Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, Об определении аффинно-однородной седловидной поверхности пространства $\mathbb{R}^3$ по коэффициентам ее нормального уравнения, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 793–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:19:24

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АФФИННО-ОДНОРОДНОЙ СЕДЛОВИДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^3$ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ЕЕ НОРМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Лобода

Везде ниже рассматриваются аналитические поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$, седловидные (имеющие гиперболический тип) вблизи выделенной точки.

Под *аффинной однородностью* такой поверхности M вблизи точки $p \in M$ мы подразумеваем следующее ее свойство: для любой близкой к p точки $q \in M$ найдутся окрестности $U(p)$, $V(q)$ точек p и q соответственно и аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$, переводящее p в q , а $M \cap U(p)$ в $M \cap V(q)$.

Уравнение седловидной аналитической поверхности M вблизи любой ее точки можно привести аффинными преобразованиями к виду (см., например, [1, § 30])

$$z = xy + (h_{30}x^3 + h_{03}y^3) + \sum_{k+l \geq 4} h_{kl}x^k y^l. \quad (1)$$

Мы хотим описать в терминах подобных уравнений свойство аффинной однородности (вблизи начала координат) обсуждаемой поверхности. Для этого нам потребуется следующее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01002.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поверхность, заданную уравнением (1), будем называть:

- а) невырожденной в третьем порядке, если $h_{30} \neq 0$, $h_{03} \neq 0$;
- б) слабо вырожденной в третьем порядке, если ровно один из коэффициентов h_{30} , h_{03} равен нулю;
- в) вырожденной в третьем порядке, если $h_{30} = h_{03} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вводимые этим определением свойства не зависят от выбора системы координат и связаны с известным в аффинной дифференциальной геометрии инвариантом Пика поверхности.

Имеет место следующая классификация локально-однородных седловидных поверхностей в зависимости от вырождения в третьем порядке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Уравнение седловидной поверхности M , невырожденной в третьем порядке, аффинными преобразованиями приводится к виду

$$z = F(x, y) = xy + (x^3 + y^3) + \sum_{k+l \geq 4} f_{kl} x^k y^l. \quad (2)$$

Линейными преобразованиями, сохраняющими вид уравнения (2), являются лишь тождественное преобразование и инволюция $x \leftrightarrow y$.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение аффинно-однородной поверхности вида (2) однозначно определяется набором коэффициентов f_{40} , f_{31} , f_{22} , f_{13} , f_{04} четвертого порядка. Весь этот набор имеет один из следующих видов:

$$(s, -2t, 0, -2s, t), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2; \quad (3)$$

$$(t, -9 + 4t, -9 + 6t, -9 + 4t, t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

$$(t, -9 - 4t, -(16t^2 + 10t + 9), -9 - 4t, t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$\left(t, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{81}{16t}\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Уравнение однородной слабо вырожденной в третьем порядке поверхности (1) приводится аффинными преобразованиями к одному из следующих видов:

$$z = xy + x^3; \quad (7)$$

$$z = xy + x^3 + x^4 + tx^5 + \sum_{k+l \geq 6} f_{kl} x^k y^l \quad (t \in \mathbb{R}); \quad (8)$$

$$z = xy + x^3 + (x^4 + tx^3y) + \sum_{k+l \geq 5} f_{kl} x^k y^l \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \quad (9)$$

$$z = xy + x^3 + \varepsilon x^3y + \sum_{k+l \geq 6} f_{kl} x^k y^l \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (10)$$

Всякая однородная поверхность вида (8) или (9) однозначно определяется параметром t , а поверхность вида (10) – параметром ε .

ТЕОРЕМА 3. Однородная седловидная поверхность M , имеющая полное вырождение в третьем порядке, аффинно-эквивалентна либо 1) параболоиду $z = xy$, либо 2) гиперболоиду $z = \sqrt{1 - xy}$.

Уравнения (2) и (7)–(10) мы называем нормальными аффинными уравнениями различных однородных седловидных поверхностей. В терминах аналогичных нормальных уравнений возможна и классификация эллиптических и параболических однородных поверхностей.

Доказательство всех трех теорем можно провести по единой схеме. Вместе с тем отметим, что теорема 3 является по сути переформулировкой известных утверждений аффинной дифференциальной геометрии (см. [1, §§ 28, 29]). Остановимся здесь на первых двух случаях.

В случае общего положения, т.е. при $h_{30} \neq 0$, $h_{03} \neq 0$, растяжением переменных уравнение (1) доводится до вида (2).

