Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлик, О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 05:34:47

О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями

С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих

Доказана теорема существования решений для стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями (симметрическими производными в среднем) с неавтономной правой частью при выполнении некоторых естественных условий.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, уравнение с текущими скоростями, существование решения.

DOI: 10.4213/mzm11130

1. Введение. Понятие производных в среднем (mean derivatives) было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд созданной им так называемой стохастической механики – вариант квантовой механики (см. [1]–[3]). В дальнейшем было показано, что уравнения с производными в среднем естественно возникают и во многих других разделах математической физики. В работе авторов [4] на основе небольшой модификации идей Нельсона была введена дополнительная производная в среднем, названная нами квадратичной, которая сделала корректной задачу о нахождении процесса по его производным в среднем (у Нельсона по умолчанию квадратичная производная всегда равнялась единичному оператору, может быть умноженному на постоянное число, и поэтому не была введена). В частности, была показана разрешимость многих уравнений с производными в среднем, возникающих в математической физике (см. примеры в [5]).

Необходимо отметить, что для случайных процессов аналогом обычной (“физической”) скорости является так называемая симметрическая производная в среднем – полусумма производной справа (forward mean derivative) и производной слева (backward mean derivative), названная Нельсоном *текущей скоростью* (current velocity).

Таким образом, задача о разрешимости уравнений с текущими скоростями является наиболее важной для приложений, но и наиболее трудной для исследования в этой тематике. И если для случая автономных уравнений подобного типа были

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) – грант 14-21-00066, выполняемый Воронежским государственным университетом.

получены некоторые утверждения (см., например, [4], [5]), то развитые в этих случаях методы не переносились на случай неавтономных уравнений с текущими скоростями. Основным результатом настоящей работы является теорема существования решения для неавтономных уравнений с текущими скоростями при выполнении достаточно естественных условий.

Несколько слов об обозначениях. Мы имеем дело с уравнениями в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, для которого мы используем координатное описание векторов (как столбцов) и линейных операторов (как матриц). Если X – вектор-столбец, то транспонированный вектор (строка) обозначается X^* . Аналогичный символ $*$ используется для транспонирования матриц.

Пространство $n \times n$ матриц обозначается $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символом $S(n)$ мы обозначаем пространство симметрических $n \times n$ матриц – подпространство в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символ $S_+(n)$ используется для обозначения множества положительно определенных симметрических $n \times n$ матриц, которые образуют выпуклое подмножество в $S(n)$. Его замыкание – множество неотрицательно определенных матриц – обозначается через $\bar{S}_+(n)$.

Для простоты мы рассматриваем уравнения, их решения и другие объекты на конечном временном интервале $t \in [0, T]$.

Везде в тексте мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу.

2. Предварительные сведения о производных в среднем. Здесь мы опишем понятия и факты из теории производных в среднем и близких к ней, необходимые для дальнейшего. Более подробно с этой теорией можно ознакомиться в [3], [5], [6].

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1 -случайным элементом при всех t .

Обозначим символом $\mathcal{N}_t^\xi$ σ -подалгебру в $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ мы обозначаем символом $E_t^\xi(\cdot)$.

Обычное (“безусловное”) математическое ожидание обозначается символом E .

Напомним, что, вообще говоря, почти наверное (п.н.) выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы при почти всех t . Поэтому “классические” производные по времени процесса $\xi(t)$ существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, следуя Нельсону (см., например, [1]–[3]) мы даем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (i) *Производная в среднем справа* (forward mean derivative) $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t – это L_1 -случайный элемент вида

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right), \quad (2.1)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

(ii) *Производная в среднем слева* (backward mean derivative) $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t – это L_1 -случайный элемент

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbb{E}_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right), \quad (2.2)$$

где условия и обозначения такие же, как в (i).

Отметим, что обычно $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, скажем, $\xi(t)$ п.н. имеет C^∞ -гладкие выборочные траектории, эти производные очевидным образом совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [7]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции процесса $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$\begin{aligned} Y^0(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbb{E} \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = x \right), \\ Y_*^0(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbb{E} \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \mid \xi(t) = x \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

на $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Производная $D_S = (1/2)(D + D_*)$ называется *симметрической производной в среднем*. Производная $D_A = (1/2)(D - D_*)$ называется *антисимметрической производной в среднем*.

