Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Антоневи́ч, Е. В. Пантеле́ева, Корре́ктные кра́евые задачи, правосторо́нная гипе́рболичность и экспоненциальная ди́хотомия, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 1, 13–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:07:59

Корректные краевые задачи, правосторонняя гиперболичность и экспоненциальная дихотомия

А. Б. Антоневиц, Е. В. Пантелеева

Рассматривается вопрос о связи между существованием корректных краевых задач и экспоненциальной дихотомией для функциональных уравнений и для линейных дифференциально-операторных уравнений на полупрямой. Показано, что корректные краевые задачи могут существовать для уравнений без свойства экспоненциальной дихотомии.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: краевая задача, спектр, оператор, топологическое пространство, мера.

DOI: 10.4213/mzm11125

1. Введение. Корректные краевые задачи и правосторонняя обратимость. Уравнения вида

$$Lu = f, \quad (1.1)$$

где L есть линейный оператор, отображающий область определения $\mathcal{D}(L)$ из заданного банахова пространства F в F , являются одним из основных объектов исследования в теории операторов, такие уравнения рассматриваются для ограниченных и неограниченных операторов; в случае ограниченности считаем, что $\mathcal{D}(L) = F$. Утверждение о существовании и единственности решения уравнения (1.1) эквивалентно обратимости L . Но в общем случае из существования решения для любой правой части не следует его единственность, поэтому для таких уравнений задаются дополнительные условия на искомое решение u . Обычно эти условия записываются в виде $Su = 0$, где S есть так называемый *оператор краевого условия*. Одно и то же краевое условие может быть задано с помощью разных операторов S ; при постановке задачи существенно только подпространство $V = \{u \in \mathcal{D}(L) : Su = 0\}$. Поэтому *общая краевая задача* формулируется с помощью задания векторного подпространства $V \subset \mathcal{D}(L)$ и заключается в нахождении решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию

$$u \in V. \quad (1.2)$$

Краевая задача (1.1), (1.2) называется *корректной*, если для любого $f \in F$ существует единственное решение задачи и оно непрерывно зависит от f .

В теории уравнений с частными производными краевое условие обычно задается через значения решения на границе области, что оправдывает термин “краевое”. В общем случае при постановке задачи могут быть заданы условия и на значения функции внутри области, но такие задачи тоже по традиции называют *краевыми*.

Рассмотрение краевой задачи эквивалентно исследованию сужения L_V оператора L на подпространство V : корректность задачи эквивалентна существованию непрерывного обратного для L_V . В частности, корректность задачи, соответствующей $V = \mathcal{D}(L)$, есть обратимость самого оператора L .

Ограниченный линейный оператор R называется *правым обратным* к L , если $LR = I$. Если задача (1.1), (1.2) корректна, то оператор L_V^{-1} является правым обратным к L ; любой правый обратный R к L соответствует корректной краевой задаче, если положить $V = \text{Im } R$, причем это подпространство может быть задано с помощью оператора $I - RL$:

$$V = \{u \in \mathcal{D}(L) : u - RL u = 0\}.$$

Таким образом, существование корректных задач эквивалентно существованию правых обратных к исходному оператору L . Заметим, что для существования правого обратного к L необходимо, чтобы оператор L был сюръективным.

Вопрос о корректности задач и существовании корректных краевых задач является одним из центральных при рассмотрении конкретных классов уравнений. В частности, детально исследовались линейные дифференциально-операторные уравнения вида

$$Lu(t) \equiv \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t). \quad (1.3)$$

Из обширной литературы, посвященной таким уравнениям, отметим [1]–[5].

Также подробно исследовались (в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X) функциональные уравнения вида

$$Lu(x) \equiv a_0(x)u(\alpha(x)) - u(x) = f(x), \quad (1.4)$$

где $\alpha: X \rightarrow X$ – заданное отображение X , a_0 – заданная функция. Здесь функциональный оператор L , задающий уравнение, имеет вид $L = B - I$, где B – оператор взвешенного сдвига. Частным случаем являются разностные уравнения

$$a_0(x)u(x+h) - u(x) = f(x),$$

которые соответствуют случаю, когда X есть прямая $\mathbb{R}$ (или ее часть) и $\alpha(x) = x+h$.

Имеется ряд непосредственных связей и аналогий между уравнениями (1.3) и (1.4), при исследовании обоих классов определяется свойство экспоненциальной дихотомии. В известных нам предшествующих исследованиях основное внимание уделялось установлению связей между корректностью краевых задач и свойством экспоненциальной дихотомии. Основная цель данной работы – обратить внимание на то, что корректные краевые задачи для этих двух классов уравнений могут существовать и при отсутствии экспоненциальной дихотомии. При исследовании одного класса функциональных уравнений этот факт был отмечен в работах [6] и [7]; для дифференциальных уравнений это принципиально новый результат.

В работе отражено содержание докладов, сделанных на конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения” в 2014 и 2015 годах.

С точки зрения спектральной теории рассматриваемые вопросы связаны исследованием так называемых существенных спектров оператора. При рассмотрении спектрального семейства $B - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, свойства уравнения

$$(B - \lambda I)u = f \quad (1.5)$$

зависят от λ .

Если λ – регулярное значение, то оператор $B - \lambda I$ обратим и для уравнения (1.5) существует только одна корректная задача – при $V = \mathcal{D}(B)$.

