взаимодействиями, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 1, 59–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:38:55

Матричный оператор Шрёдингера с δ -взаимодействиями

А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло

Изучается матричный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями на полуоси. Используя теорию граничных троек и соответствующих им функций Вейля, мы устанавливаем связь между спектральными свойствами (индексы дефекта, самосопряженность, полуограниченность и т.д.) исследуемых операторов и некоторого класса блочных якобиевых матриц.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, матрицы Якоби, дельта-взаимодействие, индексы дефекта, самосопряженность.

DOI: 10.4213/mzm11122

1. Введение

В настоящей статье мы рассматриваем матричный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями. Именно, изучается оператор $H_{X,\Lambda}$, ассоциированный в пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ с формальным дифференциальным выражением

$$l_{X,\Lambda} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \delta(x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.1)$$

Здесь $\Lambda_k = \Lambda_k^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $X := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$, а δ — функция Дирака. Наша основная цель — исследование связи спектральных свойств операторов $H_{X,\Lambda}$ и блочных якобиевых матриц вида (4.7) и (4.18).

Литература об операторах Шрёдингера с матрично-значными потенциалами обширна, и в качестве основного источника информации и дальнейших ссылок мы лишь укажем [1], [2] (в частности, в этих монографиях изучается случай операторно-значных потенциалов). В последнее время возрос интерес к операторам Шрёдингера, или более общо к операторам Штурма–Лиувилля с коэффициентами-распределениями, что, в свою очередь, продиктовано различными вопросами математической физики. Отметим лишь недавние работы [3]–[8], содержащие, в частности,

Работа А. С. Костенко выполнена при финансовой поддержке Австрийского научного фонда (FWF) (грант № P 26060).

достаточно подробную библиографию. Скалярные операторы, задаваемые выражениями (1.1), впервые возникли в квантовой механике как точно решаемые модели (см. [9]), и их спектральные свойства достаточно хорошо изучены (см., например, [9]–[13]). Одна из основных целей данной работы – обобщить результаты из [10], [11] на случай $p > 1$. А именно, мы показываем, что в случае

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} d_k < \infty, \quad d_k := x_k - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

спектральные свойства минимального оператора $H_{X,\Lambda}$, порождаемого выражением (1.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ (см. точное определение в разделе 3), тесно связаны со спектральными свойствами минимального оператора, задаваемого в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ блочной матрицей Якоби

$$B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1 d_2} I_p + \frac{1}{d_1 + d_2} \Lambda_1 & \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \frac{1}{d_2 d_3} I_p + \frac{1}{d_2 + d_3} \Lambda_2 & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \frac{1}{d_3 d_4} I_p + \frac{1}{d_3 + d_4} \Lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

В частности, мы усиливаем некоторые результаты из [4], [5] об индексах дефекта операторов (1.1).

В заключение кратко опишем содержание работы. Мы изучаем оператор $H_{X,\Lambda}$ в рамках теории расширений симметрических операторов, рассматривая его как расширение некоторого симметрического оператора $H_{\min}$ с бесконечными индексами дефекта (см. (3.5)). Затем мы применяем к $H_{\min}$ и $H_{X,\Lambda}$ теорию граничных троек и соответствующих им функций Вейля (см., например, [14], [15]). Поэтому в разделе 2 мы приводим основные определения и факты, необходимые нам в дальнейшем. Строгое определение оператора $H_{X,\Lambda}$ содержится в разделе 3. В разделе 4 мы строим граничные тройки для оператора $H_{\min}^*$, а также указываем граничные операторы, параметризующие (1.1) в этих граничных тройках. Эти результаты являются ключевыми при установлении связи между спектральными свойствами операторов (1.1) и (1.3). Так, в разделе 5 (см. теорему 1) мы доказываем, что их индексы дефекта совпадают,

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\Lambda}).$$

Применяя результаты из теории блочных матриц Якоби (см., например, [16]–[20]), мы указываем различные достаточные условия для справедливости равенств

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$$

с произвольным $p_1 \in \{0, \dots, p\}$. В заключительном разделе 6 доказывается теорема 2, устанавливающая тесную связь между спектральными свойствами операторов $H_{X,\Lambda}$ и якобиевых матриц $B_{X,\Lambda}$. Оказывается, они одновременно полуограничены, неотрицательны, имеют дискретный (или отрицательный дискретный) спектры и т.д.

Обозначения. Символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ имеют стандартное значение; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, и $\mathbb{C}_\pm = \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$.

Символы $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{H}$ обозначают сепарабельные гильбертовы пространства; $I_{\mathfrak{H}}$ и $O_{\mathfrak{H}}$ – единичный и нулевой операторы в $\mathfrak{H}$ соответственно; $I_p = I_{\mathbb{C}^p}$ и $O_p = O_{\mathbb{C}^p}$; $[\mathfrak{H}, \mathcal{H}]$ – множество ограниченных операторов из $\mathfrak{H}$ в $\mathcal{H}$; $[\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$; $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ – двусторонние идеалы Неймана–Шаттена в $[\mathfrak{H}]$, $p \in (0, \infty]$. Далее, $\ell^2(\mathbb{N}; \mathcal{H}) = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{H}$ – гильбертово пространство $\mathcal{H}$ -значных последовательностей $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ таких, что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_{\mathcal{H}}^2;$$

$\ell_0^2(\mathbb{N}; \mathcal{H}) = \ell_0^2(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{H}$ – подмножество финитных последовательностей из $\ell^2(\mathbb{N}; \mathcal{H})$. Также нам понадобятся следующие соболевские пространства:

$$W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) := \bigoplus_{k=1}^\infty W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p),$$

$$W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) := \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \operatorname{supp}(f) \text{ компактен в } [0, \infty)\}.$$

2. Предварительные сведения

2.1. Линейные отношения. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство. *Линейным отношением* в $\mathfrak{H}$ называется линейное подпространство в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Множество *замкнутых линейных отношений* в $\mathfrak{H}$ обозначим $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$. Линейный оператор T в $\mathfrak{H}$ отождествляют с его графиком $\operatorname{gr} T$, поэтому множество $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ замкнутых линейных операторов в $\mathfrak{H}$ отождествляется с подмножеством $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

Напомним, что

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(\Theta) &= \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}, & \operatorname{ran}(\Theta) &= \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}, \\ \operatorname{ker}(\Theta) &= \{f : \{f, 0\} \in \Theta\}, & \operatorname{mul}(\Theta) &= \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\} \end{aligned}$$