Приведем поверхность (2) к нормальному виду в точке q , близкой к началу координат. При этом коэффициенты f_{kl}^* нового нормального уравнения зависят аналитически от производных определяющей функции $F(x, y)$, вычисленных в точке q .

Предложение 1 тогда позволяет сделать вывод о постоянстве каждого из них:

$$f_{kl}^*(q) \equiv f_{kl} = \text{const} . \quad (11)$$

Из совокупности соотношений (11) при $k + l = 4$ следует, что каждая из производных

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^k y^{4-k}}(q)$$

четвертого порядка выражается через производные младших порядков функции $F(x, y)$ и набор $f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04}$.

Тогда аналитическая функция $F(x, y)$ однозначно восстанавливается по указанному набору из пяти параметров.

Наконец, можно рассмотреть изменение коэффициентов 4-го порядка нормального уравнения вида (2) при смещении из начала координат в бесконечно близкую к нему точку $q(a, b, F(a, b)) \in M$.

При этом справедлива следующая формула

$$\begin{aligned} f_{40}^* &= f_{40} + (5f_{50} - 6f_{31})a + (f_{41} + 9 - 2f_{22})b \\ &- f_{40} \left(\left(4 \cdot \frac{5}{3}f_{40} + \frac{1}{3}f_{13} \right) a + \left(\frac{5}{3}f_{31} + 4 \cdot \frac{1}{3}f_{04} \right) b \right) + \dots, \end{aligned}$$

и аналогичным образом изменяются другие коэффициенты нормального уравнения.

Группируя линейные по a, b слагаемые из правых частей этих формул, мы можем в силу тождеств (11) приравнять их нулю. Из десяти получаемых таким образом уравнений легко исключить шесть коэффициентов f_{kl} 5-го порядка. Рассмотрение оставшихся уравнений приводит к утверждению теоремы 1.

В случае слабого вырождения в третьем порядке можно считать, что в уравнении (1) $h_{30} \neq 0$. Тогда можно обсуждать уравнение

$$z = xy + x^3 + \sum_{k+l \geq 4} h_{kl} x^k y^l .$$

Рассмотрим набор его коэффициентов 4-го порядка h_{kl} ($k + l = 4$).

Если все они равны нулю, то, рассматривая аналогичную систему уравнений в частных производных относительно

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^k y^{4-k}}(q),$$

мы получаем единственную однородную поверхность, а именно поверхность Кэли (7), т.е. $z = xy + x^3$.

В противном случае можно получить одно из двух равенств: $f_{40} = 1$ или $f_{31} = \pm 1$. Получаемое при этом нормальное уравнение сохраняется только тождественным преобразованием и в случае однородности однозначно определяется своими коэффициентами не более чем 5-го порядка.

Подобно невырожденному случаю можно теперь рассмотреть инфинитезимальные преобразования новых нормальных уравнений. Результатом таких рассмотрений и является утверждение теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что используемое в статье определение однородности в силу свойств единственности и непрерывности получаемых нормальных уравнений эквивалентно традиционному определению. Последнее связано с наличием в группе $Aff(3)$ подгруппы Ли, транзитивно действующей на обсуждаемой поверхности вблизи выделенной точки.

В такой ситуации для упрощения вычислений можно привлечь, например, линейные векторные поля на обсуждаемой поверхности. Подобная идея реализована в случае вещественных подмногообразий пространства $\mathbb{C}^2$ в статье [2].

Описание поверхностей, однородных с точки зрения традиционного определения, дано в работе [3]. Приводимые ниже примеры показывают связь нашей классификации с этим описанием. В частности, отметим, что существуют однородные поверхности всех восьми типов (3)–(10), выделенных в теоремах 1 и 2.

ПРИМЕР 1. Поверхность $z = xy + x^\alpha$ вблизи точки $(1, 0, 1)$ имеет при $\alpha \notin \{0, 1, 2, 3\}$ нормальное уравнение

$$z = xy + x^3 + x^4 + \frac{4}{5} \left(\frac{\alpha - 4}{\alpha - 3} \right) x^5 + \dots$$

Коэффициент $f_{50} = \frac{4}{5}(\alpha - 4)/(\alpha - 3)$ из последней формулы может принимать все вещественные значения, кроме $4/5, 16/15, 6/5, 8/5$. Этим четырем исключительным значениям f_{50} соответствуют поверхности

$$\begin{aligned} z &= xy + e^x, & z &= xy + \ln x, \\ z &= xy + x \ln x, & z &= xy + x^2 \ln x. \end{aligned}$$

Названные поверхности покрывают все множество возможных параметров формулы (8) из теоремы 2.