Рассмотрим векторные поля

$$v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) + Y_*^0(t, x)), \quad u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) - Y_*^0(t, x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется *текущей скоростью* (current velocity) процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется *осмотической скоростью* (osmotic velocity) процесса $\xi(t)$.

Для стохастических процессов текущая скорость является прямым аналогом обычной (физической) скорости детерминированных процессов (см., например, [1]–[3], [5]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро “нарастает” стохастичность.

Следуя [4] (см. также [5]), мы вводим дифференциальную характеристику D_2 случайного процесса $\xi(t)$, которая определяется формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \mathbb{E}_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \otimes (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))}{\Delta t} \right), \quad (2.4)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. На основе свойств интегралов Ито показано, что после предельного перехода $D_2\xi(t)$ является симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. D_2 называется *квадратичной производной в среднем* (quadratic mean derivative).

Для дальнейшего нам удобно пользоваться следующим определением диффузионного процесса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Диффузионным процессом* мы называем сильное решение стохастического уравнения в форме Ито

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s), \quad (2.5)$$

где $a(t, x)$ и $A(t, x)$ – C^∞ -гладкие отображения из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, соответственно.

ТЕОРЕМА 1 [4], [5]. *Для диффузионного процесса (2.5) производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и имеет вид $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$.*

ТЕОРЕМА 2 [4], [5]. *Для диффузионного процесса (2.5) квадратичная производная $D_2\xi(t)$ существует и имеет вид $D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$, где $\alpha = AA^*$ – коэффициент диффузии.*

3. Формулы для текущей и осмотической скоростей. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано C^∞ -гладкое неавтономное $(2, 0)$ -тензорное поле со значениями в $S_+(n)$, т.е. C^∞ -гладкое поле симметрических положительно определенных матриц $\alpha(t, x) = (\alpha^{ij}(t, x))$.

Так как все эти матрицы невырождены и поле C^∞ -гладко, существует C^∞ -гладкое поле симметрических положительно определенных обратных матриц $(\alpha_{ij}(t, x))$ ($(0, 2)$ -тензорное поле). Это поле можно рассматривать как новую зависящую от времени риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot) = \alpha_{ij}(t, x) dx^i \otimes dx^j$ на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ можно считать сужением на поверхность уровня $t = \text{const}$ римановой метрики $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с матрицей метрического тензора в точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ вида

$$(\bar{\alpha}_{kl}(t, x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha_{ij}(t, x)) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что определители матриц $(\bar{\alpha}_{kl}(t, x))$ и $(\alpha_{ij}(t, x))$ совпадают. Как известно, форма объема метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$ имеет вид

$$\Lambda_{\alpha_t} = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(t, x))} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

и значит форма объема метрики $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$\Lambda_{\bar{\alpha}} = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(t, x))} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = dt \wedge \Lambda_{\alpha_t}.$$

Из соображений удобства для последней формы объема мы будем использовать обозначение $dt \wedge \Lambda_{\alpha_t}$.

Ниже мы имеем дело с C^∞ -гладкими полями невырожденных линейных операторов $A(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (т.е., неавтономными $(1, 1)$ -тензорными полями на $\mathbb{R}^n$). Например, пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс (2.5), где $A(t, x)$ – C^∞ -гладко и невырождено. Тогда его коэффициент диффузии $A(t, x)A^*(t, x)$ является C^∞ -гладким полем симметрических положительно определенных матриц $\alpha(t, x) = (\alpha^{ij}(t, x))$ ($(2, 0)$ -тензорное поле на $\mathbb{R}^n$), т.е. по нему можно построить риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ как выше.

Отметим, что возможен также переход от поля $(\alpha^{ij}(t, x))$, как выше, к полю $A(t, x)$.

ЛЕММА 1 [4], [5]. Пусть $\alpha(t, x)$ – непрерывное (измеримое, гладкое) по совокупности переменных отображение из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $S_+(n)$. Тогда существует непрерывное (измеримое, гладкое, соответственно) по совокупности переменных отображение $A(t, x)$ из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$.