называют *областью определения*, *множеством значений*, *ядром* и *многозначной частью* линейного отношения Θ , соответственно. Сопряженное линейное отношение определяется как

$$\Theta^* := \{\{g, g'\} : (f', g) = (f, g') \text{ для всех } \{f, f'\} \in \Theta\}.$$

Линейное отношение Θ называется *симметрическим* (самосопряженным), если выполнено $\Theta \subseteq \Theta^*$ ($\Theta = \Theta^*$). Отметим, что многозначная часть $\operatorname{mul}(\Theta)$ симметрического линейного отношения Θ ортогональна его области определения $\operatorname{dom}(\Theta)$. Полагая $\mathfrak{H}_{\text{ор}} := \overline{\operatorname{dom}(\Theta)}$, получаем ортогональное разложение $\Theta = \Theta_{\text{ор}} \oplus \Theta_\infty$, где $\Theta_{\text{ор}}$ – симметрический оператор в $\mathfrak{H}_{\text{ор}}$, который называется *операторной частью* линейного отношения Θ , а $\Theta_\infty := \{0\} \times \operatorname{mul}(\Theta)$.

2.2. Граничные тройки и функция Вейля. Всюду в дальнейшем будем считать, что A – плотно заданный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{N}_z(A) := \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \bar{z}) = \operatorname{ker}(A^* - z), \quad z \in \mathbb{C},$$

– его *дефектные подпространства*, а $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ – его *индексы дефекта*. Также будем считать, что $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [14], [2]. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения из $\text{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется *граничной тройкой* оператора A^* , если

(i) справедливо тождество Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*); \quad (2.1)$$

(ii) отображение $\Gamma: f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ из $\text{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует, только когда $n_+(A) = n_-(A)$. В этом случае $n_{\pm}(A) = \dim \mathcal{H}$ и

$$\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \text{dom}(A).$$

Расширение $\tilde{A}$ оператора A называют *собственным*, если

$$\text{dom}(A) \subset \text{dom}(\tilde{A}) \subset \text{dom}(A^*).$$

Множество всех собственных (не обязательно замкнутых) расширений оператора A обозначают Ext_A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [14]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора A^* . Тогда отображение $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}: \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ задает биективное соответствие между Ext_A и множеством всех линейных отношений в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\Theta \mapsto A_{\Theta} := A^* \upharpoonright_{\{f \in \text{dom}(A^*): \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta\}}. \quad (2.2)$$

При этом справедливы соотношения:

- (i) $A_{\Theta}^* = A_{\Theta^*}$;
- (ii) $A_{\Theta} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ в точности тогда, когда $\Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$;
- (iii) $A_{\Theta_1} \subseteq A_{\Theta_2}$ в точности тогда, когда $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$;
- (iv) A_{Θ} – симметрическое (самосопряженное) расширение в точности тогда, когда линейное отношение Θ симметрическое (самосопряженное). В частности, $n_{\pm}(A_{\Theta}) = n_{\pm}(\Theta)$;
- (v) если $A_{\Theta} = A_{\tilde{\Theta}}^*$ и $A_{\tilde{\Theta}} = A_{\Theta}^*$; то для каждого $p \in (0, +\infty]$ справедлива эквивалентность

$$(A_{\Theta} - i)^{-1} - (A_{\tilde{\Theta}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \iff (\Theta - i)^{-1} - (\tilde{\Theta} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}),$$

если к тому же $\text{dom}(\Theta) = \text{dom}(\tilde{\Theta})$, то справедлива импликация

$$\overline{\Theta - \tilde{\Theta}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}) \implies (A_{\Theta} - i)^{-1} - (A_{\tilde{\Theta}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}).$$

Отношение Θ называют *граничным отношением* оператора $\tilde{A} = A_{\Theta}$. Если Θ является графиком линейного оператора B , $\Theta = \text{gr } B$, то область определения расширения $A_{\Theta} = A_B$ описывается следующим образом:

$$\text{dom}(A_B) = \{f \in \text{dom}(A^*) : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\} = A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)}. \quad (2.3)$$

При этом оператор B называют *граничным оператором* расширения A_B .

С каждой граничной тройкой естественным образом связаны два расширения

$$A_0 := A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_0)}, \quad A_1 := A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_1)}.$$

Очевидно, что $A_0 = A_{\Theta_0}$ и $A_1 = A_{\Theta_1}$, где $\Theta_0 = \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 = \mathcal{H} \times \{0\}$. Нетрудно получить из предложения 1 (iv), что $A_0 = A_0^*$ и $A_1 = A_1^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [14]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* . Операторно-значная функция $M(\cdot)$, определяемая равенством

$$M(z)\Gamma_0 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z(A), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

называется *функцией Вейля*, соответствующей граничной тройке Π .

Напомним, что функция Вейля M принадлежит классу функций Неванлинны $R[\mathcal{H}]$, т.е. $M: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow [\mathcal{H}]$ голоморфна, а также

$$\operatorname{Im} z \operatorname{Im} M(z) > 0, \quad M(z) = M^*(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

2.3. Расширения полуограниченного оператора. Пусть $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – плотно заданный полуограниченный симметрический оператор, $A \geq aI_{\mathfrak{H}}$. Будем обозначать его фридрихсово расширение через A_F . Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – некоторая граничная тройка для A^* , и M – соответствующая функция Вейля. Во-первых, отметим, что существует следующий сильный резольвентный предел (см. [14]):

$$M(a) := s - R - \lim_{x \uparrow a} M(x). \quad (2.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [14], [15]. Пусть $A \geq aI_{\mathfrak{H}}$ с некоторым $a \geq 0$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* такая, что $A_0 = A_F$. Пусть также $\Theta = \Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ и A_{Θ} – соответствующее самосопряженное расширение. Если $M(a) \in [\mathcal{H}]$, то

- (i) $A_{\Theta} \geq aI_{\mathfrak{H}}$ в точности тогда, когда $\Theta - M(a) \geq 0_{\mathcal{H}}$;
- (ii) $\kappa_-(A_{\Theta} - aI_{\mathfrak{H}}) = \kappa_-(\Theta - M(a))$.