Если λ принадлежит спектру оператора B , то оператор $B - \lambda I$ необратим и, в связи с исследованием уравнений (1.5), представляют интерес такие его свойства, как фредгольмовость, замкнутость образа или правосторонняя обратимость. Каждое “хорошее” свойство оператора выделяет часть спектра, где оно не выполнено, называемую соответствующим *существенным спектром*. Заметим, что часто под существенным спектром понимается *спектр Фредгольма*

$$\Sigma_F(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не является оператором Фредгольма}\},$$

но и другие виды существенных спектров представляют интерес и подробно исследовались.

Со спектральной точки зрения рассматриваемые в работе вопросы связаны с исследованием правостороннего резольвентного множества

$$\varrho_r(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ обратим справа}\}$$

и его дополнения – *правостороннего спектра*

$$\Sigma^+(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I \text{ не имеет правого обратного}\}.$$

Правосторонней резольвентой для оператора B будем называть семейство $R_r(B; \lambda)$ ограниченных правых обратных для $B - \lambda I$, определенное на открытом подмножестве в $\mathbb{C}$ и аналитически зависящее от λ . На резольвентном множестве оператора любая правосторонняя резольвента совпадает с обычной резольвентой

$$R(B; \lambda) = (B - \lambda I)^{-1}.$$

Но правостороннее резольвентное множество может быть шире обычного резольвентного множества и правосторонние резольвенты могут быть определены в точках спектра.

Для операторов взвешенного сдвига достаточно типичным свойством является инвариантность спектральных свойств относительно вращений вокруг точки нуль. В частности, если оператор $B - I$ обратим, то обратимы операторы $B - \lambda I$ при $|\lambda| = 1$, т.е. оператор является *гиперболическим* – его спектр не содержит точек единичной окружности. В этом случае резольвента определена в некоторой окрестности единичной окружности.

Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если существует правосторонняя резольвента, определенная в некоторой окрестности единичной окружности.

2. Оператор взвешенного сдвига и экспоненциальная дихотомия ассоциированной с ним группы линейных расширений. В общей постановке операторы взвешенного сдвига, порожденные отображением $\alpha: X \rightarrow X$, рассматриваются в различных пространствах F , состоящих из функций на множестве X со значениями в некотором банаховом пространстве Y . Это операторы, действующие по формуле

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)), \quad u \in F(X), \quad x \in X,$$

где A_0 — заданная функция на X со значениями в пространстве $LB(Y)$ линейных ограниченных операторов в Y . Такие операторы называют также *операторами композиции с весом*. Сумму операторов взвешенного сдвига, порожденных разными отображениями, называют *функциональным оператором*. Ниже основное внимание уделено функциональным операторам из спектрального семейства $B - \lambda I$.

Функциональные операторы рассматривались многими авторами с разных точек зрения, так как они естественно возникают в ряде математических и физических направлений, в том числе теории динамических систем, теории функционально-дифференциальных и интегро-функциональных уравнений, теории нелокальных краевых задач и др. В список использованной литературы по этой тематике включены работы [8], [9], результаты из которых используются ниже; более подробная информация содержится в цитированных источниках.

Операторы взвешенного сдвига наиболее детально изучены в пространствах $L_p(X, \mu, Y)$ при условии обратимости отображения α . По оператору взвешенного сдвига и числу p строится вспомогательное отображение β , с помощью которого описываются свойства оператора.

Напомним необходимые определения и конструкции. Считаем, что X есть топологическое пространство и μ есть полная σ -аддитивная мера, определенная на некоторой σ -алгебре измеримых подмножеств, включающей все борелевские множества. Говорят, что для меры μ выполнено *условие согласования с отображением α* , если $\alpha^{-1}(\omega)$ измеримо для каждого измеримого подмножества ω и выполнено соотношение

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0 \iff \mu(\omega) = 0. \quad (2.1)$$

Из условия (2.1) следует, что мера $\mu_\alpha(\omega) = \mu(\alpha^{-1}(\omega))$ абсолютно непрерывна относительно μ , существует производная Радона–Никодима

$$\varrho(x) = \frac{d\mu_\alpha}{d\mu}, \quad \varrho(x) \neq 0 \quad \text{почти всюду,}$$

и выполнено равенство

$$\int_X u(\alpha(x))\varrho(\alpha^{-1}(x)) d\mu = \int_X u(x)\varrho(x) d\mu_\alpha = \int_X u(x) d\mu.$$

Поэтому оператор

$$T_\alpha u(x) = [\varrho(\alpha^{-1}(x))]^{-1/p} u(\alpha(x))$$

в пространстве $L_p(X, \mu, Y)$ является изометрическим и обратимым.

Оператор B в пространстве $L_p(X, \mu, Y)$ удобно записывать в стандартной форме

$$B = AT_\alpha, \quad \text{где} \quad A(x) = \varrho(\alpha^{-1}(x))^{1/p} A_0(x), \quad (2.2)$$

так как свойства оператора B более просто выражаются через операторно-значную функцию A , которая называется *приведенным коэффициентом* для пространства $L_p(X, \mu, Y)$. В случае пространства $L_\infty(X, \mu, Y)$ и пространства непрерывных ограниченных функций полагаем $A(x) = A_0(x)$.

Здесь зависимость приведенного коэффициента от p существенна, так как спектральные свойства операторов, заданных одним и тем же выражением, могут быть разными в разных пространствах. В частности, оператор B ограничен в $L_p(X, \mu, Y)$ тогда и только тогда, когда операторно-значная функция $A(x)$ существенно ограничена, при этом

$$\|B\| = \|A\|_\infty = \text{ess sup } \|A(x)\|_Y. \quad (2.3)$$

Ниже для упрощения изложения рассматривается случай компактного X и конечномерного пространства $Y = \mathbb{C}^m$; приведенный коэффициент $A(x)$ считаем непрерывной матрицей-функцией.