ПРИМЕР 2. $z = y \ln x$ вблизи точки $(1, 1, 0)$.

Уравнение нормального вида

$$z = xy + x^3 + \left(x^4 + \frac{1}{3} x^3 y \right) + \left(\frac{8}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^4 y \right) + \dots$$

соответствует значению параметра $t = 1/3$ в формуле (9).

ПРИМЕР 3. $z = \ln x - \ln y$ вблизи точки $(1, 1, 0)$ дает нам уравнение

$$z = xy + x^3 - x^3 y - \frac{6}{5} x^5 + \dots,$$

что соответствует значению $\varepsilon = -1$ в формуле (10) из теоремы 2.

В следующих примерах невырожденных поверхностей вычисляются лишь коэффициенты 4-го порядка нормального уравнения (2).

ПРИМЕР 4. $z = y^2 + x^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) вблизи точки $(1, 0, 1)$.

Получаем здесь уравнение, соответствующее формуле (4) из теоремы 1 при $t = 3/(2 - \alpha) \in (3/2, 3)$.

Остальные значения параметра t , разрешенные формулой (4), реализуются на поверхностях $z = y^2 - x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$), а также на примыкающих к ним

$$z = y^2 - e^x, \quad z = y^2 + \ln x, \quad z = y^2 - x \ln x.$$

Следующий пример связан с формулой (5) теоремы 1.

ПРИМЕР 5. $xz = y^2 + x^\beta$ ($\beta \in (1, 2)$) вблизи точки $(1, 0, 1)$. Здесь $t = f_{40} = f_{04} = -9/\beta$.

ПРИМЕР 6. $(z - xy = x^3/3)^2 = \alpha(y - x^2/2)^3$ вблизи точки $(1, 1, 2/3 + \sqrt{\alpha/8})$ дает нам при $\alpha = 1/2$ следующие коэффициенты 4-го порядка нормального уравнения:

$$f_{40} = 1/4 \cdot 3^{4/3}, \quad f_{31} = 0, \quad f_{22} = 9/2, \quad f_{13} = 0, \quad f_{04} = 1/4 \cdot 3^{8/3}.$$

Этот набор удовлетворяет условиям формулы (6) из теоремы 1.

ПРИМЕР 7. $z = x^\alpha y^\beta$ ($1 < \beta < \alpha$) вблизи точки $(1, 1, 1)$.

Полагая

$$s = \sqrt{\frac{\beta(\alpha + \beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)^2}}, \quad t = \frac{\beta}{\alpha - 1},$$

и, далее, $\lambda = t - s$, $\mu = t + s$, получаем здесь

$$\begin{aligned} f_{40} &= \frac{3}{2} \lambda^{-1/3} \mu^{-2/3} (\lambda + 1)^{-1/3} (\mu + 1)^{-2/3} (\mu^2 + \lambda), \\ f_{31} &= -3 \lambda^{-2/3} \mu^{-1/3} (\lambda + 1)^{-2/3} (\mu + 1)^{-1/3} (\lambda^2 + \mu), \\ f_{22} &= 0, \\ f_{13} &= -3 \lambda^{-1/3} \mu^{-2/3} (\lambda + 1)^{-1/3} (\mu + 1)^{-2/3} (\mu^2 + \lambda), \\ f_{04} &= \frac{3}{2} \lambda^{-2/3} \mu^{-1/3} (\lambda + 1)^{-2/3} (\mu + 1)^{-1/3} (\lambda^2 + \mu). \end{aligned} \quad (12)$$

Легко убедиться, что набор (12) удовлетворяет условиям формулы (3) теоремы 1.

Рассматривая формулы (12) в точках обратимости отображения

$$(\alpha, \beta) \rightarrow (f_{40}, f_{04}),$$

можно утверждать, что в $\mathbb{R}^3$ существует двухпараметрическое семейство аффинно-различных однородных седловидных поверхностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. М.: Физматлит, 1959.
2. Белошапка В. К. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 760–764.
3. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous Surfaces in the 3-Dimensional Affine Geometry // Prepr. Ser. Pure Math. / Inst. Math. Univ. Oslo. 1995. № 41. P. 1–26.