Если дополнительно A положительно определен, т.е. $a > 0$, то:

- (iii) A_{Θ} положительно определен в точности тогда, когда $\Theta - M(0)$ положительно определено;
- (iv) для каждого $p \in (0, \infty]$ верна эквивалентность

$$E_{A_{\Theta}}(\mathbb{R}_-)A_{\Theta} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \iff E_{\Theta - M(0)}(\mathbb{R}_-)(\Theta - M(0)) \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}).$$

Здесь $\kappa_-(T)$ – размерность “отрицательного” подпространства оператора $T = T^*$, т.е. $\kappa_-(T) = \dim E_T(\mathbb{R}_-)$, где E_T – спектральная мера оператора T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [14]. Пусть $A \geq 0$ и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* такая, что $A_0 = A_F$. Тогда следующие утверждения:

- (i) самосопряженное линейное отношение $\Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ полуограничено снизу;
- (ii) самосопряженное расширение A_{Θ} полуограничено снизу;

эквивалентны, если и только если $M(x)$ равномерно стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, т.е. для любого $a > 0$ найдется $x_a < 0$ такое, что $M(x) < -aI_{\mathcal{H}}$ для всех $x < x_a$ (в этом случае мы будем писать $M(x) \rightrightarrows -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим (см. [14; предложение 4]), что $A_0 = A_F$ в точности тогда, когда для всех $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (M(x)f, f)_{\mathcal{H}} = -\infty,$$

где M – это соответствующая функция Вейля. Однако, при этом $M(x)$ не обязана равномерно стремиться к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ (см. [14; с. 23]).

2.4. Прямые суммы граничных троек. Пусть S_k – плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Будем считать, что

$$n_+(S_k) = n_-(S_k) \leq \infty \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим оператор $A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k$, действующий в $\mathfrak{H} := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k$. Ясно, что

$$A^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k^*,$$

$$\text{dom}(A^*) = \left\{ f = \bigoplus_{k=1}^{\infty} f_k \in \mathfrak{H} : f_k \in \text{dom}(S_k^*), \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k^* f_k\|_{\mathfrak{H}_k}^2 < \infty \right\}.$$

Пусть $\Pi_k = \{\mathcal{H}_k, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ – граничные тройки для операторов S_k^* , $k \in \mathbb{N}$. Полагая $\mathcal{H} := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$, определим отображения Γ_0 и Γ_1 следующим образом:

$$\Gamma_j := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma_j^k, \quad \text{dom}(\Gamma_j) = \left\{ f = \bigoplus_{k=1}^{\infty} f_k \in \text{dom}(A^*) : \sum_{k=1}^{\infty} \|\Gamma_j^k f_k\|_{\mathcal{H}_k}^2 < \infty \right\}. \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [11], [21]. Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$ и отображения Γ_j определены в (2.5). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ называется *прямой суммой граничных троек* и обозначается $\Pi := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k$.

Прямая сумма граничных троек $\Pi := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, вообще говоря, не является граничной тройкой для оператора $A^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k^*$ (см. [11; § 3], а также [22], [21]). В заключение лишь отметим, что в [11], [21] были предложены процедуры “регуляризации” граничных троек Π_k , позволяющие получать граничную тройку из суммы модифицированных граничных троек $\tilde{\Pi}_k$.

3. Матричный оператор Шрёдингера с δ -взаимодействиями

Пусть $X = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ – строго возрастающая последовательность, и пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. Обозначим

$$d_k := x_k - x_{k-1}, \quad r_k := \sqrt{d_k + d_{k+1}} \quad (3.1)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и всюду в дальнейшем будем считать, что

$$d^* := \sup_{k \in \mathbb{N}} d_k < \infty. \quad (3.2)$$

Пусть также $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$, причем $\Lambda_k = \Lambda_k^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение

$$l_{X,\Lambda} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p + \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k \delta(x - x_k), \quad (3.3)$$

с которым в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ ассоциируют следующий дифференциальный оператор:

$$H_{X,\Lambda}^0 := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \quad (3.4)$$

$$\text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) = \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \begin{array}{l} f'(0) = 0, \quad f(x_k+) = f(x_k-) \\ f'(x_k+) - f'(x_k-) = \Lambda_k f(x_k) \end{array} \right\}.$$

Его замыкание обозначим через $H_{X,\Lambda}$, $H_{X,\Lambda} := \overline{H_{X,\Lambda}^0}$. Будем изучать $H_{X,\Lambda}$ в рамках теории расширений, рассматривая его как собственное расширение оператора

$$H_{\min} = \bigoplus_{k=1}^\infty H_k, \quad H_k = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \quad \text{dom}(H_k) = W_0^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p). \quad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^\infty H_k^*, \quad \text{dom}(H_{\min}^*) = W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p). \quad (3.6)$$

4. Граничные тройки и параметризация оператора $H_{X,\Lambda}$

Прежде чем формулировать результаты, нам понадобится один простой факт. Пусть A – плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ и $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$. Пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ – другое гильбертово пространство. В новом гильбертовом пространстве $\tilde{\mathfrak{H}} := \mathfrak{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ рассмотрим оператор $\tilde{A} := A \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}$. Очевидно, что $\tilde{A}$ – симметрический плотно заданный оператор в $\tilde{\mathfrak{H}}$ и

$$\tilde{A}^* = A^* \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}, \quad \text{dom}(\tilde{A}^*) = \text{dom}(A^*) \otimes \tilde{\mathcal{H}}.$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* , а M – соответствующая функция Вейля. Тогда совокупность $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}, \Gamma_0 \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}, \Gamma_1 \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}\}$ будет граничной тройкой для оператора $\tilde{A}^*$, а $\tilde{M}(\cdot) := M \otimes I_{\tilde{\mathcal{H}}}$ – соответствующей функцией Вейля.