Используемые ниже понятия естественно записывать в терминах теории векторных расслоений (см. [8], [10], [11]). Произведение $E = X \times \mathbb{C}^m$ рассматриваем как векторное расслоение над X . Подмножество

$$E_x = \{(x, \xi), \xi \in \mathbb{C}^m\} \subset E$$

называется *слоем над точкой x* , слой обладает естественной структурой m -мерного векторного пространства с заданной на нем нормой

$$\|(x, \xi)\| = \|\xi\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Подмножество W из E называется *векториальным*, если каждый его слой $W_x = W \cap E_x$ есть векторное подпространство в слое E_x . Векториальное подмножество W называется *векторным подрасслоением*, если слои W_x непрерывно зависят от x .

Отображение $\beta: E \rightarrow E$ называется *линейным расширением* отображения $\alpha^{-1}: X \rightarrow X$, если оно непрерывно и для каждого x линейно отображает слой E_x над x в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$. Заметим, что если $P(x)$ есть матрица-функция, то на E определено умножение на P :

$$P \cdot (x, \xi) = (x, P(x)\xi),$$

которое линейно отображает каждый слой E_x в себя.

Отображение $\beta: E \rightarrow E$, *ассоциированное с оператором B* , задается формулой

$$\beta(x, \xi) = (\alpha^{-1}(x), A(x)\xi).$$

Поскольку приведенный коэффициент $A(x)$ непрерывен, β является линейным расширением отображения $\alpha^{-1}: X \rightarrow X$, а степени β^n , $n = 0, 1, \dots$, образуют группу линейных расширений.

Если приведенный коэффициент обратим, то существует обратное отображение β^{-1} и множество линейных расширений $\{\beta^n, n \in \mathbb{Z}\}$ является группой.

Говорят, что группа линейных расширений $\{\beta^n\}$ допускает *экспоненциальную дихотомию* (или что β является *гиперболическим*), если существует матрично-значная функция $P(x)$, обладающая следующими свойствами:

- i) $P(x)$ непрерывна (и ограничена);

- ii) $P^2(x) = P(x)$ – каждое значение $P(x)$ является ограниченным проектором в $\mathbb{C}^m$;
- iii) умножение на $P(x)$ перестановочно с β , т.е.

$$A(x)P(\alpha^{-1}(x)) = P(x)A(\alpha^{-1}(x));$$

- iv) существуют положительные постоянные $C^\pm$ и $\gamma^\pm < 1$, при которых выполнены неравенства

$$\|\beta^n(x, P(x)\xi)\| \leq^+ (\gamma^+)^n \|\xi\|, \quad n \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\|\beta^n(x, [I - P(x)]\xi)\| \leq C^- (\gamma^-)^{-n} \|\xi\|, \quad n \leq 0. \quad (2.5)$$

Подмножество $W \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении*, если существуют положительные постоянные C^+ и $\gamma^+ < 1$ такие, что

$$\|\beta^n(x, \xi)\| \leq C^+ (\gamma^+)^n \|\xi\| \quad \text{при} \quad (x, \xi) \in W, \quad n \geq 0. \quad (2.6)$$

Подмножество $W \subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении*, если существуют положительные постоянные C^- и $\gamma^- < 1$ такие, что

$$\|\beta^n(x, \xi)\| \leq C^- (\gamma^-)^{-n} \|\xi\| \quad \text{при} \quad (x, \xi) \in W, \quad n \leq 0. \quad (2.7)$$

Пусть линейное расширение β является *гиперболическим*. Рассмотрим подмножества

$$E^+ = \{(x, P(x)\xi) : x \in X, \xi \in Y\}, \quad E^- = \{(x, [I - P(x)]\xi) : x \in X, \xi \in Y\}. \quad (2.8)$$

Из условий i) и ii) следует, что $E^\pm$ есть векторные подрасслоения и $Y = E_x^+ \oplus E_x^-$ для любого x , т.е. векторное расслоение E разлагается в прямую сумму Уитни этих векторных подрасслоений:

$$E = E^+ \oplus E^-. \quad (2.9)$$

Из условия iii) следует, что $E^\pm$ инвариантны относительно β , а из iv) следует, что E^+ устойчиво в положительном направлении, а E^- – в отрицательном.

Таким образом, получаем эквивалентное определение: линейное расширение β называется *гиперболическим*, если существует разложение (2.9) векторного расслоения E на инвариантные векторные подрасслоения, где E^+ устойчиво в положительном направлении, а E^- устойчиво в отрицательном направлении.

Пусть F есть одно из пространств $L_p(X, \mu, Y)$ или пространство $C(X, Y)$ непрерывных функций на X . Основной результат формулируется одинаково в этих пространствах, если для каждого из них использовать соответствующий приведенный коэффициент.

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество непериодических точек отображения α всюду плотно в X , приведенный коэффициент для оператора взвешенного сдвига B является непрерывной ограниченной обратимой матрицей-функцией и носитель меры μ есть все X .

Следующие свойства эквивалентны:

- i) оператор $B - I$ обратим в пространстве F ;
- ii) операторы $B - \lambda I$ обратимы при $|\lambda| = 1$, т.е. оператор B гиперболический;

iii) ассоциированное с оператором линейное расширение β является гиперболическим.

При выполнении этих условий резольвента в окрестности единичной окружности может быть задана в виде операторного ряда Лорана

$$R(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (2.10)$$

где P есть оператор умножения на соответствующую непрерывную проекторно-значную матрицу-функцию $P(x)$.