Обозначим символом $\rho^\xi(t, x)$ вероятностную плотность распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема $dt \wedge \Lambda_{\alpha_t}$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int_0^T \mathbb{E}(f(t, \xi(t))) dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} f(t, \xi(t)) d\mathbb{P} \right) dt = \int_{[0, T]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) \rho^\xi(t, x) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt.$$

ЛЕММА 2 [6], [8]. Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс (2.5) такой, что его плотность $\rho^\xi(t, x)$ нигде не равна нулю. Тогда

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial(\alpha^{ij}(t, x) \rho^\xi(t, x)) / \partial x^j}{\rho^\xi(t, x)} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.1)$$

где (α^{ij}) – матрица оператора AA^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим через $\Xi(t, x)$ векторное поле с координатным представлением

$$\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Нетрудно вывести из (3.1), что

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} \text{Grad}_t \log \rho^\xi(t, x) + \frac{1}{2} \Xi(t, x),$$

где Grad_t обозначает градиент относительно метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$. Действительно,

$$\frac{\partial(\alpha^{ij} \rho^\xi(t, x)) / \partial x^j}{\rho^\xi(t, x)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \alpha^{ij} \frac{\partial \rho^\xi / \partial x^j}{\rho^\xi} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где

$$\alpha^{ij} \frac{\partial \rho^\xi / \partial x^j}{\rho^\xi} \frac{\partial}{\partial x^i} = \text{Grad}_t \log \rho^\xi, \quad \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Xi.$$

ЛЕММА 3. Для $v^\xi(t, x)$ и $\rho^\xi(t, x)$ процесса (2.5) выполняется соотношение типа уравнения непрерывности следующего вида:

$$\frac{\partial \rho^\xi(t, x)}{\partial t} = -\text{Div}_t(\rho^\xi(t, x) v^\xi(t, x)), \quad (3.2)$$

где Div_t обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом Λ_E евклидову форму объема $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $\Lambda_{\alpha_t} = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \Lambda_E$.

Напомним, что $\text{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = d((\rho^\xi v^\xi) \rfloor \Lambda_{\alpha_t})$, где $\rfloor$ – внутреннее произведение вектора $(\rho^\xi v^\xi)$ и n -формы Λ_{α_t} , а внешний дифференциал d рассматривается на поверхности уровня $t = \text{const}$, т.е. содержит дифференцирования только по пространственным координатам x^i . Тогда

$$(\rho^\xi v^\xi) \rfloor \Lambda = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \sum_{i=1}^n (\rho^\xi v^\xi)^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

и, таким образом,

$$\text{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} + \frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}. \quad (3.3)$$

Зафиксируем гладкую функцию $f(t, x)$ с компактным носителем и два числа $0 \leq s < t \leq T$. Символом df мы обозначаем дифференциал относительно пространственных координат x^i : $df = (\partial f / \partial x^i) dx^i$. Вычисления в координатах дают

$$\begin{aligned} & \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} (df \cdot (\rho^\xi v^\xi(\tau, \xi(\tau)))) d\tau \wedge \Lambda_{\alpha_t} \\ &= \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} \left(df \cdot (\rho^\xi v^\xi(\tau, \xi(\tau))) \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \right) d\tau \wedge \Lambda_E \\ &= - \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \left[\sqrt{\det(\alpha_{ij})} \frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + (\rho^\xi v^\xi)^i \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \right] \right) d\tau \wedge \Lambda_E \\ &= - \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \left[\frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \right] \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \right) d\tau \wedge \Lambda_E \\ &= - \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \left[\frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \right] \right) d\tau \wedge \Lambda_{\alpha_t} \\ &= - \int_{[s,t] \times \mathbb{R}^n} (f(\tau, x) \text{Div}(\rho^\xi v^\xi)) d\tau \wedge \Lambda_{\alpha_t}. \end{aligned}$$

По формуле Ито

$$\mathbb{E}(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot Y^0(\tau, \xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t \text{tr} f''(A, A) d\tau \right)$$

и по обратной формуле Ито

$$\mathbb{E}(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot Y_*^0(\tau, \xi(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \int_s^t \text{tr} f''(A, A) d\tau \right).$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = \mathbb{E} \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot v^\xi(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right).$$