Используя лемму 1 и результаты работы [11], нетрудно построить граничную тройку для оператора $H_{\min}^*$. Для операторов H_k^* , $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим сначала граничные тройки $\tilde{\Pi}_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \tilde{\Gamma}_0^k, \tilde{\Gamma}_1^k\}$ вида

$$\tilde{\Gamma}_0^k f := \begin{pmatrix} f(x_{k-1}+) \\ f'(x_k-) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_1^k f := \begin{pmatrix} f'(x_{k-1}+) \\ f(x_k-) \end{pmatrix}, \quad f \in W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p). \quad (4.1)$$

Отметим, что соответствующая функция Вейля имеет вид

$$\widetilde{M}_k(z) = \frac{1}{\cos(\sqrt{z} d_k)} \begin{pmatrix} \sqrt{z} \sin(\sqrt{z} d_k) & 1 \\ 1 & \frac{\sin(\sqrt{z} d_k)}{\sqrt{z}} \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (4.2)$$

Прямая сумма $\widetilde{\Pi} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \widetilde{\Pi}_k$ является граничной тройкой для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$ тогда и только тогда, когда $\inf_{k \in \mathbb{N}} d_k > 0$ (см. [11]). В связи с этим в [21] (см. также [11]) была предложена процедура “регуляризации” исходных троек $\widetilde{\Pi}_k$. А именно, полагая

$$R_k := \begin{pmatrix} d_k^{1/2} & 0 \\ 0 & d_k^{3/2} \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad Q_k := \widetilde{M}_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad (4.3)$$

$$\Gamma_0^k := R_k \widetilde{\Gamma}_0^k, \quad \Gamma_1^k := R_k^{-1} (\widetilde{\Gamma}_1^k - Q_k \widetilde{\Gamma}_0^k), \quad (4.4)$$

получим новые тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ для операторов H_k^* . Применяя лемму 1 и [11; теорему 4.7], получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) Совокупность $\Pi = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ и граничные тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_0^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{1/2} f(x_{k-1}+) \\ d_k^{3/2} f'(x_k-) \end{pmatrix}, \\ \Gamma_1^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{-1/2} (f'(x_{k-1}+) - f'(x_k-)) \\ d_k^{-3/2} (f(x_k-) - f(x_{k-1}+)) - d_k^{-1/2} f'(x_k-) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

образует граничную тройку для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$.

(ii) Соответствующая функция Вейля имеет вид

$$M(z) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(z), \quad M_k(z) = R_k^{-1} (\widetilde{M}_k(z) - Q_k) R_k^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (4.6)$$

где $\widetilde{M}_k$ и R_k, Q_k определены в (4.2) и (4.3), соответственно.

Теперь, используя предложение 1, мы можем представить оператор $H_{X,\Lambda}$ в виде (2.3). Для этого определим блочную матрицу Якоби

$$B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & -d_1^{-2} I_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ -d_1^{-2} I_p & -d_1^{-2} I_p & d_1^{-3/2} d_2^{-1/2} I_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & d_1^{-3/2} d_2^{-1/2} I_p & d_2^{-1} \Lambda_1 & -d_2^{-2} I_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & -d_2^{-2} I_p & -d_2^{-2} I_p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Оказывается, что минимальный оператор, задаваемый матрицей (4.7) в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ и который мы также обозначим $B_{X,\Lambda}$, будет граничным оператором для $H_{X,\Lambda}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора $H_{\min}^*$, построенная в предложении 4. Тогда

$$\text{dom}(H_{X,\Lambda}) = \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \Gamma_1 f = B_{X,\Lambda} \Gamma_0 f\}. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $B_{X,\Lambda}^0$ оператор, задаваемый матрицей (4.7) в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ на области $\text{dom}(B_{X,\Lambda}^0) = \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$. Покажем, что

$$\text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) = \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \Gamma_1 f = B_{X,\Lambda}^0 \Gamma_0 f\}. \quad (4.9)$$

Пусть $\tilde{\Gamma}_j := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j^k$, $j \in \{0, 1\}$, а отображения $\tilde{\Gamma}_j^k$, $k \in \mathbb{N}$ определены в (4.1). Тогда $\tilde{\Gamma}_j f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ для всех $f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^2)$. Полагая

$$\tilde{B}_\Lambda := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \Lambda_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \Lambda_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

несложные вычисления показывают, что $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда $\tilde{\Gamma}_1 f = \tilde{B}_\Lambda \tilde{\Gamma}_0 f$. Из (4.3) и (4.4) вытекает следующая связь между матрицами $\tilde{B}_\Lambda$ и $B_{X,\Lambda}$:

$$B_{X,\Lambda} = R_X^{-1} (\tilde{B}_\Lambda - Q_X) R_X^{-1}, \quad R_X := \bigoplus_{k=1}^{\infty} R_k, \quad Q_X := \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad (4.11)$$

что, в свою очередь, доказывает (4.9). Осталось заметить, что

$$H_{X,\Lambda} = \overline{H_{X,\Lambda}^0} = \overline{H_{B_{X,\Lambda}^0}^0} = H_{B_{X,\Lambda}}$$

(см. предложение 1 (i)).

В дальнейшем нам понадобится еще одна граничная тройка. А именно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим отображения $\tilde{\Gamma}_0^k, \tilde{\Gamma}_1^k: W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p) \rightarrow \mathbb{C}^{2p}$ следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_0^k f := \begin{pmatrix} f(x_{k-1}+) \\ -f(x_k-) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_1^k f := \begin{pmatrix} f'(x_{k-1}+) \\ f'(x_k-) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Нетрудно проверить (см. [11]), что соответствующая функция Вейля имеет вид

$$\tilde{M}_k(z) = -\frac{\sqrt{z}}{\sin(\sqrt{z} d_k)} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{z} d_k) & 1 \\ 1 & \cos(\sqrt{z} d_k) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (4.13)$$

Как и в предыдущем случае, если $\inf_{k \in \mathbb{N}} d_k = 0$, то прямая сумма $\tilde{\Pi} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \tilde{\Pi}_k$ не будет граничной тройкой для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$. Полагая

$$R_k := \begin{pmatrix} \sqrt{d_k} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_k} \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad Q_k := \tilde{M}_k(0) = -\frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad (4.14)$$

рассмотрим новую граничную тройку $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$, в которой отображения Γ_0^k и Γ_1^k получены из (4.12) при помощи (4.4). Из леммы 1 и [11; теорема 4.1] легко следует следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. (i) Совокупность $\Pi = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ и граничные тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_0^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{1/2} f(x_{k-1}+) \\ -d_k^{1/2} f(x_k-) \end{pmatrix}, \\ \Gamma_1^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{-1/2} f'(x_{k-1}+) + d_k^{-3/2} (f(x_{k-1}+) - f(x_k-)) \\ d_k^{-1/2} f'(x_k-) + d_k^{-3/2} (f(x_{k-1}+) - f(x_k-)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

образует граничную тройку для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$.

(ii) Соответствующая функция Вейля имеет вид

$$M(z) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(z), \quad M_k(z) = R_k^{-1} (\widetilde{M}_k(z) - Q_k) R_k^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (4.16)$$

где $\widetilde{M}_k$ и R_k, Q_k определены в (4.13) и (4.14), соответственно.