Мы здесь не останавливаемся на обобщениях этой теоремы, заметим только, что аналогичное утверждение верно для разностных операторов, т.е. если $X = \mathbb{R}$ и отображение есть обычный сдвиг на прямой: $\alpha(x) = x + h$.

Теорема 1 позволяет исследовать обратимость оператора $B - \lambda I$ при произвольном $\lambda \neq 0$. Такой оператор приводится к виду $B - \lambda I = \lambda((1/\lambda)B - I)$. Здесь $(1/\lambda)B$ также является оператором взвешенного сдвига, ассоциированное с ним линейное расширение задается выражением

$$\beta_\lambda(x, \xi) = \left(\alpha^{-1}(x), \frac{1}{\lambda} a(x) \xi \right)$$

и применима теорема 1.

Из теоремы следует, что регулярными значениями для оператора B являются те λ , при которых линейное расширение β_λ является гиперболическим. Отсюда получаем, что резольвентное множество есть объединение счетного числа открытых колец, а спектр оператора B в типичных случаях (например, если пространство X связно) есть объединение конечного числа колец с центром в точке 0.

3. Аналог проектора Рисса. Идейной основой изложенных ниже результатов является следующее утверждение об аналоге проектора Рисса [12].

ТЕОРЕМА 2. Пусть B есть обратимый ограниченный оператор в банаховом пространстве F .

I. Если оператор B является правосторонне гиперболическим и $R_r(B; \lambda)$ – правосторонняя резольвента, определенная в окрестности единичной окружности, то ее разложение в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (3.1)$$

где линейный ограниченный оператор P задан формулой

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} R_r(B; \lambda) d\lambda.$$

При этом существуют положительные постоянные $C^\pm$, $\gamma^\pm < 1$, при которых выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|B^k P\| &\leq C^+ (\gamma^+)^k, & k \geq 1, \\ \|B^{-k} [I - P]\| &\leq C^- (\gamma^-)^k, & k \geq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

II. Если для некоторого линейного ограниченного оператора P выполнены неравенства (3.2), то ряд (3.1) сходится в окрестности единичной окружности и задает одну из правосторонних резольвент, т.е. оператор B является правосторонне гиперболическим.

III. Правосторонне гиперболический оператор B является гиперболическим (и формула (3.1) задает резольвенту в окрестности единичной окружности) тогда и только тогда, когда соответствующий оператор P перестановочен с B ; в этом случае P есть известный проектор Рисса.

В сформулированной теореме часть III есть классическая теорема о проекторе Рисса. Заметим, что в теореме 1 наиболее деликатным является утверждение, что из гиперболичности оператора следует гиперболичность β , т.е. существование экспоненциальной дихотомии. Первым шагом доказательства этого утверждения является применение теоремы о проекторе Рисса. Из гиперболичности оператора B следует существование проектора Рисса; второй шаг заключается в проверке того, что этот проектор есть оператор умножения на непрерывную матричнозначную функцию.

Обсудим отличия свойств гиперболического оператора от правосторонне гиперболического. Рассмотрим векторные подпространства

$$F^+ = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|B^n u\|^{1/n} < 1 \right\}, \quad F^- = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|[B^{-1}]^n u\|^{1/n} < 1 \right\}.$$

Оператор B является гиперболическим тогда и только тогда, когда подпространства $F^\pm$ замкнуты, инвариантны относительно B и пространство F разлагается в прямую сумму

$$F = F^+ \oplus F^-,$$

причем $F^+ = \text{Im } P$, $F^- = \text{Im}(I - P)$ – проектор Рисса задает это разложение.

Если же B является только правосторонне гиперболическим оператором, то имеем более слабые свойства: $F^+ + F^- = F$, где сумма подпространств не является прямой а только алгебраической. Для оператора P , соответствующего правосторонней резольвенте, подпространства $\text{Im } P$ и $\text{Im}(I - P)$ не инвариантны относительно B ,

$$\text{Im } P \neq F^+, \quad \text{Im}[I - P] \neq F^-,$$

при этом

$$F = \text{Im } P + \text{Im}(I - P),$$

где сумма подпространств может не быть прямой; подпространства $\text{Im } P$ и $\text{Im}(I - P)$ могут быть незамкнутыми и иметь нетривиальное пересечение.

Имеются примеры операторов, для которых существуют такие правосторонние резольвенты, что соответствующий оператор P является проектором. Тогда подпространства $\text{Im } P$ и $\text{Im}(I - P)$ замкнуты и $F = \text{Im } P \oplus \text{Im}(I - P)$. Здесь отличие от гиперболического случая сводится к тому, что $\text{Im } P$ и $\text{Im}(I - P)$ не являются инвариантными относительно B ; в ситуации, наиболее близкой к гиперболическому случаю, может оказаться, что подпространство $\text{Im } P$ инвариантно относительно B , а дополнительное подпространство $\text{Im}(I - P)$ не инвариантно относительно B , но инвариантно относительно B^{-1} .

4. Условие правосторонней обратимости оператора $B - I$. Согласно теореме 1, если оператор $B - I$ правосторонне обратим, но не обратим, то линейное расширение β не является гиперболическим. Поэтому правосторонней обратимости оператора $B - I$ соответствует не гиперболичность, а некоторое более слабое свойство линейного расширения β .

Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 3. *Обратимый оператор взвешенного сдвига B является правосторонне гиперболическим тогда и только тогда, когда существует ограниченный оператор P в пространстве F такой, что выполнены неравенства (3.2).*

Если оператор взвешенного сдвига B правосторонне гиперболический (но не гиперболический), то у него существует много разных правосторонних резольвент и, соответственно, много разных операторов P , удовлетворяющих условиям теоремы 3. Выделим случай, когда такой оператор P является оператором умножения на матрицу-функцию, как в определении гиперболичности линейного расширения. Будем говорить, что линейное расширение β *слабо гиперболично*, если существует определенная на X ограниченная измеримая матрица-функция $P(x)$ такая, что выполнены неравенства (2.4) и (2.5).