Но

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot v^\xi(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right) \\ &= \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \rho^\xi + [df \cdot (\rho^\xi v^\xi(\tau, \xi(\tau)))] \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \tau} ((f(\tau, x) \rho^\xi) \Lambda_{\alpha_t}) d\tau - \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial \tau} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(\tau, x) \operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau \right) \\
&= \mathbb{E}(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) - \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial \tau} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau \\
&\quad - \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(\tau, x) \operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial \tau} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau - \int_{[s,t]} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(\tau, x) \operatorname{Div}(\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) d\tau = 0.$$

Поскольку это выполняется для любой функции $f(t, x)$ как выше, отсюда следует, что $\partial \rho^\xi / \partial \tau = -\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)$.

ЛЕММА 4. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \alpha_t(v^\xi, \operatorname{Grad}_t \rho^\xi) + \rho \operatorname{Div}_t v^\xi.$$

где Grad_t обозначает градиент относительно римановой метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точности аналогично выводу формулы (3.3) получаем

$$\operatorname{Div}_t(v^\xi) = \frac{(v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} + \frac{\partial (v^\xi)^i}{\partial x^i}. \quad (3.4)$$

Напомним, что

$$\frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} = \rho^\xi \frac{\partial (v^\xi)^i}{\partial x^i} + (v^\xi)^i \frac{\partial \rho^\xi}{\partial x^i}.$$

Тогда из формулы (3.3) с использованием формулы (3.4) мы выводим, что

$$\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \rho^\xi \operatorname{Div}_t v^\xi + (v^\xi)^i \frac{\partial \rho^\xi}{\partial x^i},$$

где $(v^\xi)^i \partial \rho^\xi / \partial x^i$ – производная плотности ρ^ξ по направлению векторного поля v^ξ на указанной поверхности уровня. Но по определению градиента Grad_t последняя производная равна $\alpha_t(v^\xi, \operatorname{Grad}_t \rho^\xi)$.

4. Основной результат. Как сказано выше, текущая скорость является прямым аналогом обычной скорости физических детерминированных процессов. Так что случай уравнений с текущими скоростями, по-видимому, является наиболее естественным с физической точки зрения.

Пусть $v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\alpha: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{S}_+(n)$ – измеримые по Борелю отображения. Систему вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2 \xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

мы называем *уравнением первого порядка с текущими скоростями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Говорят, что (4.1) имеет решение на интервале $[0, T]$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ процесс $\xi(t)$, для которого выполняется (4.1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $v: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\alpha: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow S_+(n)$ — C^∞ -гладкие по совокупности переменных (в частности, это означает, что при каждом t поле α определяет зависящую от времени риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$, введенную в п. 3). Пусть также выполняются оценки

$$\|v(t, x)\| < K(1 + \|x\|), \quad (4.2)$$

$$\text{tr } \alpha(t, x) < K(1 + \|x\|^2) \quad (4.3)$$

и пусть для всех индексов ij элементы матрицы $\alpha_t(t, x)$ удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^j}(t, x) \right| < K(1 + \|x\|) \quad (4.4)$$

при некотором $K > 0$. Пусть ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathbb{R}^n$, у которого вероятностная плотность распределения ρ_0 относительно формы объема Λ_{α_0} метрики $\alpha_0(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ (см. п. 3), C^∞ -гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ уравнение (4.1) имеет решение, корректно определенное на всем отрезке $t \in [0, T]$, которое единственно как диффузионный процесс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $v(t, x)$ C^∞ -гладко и для него выполнена оценка (4.2), поток g_t этого векторного поля корректно определен на всем отрезке $t \in [0, T]$. Символом $g_t(x)$ мы обозначаем орбиту этого потока (т.е., решение уравнения $x'(t) = v(t, x)$) с начальным условием $g_0(x) = x$). Поскольку $v(t, x)$ C^∞ -гладко, его поток также C^∞ -гладкий.

Используя лемму 4, преобразуем уравнение непрерывности (3.2) к виду

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = -\alpha_t(v, \text{Grad}_t \rho) - \rho \text{Div}_t v. \quad (4.5)$$

Предположим, что $\rho(t, x)$ нигде не равно нулю в $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем разделить (4.5) на ρ и, таким образом, преобразовать его к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha_t(v, \text{Grad}_t p) - \text{Div}_t v. \quad (4.6)$$

где $p = \log \rho$. Введем $p_0 = \log \rho_0$.