Отметим, что данная функция Вейля обладает важным экстремальным свойством.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $M(\cdot)$ – функция Вейля из предложения 6. Тогда

$$M(x) \rightrightarrows -\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с очевидностью вытекает из [11; предложение 4.4].

Рассмотрим теперь матрицу

$$B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1 d_2} I_p + \frac{1}{d_1 + d_2} \Lambda_1 & \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \frac{1}{d_2 d_3} I_p + \frac{1}{d_2 + d_3} \Lambda_2 & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \frac{1}{d_3 d_4} I_p + \frac{1}{d_3 + d_4} \Lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Как и ранее, минимальный и преминальный операторы, ассоциированные с этой матрицей в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$, будем обозначать $B_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}^0$, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора $H_{\min}^*$, построенная в предложении 6. Тогда

$$\text{dom}(H_{X,\Lambda}) = \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta_{X,\Lambda}\}, \quad (4.19)$$

где $\Theta_{X,\Lambda}$ – симметрическое линейное отношение, операторная часть которого $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ унитарно эквивалентна минимальному оператору (4.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\Gamma}_j := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}_j^k$, $j \in \{0, 1\}$, где $\tilde{\Gamma}_j^k$ определены в (4.12). Очевидно, что $\tilde{\Gamma}_j f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ для всех $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$. Положим

$$C := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & -\mathbb{I}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & -\mathbb{I}_p & \mathbb{I}_p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad D_\Lambda := \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \Lambda_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{I}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \Lambda_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда $C\tilde{\Gamma}_1 f = D_\Lambda \tilde{\Gamma}_0 f$. Поэтому, полагая

$$C_{X,\Lambda} := CR_X, \quad D_{X,\Lambda} := (D_\Lambda - CQ_X)R_X^{-1},$$

где $R_X = \bigoplus_{k=1}^\infty R_k$, $Q_X = \bigoplus_{k=1}^\infty Q_k$, а R_k и Q_k определены в (4.14), и учитывая (4.4), мы заключаем, что $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда

$$C_{X,\Lambda} \Gamma_1 f = D_{X,\Lambda} \Gamma_0 f, \quad (4.20)$$

где Γ_0 и Γ_1 – отображения, построенные в предложении 6.

Определим теперь линейное отношение $\Theta_{X,\Lambda}^0$ в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$

$$\Theta_{X,\Lambda}^0 = \{ \{f, g\} \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) \times \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) : D_{X,\Lambda} f = C_{X,\Lambda} g \}.$$

Во-первых,

$$\text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) = \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta_{X,\Lambda}^0\}.$$

Также легко убедиться в том, что $\Theta_{X,\Lambda}^0$ – симметрическое линейное отношение. Обозначим его замыкание через $\Theta_{X,\Lambda} := \overline{\Theta_{X,\Lambda}^0}$. Тогда $\Theta_{X,\Lambda}$ – симметрическое и, следовательно, для него справедливо разложение $\Theta_{X,\Lambda} = \Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}} \oplus \Theta_{X,\Lambda}^\infty$, в котором $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ – операторная часть $\Theta_{X,\Lambda}$, а $\Theta_{X,\Lambda}^\infty = \{0\} \times \text{mul}(\Theta_{X,\Lambda})$.

Из определения находим

$$\begin{aligned} \text{mul}(\Theta_{X,\Lambda}) &= \overline{\text{mul}(\Theta_{X,\Lambda}^0)} = \ker C_{X,\Lambda} = \overline{R_X^{-1} \ker(C)}, \\ \mathcal{H}_{\text{op}} &= \overline{\text{dom}(\Theta_{X,\Lambda})} = \overline{\text{ran}(C_{X,\Lambda}^*)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\text{op}}$ в точности тогда, когда $f_1 = 0$ и $r_{k+1}f_{2k} + r_k f_{2k+1} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathbf{f}_k$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{f}_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{-\sqrt{d_k} f_k}_{2k}, \underbrace{\sqrt{d_{k+1}} f_k}_{2k+1}, 0, \dots), \quad f_k \in \mathbb{C}^p.$$

Очевидно, что $\mathbf{f}_k \perp \mathbf{f}_n$, если $k \neq n$. Определим $\mathcal{H}_k := \{\mathbf{f}_k : f_k \in \mathbb{C}^p\}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\dim \mathcal{H}_k = p$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Более того, $\mathcal{H}_{\text{op}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k$. Обозначим через P_k ортопроектор в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ на подпространство $\mathcal{H}_k$.

Покажем, что $\mathbf{f}_k \in \text{dom}(\Theta_{X,\Lambda})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно указать $\mathbf{g}_k = \{\mathbf{g}_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) \times \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ такой, что $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_k\} \in \Theta_{X,\Lambda}$, т.е.

$$C_{X,\Lambda} \mathbf{g}_k = D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_k. \quad (4.21)$$

Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_1 &= (0, 0, \Lambda_1 f_1 + (d_1^{-1} + d_2^{-1}) f_1, 0, d_2^{-1} f_1, 0, \dots), \\ D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_k &= (0, \dots, 0, \underbrace{d_k^{-1} f_k}_{2k-1}, 0, \underbrace{\Lambda_k f_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1}) f_k}_{2k+1}, 0, \underbrace{d_{k+1}^{-1} f_k}_{2k+3}, 0, \dots) \end{aligned}$$

для всех $k \geq 2$. Так как

$$C_{X,\Lambda} \mathbf{g}_k = CR_X \mathbf{g}_k = (0, 0, -\sqrt{d_1} \mathbf{g}_{k,2} + \sqrt{d_2} \mathbf{g}_{k,3}, 0, -\sqrt{d_2} \mathbf{g}_{k,4} + \sqrt{d_3} \mathbf{g}_{k,5}, 0, \dots),$$

из системы уравнений (4.21) мы заключаем, что $\mathbf{g}_k$ имеет вид $\mathbf{g}_k = \tilde{\mathbf{g}}_k + \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} \in \text{mul}(\Theta_{X,\Lambda})$, $\tilde{\mathbf{g}}_k \in \mathcal{H}_{\text{ор}}$ и

$$\begin{aligned} P_{k-1} \tilde{\mathbf{g}}_k &= \frac{-1}{r_{k-1} d_k} f_k, & P_{k+1} \tilde{\mathbf{g}}_k &= \frac{-1}{r_{k+1} d_{k+1}} f_k, \\ P_k \tilde{\mathbf{g}}_k &= r_k \left(\frac{1}{d_k d_{k+1}} f_k + \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k f_k \right), \end{aligned}$$

и $P_j \tilde{\mathbf{g}}_k = 0$ для всех $|j - k| > 1$. Из этого также следует, что $\{\mathbf{f}_k, \tilde{\mathbf{g}}_k\} \in \Theta_{X,\Lambda}^{\text{ор}}$ и кроме того, матричное представление $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{ор}}$ относительно разложения $\mathcal{H}_{\text{ор}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ задается блочной якобиевой матрицей (4.18).