Ослабления условий на β , по сравнению с определением гиперболичности, заключаются в том, что здесь матрица-функция $P(x)$ может не быть перестановочной с линейным расширением β , значения $P(x)$ могут не быть проекторами и эта функция может быть разрывной.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порожденный обратимым отображением. Если ассоциированное линейное расширение β слабо гиперболично, то оператор B правосторонне гиперболический и формула (3.2), где P есть оператор умножения на матрицу-функцию, порождающую слабую гиперболичность, задает правостороннюю резольвенту $R_r(B; \lambda)$, определенную в некотором кольце K , содержащем единичную окружность.*

Если матрица-функция $P(x)$ не перестановочна с линейным расширением β , то кольцо K принадлежит спектру, т.е. $R_r(B; \lambda)$ не является обычной резольвентой.

В [6], [7] были рассмотрены операторы взвешенного сдвига, порожденные одним классом отображений с достаточно простыми динамическими свойствами, так называемыми отображениями типа Морса–Смейла. Для этого класса доказано, что оператор $B - \lambda I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда линейное расширение β_λ является слабо гиперболическим.

Отсюда следует, что правосторонний спектр $\Sigma_+(B)$ получается из обычного спектра выбрасыванием некоторого набора открытых колец с центром в точке 0, а именно тех колец, для которых линейное расширение β_λ является слабо гиперболическим. Случай операторов в пространстве скалярных функций ($m = 1$) с точки зрения гиперболичности вырожденный, но и в нем имеются содержательные вопросы. Существуют такие отображения α , для которых правосторонний спектр $\Sigma_+(B)$ любого оператора взвешенного сдвига в пространстве скалярных функций совпадает с обычным, и отображения, для которых правосторонний спектр $\Sigma_+(B)$ отличен от спектра хотя бы для одного оператора взвешенного сдвига. Описание этих классов отображений получено в [13]. В [6] и [7] приведены примеры операторов

в пространствах вектор-функций, у которых правосторонний спектр $\Sigma_+(B)$ есть собственное подмножество спектра, т.е. случай слабой гиперболичности β_λ реализуется при отсутствии гиперболичности.

В [7] также показано, что среди функций $P(x)$, порождающих слабую дихотомию, существуют такие, что все значения $P(x)$ являются проекторами. В последнем случае линейное расширение β обладает свойством, наиболее похожим на гиперболичность. Действительно, рассмотрим подмножества $E^\pm$, заданные (2.8). Здесь, как и при дихотомическом разложении, подмножество E^+ является устойчивым в положительном направлении, E^- – устойчивым в отрицательном направлении, слои являются векторными подпространствами и $Y = E_x^+ + E_x^-$ при всех x . Но проекторно-значная матрица-функция $P(x)$ является разрывной и слои $E_x^+ = \text{Im } P(x)$ имеют разную размерность при разных x . Таким образом, в этом случае также имеется разложение (2.9) в прямую сумму устойчивых подмножеств, а отличие от гиперболичности заключается в том, что $E^\pm$ являются векториальными подмножествами, а не векторными подрасслоениями.

5. Экспоненциальная дихотомия полугруппы линейных расширений, ассоциированной с дифференциальным уравнением. Рассмотрим аналогичные вопросы для дифференциально-операторных уравнений.

Пусть $\mathbb{J}$ есть прямая $\mathbb{R}$ или полупрямая $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и на $\mathbb{J}$ задано линейное дифференциально-операторное уравнение

$$Lu(t) \equiv \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{J}. \quad (5.1)$$

Здесь u есть функция на $\mathbb{J}$ со значениями в заданном банаховом пространстве Y . Ниже считаем, что $A(t)$ – ограниченная сильно непрерывная функция переменной t со значениями в пространстве $LB(Y)$ линейных ограниченных операторов в Y . Ниже для определенности уравнение рассматривается в пространстве $F = C_b(\mathbb{J}, Y)$, состоящем из ограниченных непрерывных функций со значениями в Y , снабженное нормой

$$\|u\| = \sup_t \|u(t)\|_Y.$$

При таком выборе пространства область определения $\mathcal{D}(L)$ максимального оператора L , заданного левой частью уравнения, состоит из непрерывно дифференцируемых функций, у которых производные ограничены.

Уравнения (5.1) рассматривались в различных банаховых пространствах F , состоящих из функций со значениями в Y , и в более сложной ситуации, когда операторы $A(t)$ неограничены (см., например, книгу [2], обзорную статью [5], содержащую современные результаты в этом направлении, а также работу [14]), где уравнения рассматриваются в новом классе пространств.

Говорят, что уравнение (5.1) допускает *экспоненциальную дихотомию*, если существует *дихотомическое разложение*

$$Y = Y^+ \oplus Y^-, \quad (5.2)$$

– такое разложение Y в прямую сумму замкнутых векторных подпространств, что при некоторых положительных постоянных $C^\pm$ и $\gamma^\pm$ и $t, s \in \mathbb{J}$ для решений одно-

родного уравнения выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq C^+ e^{\gamma^+(s-t)} \|u(s)\|, & \text{если } u(0) \in Y^+, \quad t \geq s, \\ \|u(t)\| &\leq C^- e^{\gamma^-(t-s)} \|u(s)\|, & \text{если } u(0) \in Y^-, \quad t \leq s. \end{aligned}$$

Подпространство Y^+ называется *устойчивым*, а Y^- – *неустойчивым*.