Покажем, что решение уравнения (4.6) с начальными условиями $p(0) = p_0$ описывается формулой

$$p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (\text{Div}_\tau v)(s, g_s(g_{-t}(x))) ds.$$

Введем произведение $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим функцию p_0 как заданную на поверхности уровня $t = 0$. Рассмотрим векторное поле $(1, v(t, x))$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Орбиты его потока $\hat{g}_t$, начинающиеся в точках поверхности $t = 0$, имеют вид $\hat{g}_t(0, x) = (t, g_t(x))$, и поток является C^∞ -гладким, как и g_t . Рассмотрим на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ риманову метрику $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ (см. п. 3). Отметим, что для каждого (t, x) точка $\hat{g}_{-t}(t, x)$ принадлежит

поверхности уровня $t = 0$, где функция p_0 задана. Таким образом, с одной стороны, $(1, v)p(t, x)$ – производная функции $p(t, x)$ по направлению векторного поля $(1, v)$ по построению равна $\text{Div}_t v(t, x)$. А с другой стороны, нетрудно вычислить, что

$$(1, v)p(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) + \alpha_t(v(t, x), \text{Grad}_t p(t, x)).$$

Так что (4.6) выполняется.

Подчеркнем, что $\rho = e^p$, действительно, нигде не равно нулю и, таким образом, рассуждения корректны.

Из найденных формул для ρ и p видно, что ρ однозначно определяется по v и α и что для заданных поля α и начальной плотности ρ_0 , удовлетворяющих условиям теоремы, плотности построенного вида и гладкие векторные поля, у которых потоки полны, находятся во взаимно-однозначном соответствии. То есть, и наоборот, v однозначно определяется по ρ и α . Так что процесс, имеющий плотность распределения ρ и коэффициент диффузии (квадратичную производную) α , имеет текущую скорость v . С другой стороны, процесс, имеющий плотность распределения ρ и коэффициент диффузии α , имеет осмотическую скорость u , однозначно и независимо от v найденную по формуле (3.1). Значит, процесс, имеющий текущую скорость v и коэффициент диффузии α (и, следовательно, плотность распределения ρ), имеет снос (производную в среднем справа)

$$a(t, x) = v(t, x) + u(t, x) = v(t, x) + \frac{1}{2} \text{Grad}_t p + \frac{1}{2} \Xi = v(t, x) + \text{Grad}_t \log \sqrt{\rho} + \frac{1}{2} \Xi$$

(см. замечание 1), определенный этой формулой однозначно. Таким образом, процесс, имеющий текущую скорость v и коэффициент диффузии α , является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s), \quad (4.7)$$

где C^∞ -гладкое поле $A(t, x)$ такое, что $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$, существует по лемме 1. Так как коэффициенты этого уравнения C^∞ -гладки и выполняются оценки (4.2), (4.3) и (4.4), это уравнение имеет единственное сильное решение, существующее на всем отрезке $[0, T]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Nelson, “Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics”, *Phys. Rev.*, **150**:4 (1966), 1079–1085.
- [2] E. Nelson, *Dynamical Theory of Brownian Motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.
- [3] E. Nelson, *Quantum Fluctuations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.
- [4] S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh, “Differential inclusions with mean derivatives”, *Dynam. Systems Appl.*, **16**:1 (2007), 49–71.
- [5] Yu. E. Gliklikh, *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag, London, 2011.
- [6] J. Cresson, S. Darses, “Stochastic embedding of dynamical systems”, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 072703.
- [7] К. Парасарати, *Введение в теорию вероятностей и теорию меры*, Мир, М., 1983.

- [8] Yu. E. Gliklikh, E. Yu. Mashkov, “Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, **6:2** (2013), 25–39.
- [9] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, Т. 3, Физматлит, М., 1975.

С. В. Азарина

Кубанский государственный университет,

г. Краснодар

E-mail: azarinas@mail.ru

Поступило

02.09.2015

Исправленный вариант

29.11.2015

Ю. Е. Гликликх

Воронежский государственный университет

E-mail: yeg@math.vsu.ru