5. Индексы дефекта оператора $H_{X,\Lambda}$

В [10], [11] показано, что в скалярном случае спектральные свойства оператора $H_{X,\Lambda}$ тесно связаны со свойствами специальных матриц Якоби. Здесь мы проследим эту аналогию для матричного случая. Следующий результат обобщает теорему 5.4 из [11] на случай $p > 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B_{X,\Lambda}$ – минимальный оператор, задаваемый одной из матриц (4.7) или (4.18). Тогда

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) \leq p. \quad (5.1)$$

В частности, индексы дефекта минимальных операторов (4.7) и (4.18) совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из сопоставления предложений 5 и 7 с предложением 1 (iv).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При дополнительном условии вещественности матриц $\Lambda_k = \Lambda_k^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ в [5; теорема 3] было установлено другим методом, что $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p$ в точности тогда, когда $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = p$, где $B_{X,\Lambda}$ – матрица вида (4.18).

Применяя известные результаты об индексах дефекта блочных матриц Якоби, теорема 1 позволяет изучать индексы дефекта оператора $H_{X,\Lambda}$. Вообще говоря, индексы дефекта матриц Якоби не равны (см., например, [23], [24]). Однако, индексы дефекта равны, если хотя бы один из них максимален, т.е. равен p (см. [25]). Из этого факта и теоремы 1 мгновенно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n_{+}(H_{X,\Lambda}) = p$ или $n_{-}(H_{X,\Lambda}) = p$, то

$$n_{+}(H_{X,\Lambda}) = n_{-}(H_{X,\Lambda}) = p. \quad (5.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

то оператор $H_{X,\Lambda}$ самосопряжен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя матричный признак Карлемана (см., например, [17; теорема 7.2.9]) к оператору (4.7) и отмечая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 + d_k^{3/2} d_{k+1}^{1/2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

мы получаем $B_{X,\Lambda} = B_{X,\Lambda}^*$. Остается применить теорему 1.

Используя признак Березанского–Костюченко–Мирзоева (см. [20; теорема 1]), мы можем получить условия максимальности индексов дефекта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ и

$$d_k d_{k+2} \geq d_{k+1}^2 \quad (5.3)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} \|\Lambda_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1})I_p\|_{\mathbb{C}^p} < \infty, \quad (5.4)$$

то $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для матрицы $B_{X,\Lambda}$ вида (4.18) выполнены условия теоремы 1 из [20]. Для этого обозначим

$$A_k := \frac{1}{d_k d_{k+1}} I_p + \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k, \quad B_k := \frac{-1}{r_k r_{k+1} d_{k+1}} I_p, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

и определим последовательность матриц $\{C_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^{p \times p}$ следующим образом:

$$C_1 := B_1^{-1}, \quad C_2 := I_p, \quad C_{k+1} := -B_k^{-1} B_{k-1} C_{k-1} = -\frac{r_{k+1} d_{k+1}}{r_{k-1} d_k} C_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Легко видеть, что

$$C_{k+1} = (-1)^{k+1} r_{k+1} \frac{d_{k+1} d_{k-1} \cdots}{d_k d_{k-2} \cdots} \times \begin{cases} r_1^{-1} B_1^{-1}, & k = 2n+1, \\ r_2^{-1} I_p, & k = 2n. \end{cases}$$

Из условия (5.3) приходим к неравенству

$$\frac{d_{k+1} d_{k-1} \cdots}{d_k d_{k-2} \cdots} = \sqrt{d_{k+2}} \frac{d_{k+1}}{\sqrt{d_{k+2} d_k}} \frac{d_{k-1}}{\sqrt{d_k d_{k-2}}} \times \cdots \times c_k \leq \frac{\sqrt{d_{k+2}}}{\min\{\sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}\}}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, где

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_2}}, & k = 2n, \\ \frac{1}{\sqrt{d_3}}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\|C_{k+1}\| \leq cr_{k+1} \sqrt{d_{k+2}} = c \sqrt{d_{k+2}d_{k+1} + d_{k+2}^2} \leq c(d_{k+1} + d_{k+2}), \quad (5.6)$$

где $c > 0$ – некоторая константа, независимая от $k \in \mathbb{N}$. Во-первых, из этих неравенств, а также условия $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|^2 < \infty.$$

Кроме того, из (5.6) с учетом условия (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|C_k^* A_k C_k\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|^2 \|A_k\| \leq c^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} r_k^2 \|A_k\| \\ &= c^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} \|\Lambda_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1}) I_p\| < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = p$ по теореме 1 из [20]. Осталось применить теорему 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 3 и предложение 8 в скалярном случае ($p = 1$) доказаны в [11]. В случае $p > 1$ эти результаты получены другим методом в [5] при дополнительном условии вещественности матриц Λ_k .

Приведем теперь примеры операторов $H_{X,\Lambda}$ таких, что $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$ с $0 < p_1 < p$. Пусть $p = p_1 + p_2$ с некоторыми натуральными p_1 и p_2 . Представим каждую матрицу $\Lambda_k \in \mathbb{C}^{p \times p}$ в виде

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \Lambda_k^{11} & \Lambda_k^{12} \\ \Lambda_k^{21} & \Lambda_k^{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k^{ij} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_j}, \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ – невозрастающая последовательность такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие (5.3). Если матрицы $\Lambda_k = \Lambda_k^*$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) матрицы Λ_k^{11} , $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию (5.4) с p_1 вместо p ;
- (ii) $\|\Lambda_k^{12}\|_{\mathbb{C}^{p_1 \times p_2}} = \mathcal{O}(d_k)$, $k \rightarrow \infty$;
- (iii) $\Lambda_k^{22} = \widehat{\Lambda}_k^{22} + \widetilde{\Lambda}_k^{22}$, причем $\|\widetilde{\Lambda}_k^{22}\|_{\mathbb{C}^{p_2 \times p_2}} = \mathcal{O}(d_k)$ при $k \rightarrow \infty$, а $\widehat{\Lambda}_k^{22} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_2}$ – диагональные матрицы такие, что либо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_k^3 = \infty, \quad j \in \{1, \dots, p_2\}, \quad (5.8)$$