Определение экспоненциальной дихотомии одинаково в случае прямой и полупрямой. Если существует дихотомическое разложение на прямой, то оно единственно. В случае полупрямой отличие заключается в том, что дихотомическое разложение не единственно: однозначно определено только устойчивое подпространство Y^+ ; если $N \neq Y^-$ есть замкнутое векторное подпространство, дополнительное к Y^+ , то разложение $Y = Y^+ \oplus N$ также будет дихотомическим.

Свойство экспоненциальной дихотомии может быть переформулировано с помощью эволюционного семейства операторов, порожденного однородным уравнением. Пусть $u(t; y)$ есть решение задачи Коши для однородного уравнения с начальным условием $u(0) = y \in Y$. При фиксированном t отображение

$$U(t): Y \ni y \rightarrow u(t; y) \in Y$$

есть обратимый линейный ограниченный оператор в Y , называемый *оператором Коши*. Эволюционное семейство определяется для $t, s \in \mathbb{J}$ формулой

$$U(t, s) = U(t)U(s)^{-1}.$$

С разложением (5.2) пространства Y связан ограниченный проектор $P(0)$ в пространстве Y такой, что $\text{Im } P(0) = Y^+$ и $\ker P(0) = Y^-$. При каждом t оператор

$$P(t) = U(t)P(0)U(t)^{-1}$$

также является ограниченным проектором и эти проекторы сильно непрерывно зависят от t . Условие, что разложение (5.2) является дихотомическим, удобно записывать в терминах этой операторно-значной функции: уравнение допускает экспоненциальную дихотомию, если существует операторно-значная функция $P(t)$, удовлетворяющая условиям:

- i) $P(t)$ сильно непрерывна и ограничена;
- ii) при каждом t значение является проектором Y ;
- iii) выполнено условие перестановочности $U(t, s)P(s) = P(t)U(t, s)$;
- iv) существуют положительные постоянные $C^\pm$ и $\gamma^\pm$ такие, что выполнены неравенства

$$\|U(t, s)P(s)\| \leq C^+ e^{\gamma^+(s-t)} \quad \text{при } s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{J}, \quad (5.3)$$

$$\|U(t, s)[I - P(s)]\| \leq C^- e^{\gamma^-(s-t)} \|y\| \quad \text{при } t \leq s, \quad s, t \in \mathbb{J}. \quad (5.4)$$

С рассматриваемым уравнением можно ассоциировать полугруппу линейных расширений.

Декартово произведение $E = \mathbb{J} \times Y$ является банаховым векторным расслоением над $\mathbb{J}$, так как у каждого слоя $E_s = \{(s, \xi), \xi \in Y\} \subset E$ существует естественный изоморфизм с банаховым пространством Y .

При фиксированном t эволюционное семейство задает отображение $\beta^t: E \rightarrow E$, действующее по формуле

$$\beta^t(s, y) = (s + t, U(t + s, s)y);$$

это отображение является линейным расширением отображения сдвига $s \rightarrow s + t$: оно сильно непрерывно и линейно отображает слой над точкой s в слой над точкой $s + t$. При этом выполнено $\beta^t \beta^\tau = \beta^{t+\tau}$. На полупрямой отображения β^t определены только при $t \geq 0$ и образуют полугруппу линейных расширений. В случае прямой отображения β^t определены при всех $t \in \mathbb{R}$, образуют группу линейных расширений и определение экспоненциальной дихотомии эквивалентно определению гиперболичности этой группы.

Заметим, что при фиксированном t , например, $t = 1$, линейное расширение β^1 соответствует оператору взвешенного сдвига, действующему на функцию $u \in F$ по формуле

$$(Tu)(s) = U(s + 1, s)u(s + 1);$$

естественно, что свойства этого оператора связаны со свойствами исходного дифференциально-операторного уравнения. Такие связи систематически исследовались в работах Баскакова и его последователей, результаты в этом направлении также изложены в обзоре [5], дальнейшее развитие содержится в [14], [15].

6. Краевые задачи и экспоненциальная дихотомия. В случае всей прямой и конечномерного пространства Y эквивалентность обратимости максимального оператора и существования экспоненциальной дихотомии была отмечена еще Пероном [1]. В [2] аналогичное утверждение было получено для бесконечномерного Y при условии замкнутости *следа ядра* – подпространства

$$Y_0 = \{u(0) \in Y : u \in \mathcal{D}(L), Lu = 0\}.$$

Заметим, что если уравнение допускает экспоненциальную дихотомию, то $Y_0 = Y^+$ и это подпространство замкнуто и дополняемо. Более сильное утверждение получено Жиковым (см. [4; гл. X, § 2, теорема 1]).

ТЕОРЕМА 5. *На прямой $\mathbb{R}$ максимальный оператор L в пространстве $C_b(\mathbb{R}, Y)$ обратим тогда и только тогда, когда имеет место экспоненциальная дихотомия.*

При этом обратный оператор задается формулой

$$u(t) = \int_{-\infty}^t U(t, s)P(s)f(s)ds - \int_t^{+\infty} U(t, s)[(I - P(s))f(s)ds.$$

Этот результат Жикова показывает, что требование замкнутости Y_0 является излишним – оно следует из обратимости L .

На полупрямой результаты о связи разрешимости уравнения с экспоненциальной дихотомией получены при условии замкнутости Y_0 [3; гл. IV, теорема 3.3].