либо найдется постоянная $M > 0$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $j \in \{1, \dots, p_2\}$

$$\frac{4}{d_{k+1}^2} + \frac{\alpha_{k,j}}{d_{k+1}} \leq M; \quad (5.9)$$

то $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим якобиеву матрицу (4.18). Из условий (ii) и (iii) следует, что $B_{X,\Lambda}$ является ограниченным возмущением матрицы $B_{X,\hat{\Lambda}}$, в которой

$$\hat{\Lambda}_k = \Lambda_k^{11} \oplus \hat{\Lambda}_k^{22}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\hat{\Lambda}})$, согласно теореме 1

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(H_{X,\hat{\Lambda}}) = n_{\pm}(B_{X,\hat{\Lambda}}).$$

Заметим, что оператор $H_{X,\hat{\Lambda}}$ является прямой суммой операторов $H_{X,\Lambda^{11}}$ и $H_{X,\hat{\Lambda}^{22}}$ относительно разложения $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p) = L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{p_1}) \oplus L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{p_2})$. Следовательно,

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(H_{X,\Lambda^{11}}) + n_{\pm}(H_{X,\hat{\Lambda}^{22}}).$$

Применяя предложение 8 к оператору $H_{X,\Lambda^{11}}$, получаем

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda^{11}}) = p_1.$$

Осталось доказать, что оператор $H_{X,\hat{\Lambda}^{22}}$ самосопряжен, т.е. $n_{\pm}(H_{X,\hat{\Lambda}^{22}}) = 0$. Поскольку $\alpha_k^{22} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_2}$ – диагональные матрицы для всех $k \in \mathbb{N}$, то оператор $H_{X,\hat{\Lambda}^{22}}$, в свою очередь, распадается в прямую сумму одномерных операторов H_{X,α_j} , где $\alpha_j = \{\alpha_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$.

Предположим сначала, что выполнено условие (5.8). Учитывая монотонность последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ и неравенства $r_k \geq \sqrt{d_k}$ и $r_k \geq \sqrt{d_{k+1}}$, из (5.8) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_k d_{k+1} r_k r_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_{k+1}^3 = \infty.$$

Согласно [11; предложение 5.11(i)] $n_{\pm}(H_{X,\alpha_j}) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, p_2\}$.

Предположим теперь, что справедливы неравенства (5.9) с некоторой постоянной $M > 0$. Используя монотонность последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, из неравенств (5.9) находим

$$\alpha_{k,j} + \frac{1}{d_k} \left(1 + \frac{r_k}{r_{k-1}}\right) + \frac{1}{d_{k+1}} \left(1 + \frac{r_k}{r_{k+1}}\right) \leq \alpha_{k,j} + \frac{4}{d_{k+1}} \leq M d_{k+1} < M(d_k + d_{k+1}).$$

Применяя [11; предложение 5.11(ii)], заключаем $n_{\pm}(H_{X,\alpha_j}) = 0$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$. Это завершает доказательство.

ПРИМЕР 1. Пусть $d_k = 1/k$ и Λ_k имеют диагональный вид, $\Lambda_k = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^p$, для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть также

$$\begin{aligned} \alpha_{k,j} &= -2k - 1 + \mathcal{O}(k^{-1}), & j \in \{1, \dots, p_1\}, \\ \alpha_{k,j} &= -4k - 4 + \mathcal{O}(k^{-1}), & j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что матрицы $\Lambda_k^{11} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_1}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют (5.4). Кроме того, для всех $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ имеем

$$\frac{4}{d_{k+1}^2} + \frac{\alpha_{k,j}}{d_{k+1}} = 4(k+1)^2 - (k+1)(4k+4 + \mathcal{O}(k^{-1})) = \mathcal{O}(1),$$

когда $k \rightarrow \infty$. Применяя предложение 9, заключаем, что $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$.

6. Спектральные свойства оператора $H_{X,\Lambda}$

Связь гамильтонианов (3.3) с якобиевыми матрицами (4.18) простирается значительно дальше равенства их индексов дефекта. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $B_{X,\Lambda}$ – это минимальный оператор, задаваемый матрицей (4.18). Пусть также $B_{X,\Lambda} = B_{X,\Lambda}^*$ (а значит и $H_{X,\Lambda} = H_{X,\Lambda}^*$). Тогда справедливы утверждения.

- (i) Операторы $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ полуограничены снизу лишь одновременно.
- (ii) Операторы $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ неотрицательны (положительно определены) лишь одновременно. Более того,

$$\kappa_-(H_{X,\Lambda}) = \kappa_-(B_{X,\Lambda}). \quad (6.1)$$

В частности, отрицательные части спектров операторов $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ конечны или бесконечны лишь одновременно.

- (iii) Для каждого $p \in (0, \infty]$ справедлива эквивалентность

$$E_{H_{X,\Lambda}}(\mathbb{R}_-)H_{X,\Lambda} \in \mathfrak{S}_p \iff E_{B_{X,\Lambda}}(\mathbb{R}_-)B_{X,\Lambda} \in \mathfrak{S}_p.$$

В частности, отрицательные части спектров операторов $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ дискретны лишь одновременно.

- (iv) $\sigma_c(H_{X,\Lambda}) \subset \mathbb{R}_+$ ($\sigma_c(H_{X,\Lambda}) \subseteq [0, \infty)$) в точности тогда, когда $\sigma_c(B_{X,\Lambda}) \subset \mathbb{R}_+$ ($\sigma_c(B_{X,\Lambda}) \subseteq [0, \infty)$).

- (v) Спектр оператора $H_{X,\Lambda}$ дискретен в точности тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ и спектр матрицы $B_{X,\Lambda}$ дискретен.