ТЕОРЕМА 6. *Уравнение (5.1) на полупрямой допускает экспоненциальную дихотомию тогда и только тогда, когда максимальный оператор сюръективен и след ядра Y_0 является замкнутым дополняемым подпространством в Y .*

Из приведенного ниже примера следует, что условие на след ядра в теореме 6 существенно – в случае незамкнутого Y_0 максимальный оператор может быть сюръективным при отсутствии экспоненциальной дихотомии.

Среди краевых задач на полупрямой наиболее естественной выглядит задача Коши с начальным условием $u(0) = 0$. Решение этой задачи существует и единственно для любой функции $f \in F$, но это решение может оказаться неограниченным (не принадлежать рассматриваемому пространству F). Поэтому в пространстве $C_b(\mathbb{R}_+, Y)$ задача Коши с нулевым начальным условием в общем случае некорректна.

В связи с этим подробно исследовались *модифицированные задачи Коши*: вместо условия $u(0) = 0$ рассматривается более слабое условие $u(0) \in N$, где N есть заданное замкнутое векторное подпространство в Y [3], [5].

Основной результат о модифицированных задачах Коши может быть сформулирован следующим образом (см. [3], [5]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть след ядра Y_0 является замкнутым подпространством в Y . Модифицированная задача Коши с условием $u(0) \in N$ корректна в пространстве $C_b(\mathbb{R}_+, Y)$ тогда и только тогда, когда N является подпространством, дополненным к Y_0 и разложение

$$Y = Y_0 \oplus N \quad (6.1)$$

является дихотомическим.

Решение модифицированной задачи Коши представляется в виде $u = Rf$, где оператор R действует по формуле

$$(Rf)(t) = \int_0^t U(t, s)P(s)f(s) ds - \int_t^{+\infty} U(t, s)[(I - P(s))f(s) ds, \quad (6.2)$$

а $P(t)$ есть проекторно-значная функция, порожденная дихотомическим разложением (6.1).

Как уже отмечалось, в случае нетривиальной экспоненциальной дихотомии на полупрямой существует много разных дихотомических разложений и, соответственно, много разных корректных модифицированных задач Коши.

7. Условие правосторонней обратимости максимального дифференциального оператора на полупрямой. Из теоремы 6 следует, что если для уравнения существует хотя бы одна корректная задача и след ядра является замкнутым подпространством, то имеет место экспоненциальная дихотомия. Возникает вопрос: могут ли существовать корректные задачи для уравнения, у которого след ядра незамкнут?

Условие, обеспечивающее существование корректных задач, запишем в следующем виде. Будем говорить, что для уравнения (5.1) имеет место *слабая экспоненциальная дихотомия*, если существует ограниченная сильно непрерывная функция $P(s)$ со значениями в пространстве $LB(Y)$ такая, что выполнены неравенства (5.3) и (5.4).

ТЕОРЕМА 8. Если для уравнения (5.1) на полупрямой имеет место слабая экспоненциальная дихотомия, то формула (6.2) задает правый обратный к максимальному оператору L и, следовательно, для уравнения (5.1) существуют корректные краевые задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в непосредственной проверке утверждения, которое почти дословно совпадает с доказательством того, что в случае экспоненциальной дихотомии формула (6.2) задает решение уравнения (5.1) (в такой проверке не используется условие, что значения $P(s)$ являются проекторами).

Покажем на примере, что существуют уравнения, не допускающие экспоненциальной дихотомии, для которых имеет место слабая экспоненциальная дихотомия и, следовательно, существуют корректные задачи.

Пусть $Y = CB(\mathbb{R}_+)$ есть пространство скалярных ограниченных непрерывных функций на полупрямой. Уравнение вида

$$\frac{du(t, x)}{dt} - a(t, x)u(t, x) = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (7.1)$$

где $a(t, x)$ есть непрерывная ограниченная функция, рассматриваем как дифференциально-операторное уравнение в пространстве $F = CB(\mathbb{R}_+, Y)$, т.е. в пространстве непрерывных ограниченных функций на четверти плоскости. Для построения требуемого примера выберем функцию $a(t, x)$ специальным образом: положим $a(x, t) = \varphi(t - x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 1, \\ -x & |x| \leq 1, \\ +1 & x \leq -1, \end{cases}$$

т.е. рассмотрим уравнение

$$\frac{du(t, x)}{dt} - \varphi(t - x)u(t, x) = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (7.2)$$

ТЕОРЕМА 9. *Уравнение (7.2) не допускает экспоненциальной дихотомии и для этого уравнения любая модифицированная задача Коши некорректна. Вместе с тем имеет место слабая экспоненциальная дихотомия, максимальный оператор L правосторонне обратим и для рассматриваемого уравнения существуют корректные задачи. В частности, корректной является задача, заданная условием $u(x, x) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Коши $U(t)$ для рассматриваемого примера находится в явном виде, он действует как умножение на функцию

$$\frac{\Psi(t - x)}{\Psi(-x)}, \quad \text{где} \quad \Psi(x) = \begin{cases} e^{x-1/2}, & x \leq -1, \\ e^{-x^2/2}, & |x| \leq 1, \\ e^{-x+1/2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Поэтому решение однородного уравнения (7.2) с начальным условием $u(0, x) = y(x)$ есть функция

$$u(t, x) = \frac{\Psi(t - x)}{\Psi(-x)} y(x).$$

Из явного вида решения следует, что для однородного уравнения решение задачи Коши с начальным условием $u(0, x) = y(x)$ ограничено тогда и только тогда, когда

функция $e^{2x}|y(x)|$ ограничена. Таким образом, для уравнения (7.2) след ядра есть подпространство

$$Y_0 = \left\{ y \in: \sup_x |y(x)|e^{2x} < +\infty \right\},$$

состоящее из функций, экспоненциально убывающих на бесконечности. Это подпространство является незамкнутым в Y и, следовательно, здесь нет свойства экспоненциальной дихотомии.