- (vi) Пусть $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\Lambda}_k\}$, где $\tilde{\Lambda}_k = \tilde{\Lambda}_k^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \mathbb{N}$ и $B_{X,\tilde{\Lambda}}$ – минимальный оператор, ассоциированный с матрицей вида (4.18), построенной по последовательности $\tilde{\Lambda}$ вместо Λ . Если $H_{X,\tilde{\Lambda}} = H_{X,\tilde{\Lambda}}^*$, то для каждого $p \in (0, +\infty]$ справедлива эквивалентность

$$(H_{X,\Lambda} - i)^{-1} - (H_{X,\tilde{\Lambda}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p \iff (B_{X,\Lambda} - i)^{-1} - (B_{X,\tilde{\Lambda}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p.$$

- (vii) Если $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(d_k + d_{k+1})) \|\Lambda_k\| < \infty$, то абсолютно непрерывная часть $H_{X,\Lambda}^{\text{ac}}$ оператора $H_{X,\Lambda}$ унитарно эквивалентна оператору H_N , где

$$H_N = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \quad \text{dom}(H_N) = \{W^{2,2}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p) : f'(0) = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим граничную тройку Π для оператора $H_{\min}^*$, определенную в предложении 6. Из (4.14) и (4.16) следует, что $M_k(0) = \mathbb{O}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, из (4.16) и (2.4) получаем

$$M(0) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(0) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}.$$

В частности, $M(0) \in [\mathcal{H}]$. Кроме того,

$$H_0 := H_{\min}^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_0)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k^F, \quad (6.2)$$

где H_k^F – это фридрихово расширение оператора H_k , а именно

$$H_k^F = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p,$$

$$\text{dom}(H_k^F) = \{f \in W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p) : f(x_{k-1}+) = f(x_k-) = 0\}.$$

Следовательно, H_0 будет фридриховым расширением оператора $H_{\min}$. Теперь утверждение о полуограниченности снизу следует из предложения 7, следствия 1 и предложения 3.

(ii) Утверждение о неотрицательности вытекает из предложения 2(i) с учетом равенства $M(0) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}$. В частности, равенство (6.1) следует из предложения 2(ii). Чтобы доказать оставшуюся часть утверждения (ii), следует, согласно предложению 2(iii), установить положительную определенность оператора H_0 . Так как

$$\sigma(H_k^F) = \left\{ \frac{\pi^2 j^2}{d_k^2} \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad (6.3)$$

из определения (6.2) получаем

$$\inf \sigma(H_0) = \frac{\pi^2}{(d^*)^2}.$$

В силу условия (3.2) $\inf \sigma(H_0) > 0$ и, следовательно, H_0 положительно определен.

(iii) Требуемая эквивалентность вытекает из предложения 2(iv).

(iv) Вытекает из утверждения (ii) при $p = \infty$, так как $\sigma_c(T) = \{0\}$ для каждого компактного оператора T .

(v) Из (6.2) и (6.3) с очевидностью заключаем, что спектр оператора H_0 дискретен в точности тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$. Осталось применить предложение 1(v).

(vi) Вытекает из предложения 7 и предложения 1(v).

(vii) Легко видеть, что $H_N = H_{X, \mathbb{O}}$, т.е. область определения оператора H_N можно представить в виде (4.19) с $\Theta = \Theta_{X, \mathbb{O}}$, в которой все $\Lambda_k = \mathbb{O}_p$. Следовательно, для любого $f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ имеем

$$B_{X, \Lambda} f - B_{X, \mathbb{O}} f = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k f.$$

Поэтому $\overline{B_{X, \Lambda} - B_{X, \mathbb{O}}} \in \mathfrak{S}_1$ в точности тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} (1/(d_k + d_{k+1})) \|\Lambda_k\| < \infty$. В силу теоремы 2(v) заключаем

$$(H_{X, \Lambda} - i)^{-1} - (H_N - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_1.$$

Применяя теорему Бирмана–Крейна (см., например, [26; теорема XI.9]), получаем требуемое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. S. Rofo-Beketov, A. M. Kholkin, *Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties*, World Sci. Monogr. Ser. in Math., **7**, World Sci., Singapore, 2005.
- [2] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [3] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, Тр. ММО, **64**, МЦНМО, М., 2003, 159–212.
- [4] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, “Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями в пространстве вектор-функций”, Докл. РАН, **441**:2 (2011), 165–168.
- [5] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, “Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций”, Уфимск. матем. журн., **3**:3 (2011), 105–119.
- [6] К. А. Мирзоев, “Операторы Штурма–Лиувилля”, Тр. ММО, **75**, МЦНМО, М., 2014, 335–359.
- [7] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, “Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials”, *Opuscula Math.*, **33**:3 (2013), 467–563.
- [8] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, “Supersymmetry and Schrödinger-type operators with distributional matrix-valued potentials”, *J. Spectr. Theory*, **4**:4 (2014), 715–768.
- [9] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, With an appendix by Pavel Exner, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [10] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, “Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями”, Функци. анализ и его прил., **44**:2 (2010), 87–91.
- [11] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, “1–D Schrödinger operators with local point interactions on discrete set”, *J. Differential Equations*, **249**:2 (2010), 253–304.
- [12] S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud, “Spectral theory of semi-bounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set”, *J. Math. Phys.*, **51**:10 (2010), 102102.
- [13] A. Kostenko, M. Malamud, “1–D Schrödinger operators with local point interactions: a review”, *Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics: a Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy’s 60th Birthday*, Proc. Symp. Pure Math., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, 235–262.
- [14] V. A. Derkach, M. M. Malamud, “Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps”, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95.
- [15] М. М. Маламуд, “О некоторых классах расширений эрмитовых операторов с лакунами”, Укр. матем. журн., **44**:2 (1992), 215–233.
- [16] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [17] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [18] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай”, Матем. заметки, **63**:5 (1998), 709–716.
- [19] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами”, Функци. анализ и его прил., **33**:1 (1999), 30–45.
- [20] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами”, Функци. анализ и его прил., **35**:4 (2001), 32–37.

- [21] M. Malamud, H. Neidhardt, “Sturm-Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence”, *J. Differential Equations*, **252**:11 (2011), 5875–5922.
- [22] R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano, “On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set”, *J. Differential Equations*, **254** (2013), 3835–3902.
- [23] Ю. М. Дюкарев, “О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 73–100.
- [24] Ю. М. Дюкарев, “Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 83–92.
- [25] В. И. Коган, “Об операторах, порожденных I_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта”, *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, **11** (1970), 103–107.
- [26] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.

А. С. Костенко

University of Vienna, Austria

E-mail: Oleksiy.Kostenko@univie.ac.at

Поступило

17.02.2015

Исправленный вариант

25.02.2016

М. М. Маламуд

Институт прикладной математики

и механики НАН Украины

E-mail: mmm@telenet.dn.ua

Д. Д. Натягайло

Институт прикладной математики

и механики НАН Украины

E-mail: delthink@mail.ru