Пусть $p(x)$ есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 1, & x < -1. \end{cases}$$

При каждом s зададим оператор $P(s)$, действующий в $Y = CB(\mathbb{R}_+)$, как умножение на функцию $p(s - x)$:

$$(P(s)y)(x) = p(s - x)y(x).$$

Тогда операторно-значная функция $P(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 8 и формула

$$\begin{aligned} (Rf)(t, x) = & \int_0^t \frac{\Psi(t - x)}{\Psi(s - x)} p(t - x) f(s, x) ds \\ & - \int_t^{+\infty} \frac{\Psi(s - x)}{\Psi(t - x)} [1 - p(t - x)] f(s, x) ds \end{aligned} \quad (7.3)$$

задает правый обратный к L .

Формула (7.3) задает правый обратный и в случае разрывной функции

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

В этом случае подпространство $V = \text{Im } R$, задающее соответствующую краевую задачу, допускает простое описание:

$$V = \{u \in \mathcal{D}(L) : u(x, x) = 0 \text{ при } x \geq 0\},$$

т.е. оно состоит из функций, обращающихся в нуль на полупрямой $t = x$, $x \geq 0$.

Заметим, что при других функциях $p(x)$ краевое условие, соответствующее построенному правому обратному, сосредоточено вблизи полупрямой $t = x$, $x \geq 0$, – может быть записано в виде, использующем значения $u(t, x)$ только в полосе $|t - x| \leq 1$.

8. Обсуждение. Приведем одну (нестрогую) интерпретацию результатов, которая поясняет, что уравнения, не допускающие экспоненциальной дихотомии, могут возникнуть при анализе систем со сложным поведением.

Пусть Y есть пространство функций переменной x , функция $u(t, x)$ задает состояние физической системы в точке x в момент времени t , а уравнение (5.1) описывает эволюцию системы с течением времени. Однородное уравнение описывает свободную систему, а правая часть уравнения интерпретируется как внешние воздействия

на систему. Уравнения, для которых имеет место экспоненциальная дихотомия, описывают специальный класс эволюционных процессов, когда пространство состояний свободной системы может быть разделено на две инвариантные части, в первой из которых (устойчивой) происходит убывание решения, а во второй (неустойчивой) – возрастание. В силу инвариантности эти части исследуются независимо.

При слабой дихотомии также выделяются части, в одной из которых происходит убывание решений, а во второй – возрастание. Но эти части неинвариантны, а неинвариантность означает, что в системе происходят переходные процессы – состояния из одной части под действием эволюционных операторов могут переходить в состояния из другой части.

Достаточно наглядно такая ситуация видна на примере уравнения (7.2), которое можно интерпретировать как очень упрощенную модель развития эпидемии. В такой интерпретации функция $u(t, x)$ задает плотность распределения некоторого вируса на полупрямой $x \geq 0$ в момент времени t , а уравнение описывает процесс развития эпидемии. Здесь при $x > t$ решения возрастают – это область, где (ввиду плохой санитарной обстановки) происходит активное размножение вирусов, причем эта область уменьшается с ростом t (в результате принятых гигиенических мер). При $x < t$ решения убывают – это область, где вирусы погибают (созданы хорошие санитарные условия). При фиксированном x решения сначала возрастают, а затем убывают, переходные процессы происходят вблизи линии раздела $t = x$.

Краевые условия, описанные в конце доказательства теоремы 9, в такой интерпретации соответствуют карантинным мерам вблизи линии раздела $t = x$, а корректность задачи означает, что эти меры позволяют избежать неограниченного роста вируса. Заметим, что здесь условие $u(x, x) = 0$ означает строгий карантин на линии раздела.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **32** (1930), 703–728.
- [2] Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970.
- [3] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [4] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978.
- [5] А. Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68:1** (409) (2013), 77–128.
- [6] А. Б. Антоневиц, Е. В. Пантелеева, “Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами”, *ПФМТ*, 2013, № 3 (16), 45–54.
- [7] А. Б. Антоневиц, Е. В. Пантелеева, “Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса–Смейла”, *Вестн. Гродненск. ГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. Матем. Физ. Информ., вычислит. техн. и управ.*, 2014, № 1 (170), 65–72.
- [8] А. Б. Антоневиц, *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Изд-во “Университетское”, Минск, 1988.
- [9] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional Differential Equations. I. C^* -theory*, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1994.
- [10] И. У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984.
- [11] А. С. Мищенко, *Векторные расслоения и их применения*, Наука, М., 1984.

- [12] A. B. Antonevich, E. V. Panteleeva, “Right-Side Hyperbolic Operators”, *Sci. Publ. of the State Univ. of Novi Pazar Ser. A: Appl. Math., Inform. and Mech.*, **6**:1 (2014), 1–9.
- [13] А. Б. Антоневи́ч, А. А. Ахматова, Ю. Маковска, “Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов”, *Матем. сб.*, **206**:3 (2015), 3–34.
- [14] М. С. Бичегкуев, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций”, *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 18–25.
- [15] А. Г. Баскаков, “Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 174–190.

А. Б. Антоневи́ч

Белорусский государственный университет;
University of Bialystok, Poland
E-mail: antonevich@bsu.by

Поступило

30.08.2015

Е. В. Пантелеева

Брестский государственный университет
им. А. С. Пушкина, Беларусь
E-mail: kati1986@tut.by