Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Камальян, Об одном методе факторизации произведения голоморфных матриц-функций, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 212–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:46:31

Об одном методе факторизации произведения голоморфных матриц-функций

А. Г. Камалян

Рассматривается класс матриц-функций определенных на некотором контуре, являющемся границей ограниченной конечно-связной области комплексной плоскости. Предполагается, что матрицы-функции рассматриваемого класса допускают явное представление в виде произведения двух матриц-функций голоморфных соответственно во внешней и во внутренней частях контура. Исследуется задача факторизации матриц-функций указанного класса. Предлагается конструктивный метод, сводящий задачу факторизации к решению конечного числа явно записываемых систем линейных алгебраических уравнений. В частности, получены точные формулы для частных индексов.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: матрица-функция, факторизация, частные индексы.

DOI: 10.4213/mzm11131

Введение. Пусть Ω_+ – ограниченная конечно-связная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ , состоящей из замкнутых спрямляемых жордановых контуров, а Ω_- – дополнение к $\Omega_+ \cup \Gamma$ в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Обозначим через $E_p^\pm$, $0 < p \leq \infty$, классы Смирнова [1]–[3] функций, аналитических в $\Omega_\pm$,

$$\dot{E}_p^- = \{\varphi \in E_p^- \mid \varphi(\infty) = 0\}.$$

Как известно (см. [1]–[3]), каждая функция f из класса E_p^+ (E_p^-) почти для всех $t \in \Gamma$ имеет угловые граничные значения $f^+(t)$ ($f^-(t)$), причем определенная на Γ функция f^+ (f^-) принадлежит L_p (то же самое, $L_p(\Gamma)$). Множество функций, определенных на Γ и являющихся граничными значениями некоторой функции из класса E_p^+ (E_p^- , $\dot{E}_p^-$), будем обозначать через L_p^+ (L_p^- , $\dot{L}_p^-$).

Для линейала X через X^n будем обозначать множество n -мерных вектор-столбцов с координатами из X , а через $X^{k \times n}$ – множество всех матриц порядка $k \times n$ с компонентами из X .

Факторизацией в L_p , $1 < p < \infty$, (относительно контура Γ), матрицы-функции G , определенной на Γ , как известно (см. [3]), называется ее представление в виде

$$G = G_- \Lambda G_+^{-1}, \quad (0.1)$$

где $G_\pm \in L_p^\pm$, $G_\pm^{-1} \in L_q^\pm$, $q = p/(p-1)$,

$$\Lambda(t) = \text{diag}[(t - z_0)^{\alpha_1}, \dots, (t - z_0)^{\alpha_n}],$$

z_0 – некоторая фиксированная точка Ω_+ , а $\varkappa_1 \leq \dots \leq \varkappa_n$ – целые числа, называемые *частными индексами* матрицы-функции G . Число $\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_n$ называется *суммарным индексом* G .

При фиксированном p частные индексы определяются однозначно [3]. Далее без ограничения общности будем считать, что $0 \in \Omega_+$, а $z_0 = 0$.

Пусть $\mathcal{R}$ – множество рациональных функций с полюсами вне контура Γ ,

$$\mathcal{R}^\pm = L_p^\pm \cap \mathcal{R}, \quad \mathring{\mathcal{R}}^- = \mathring{L}_p^- \cap \mathcal{R}, \quad \mathcal{M}_p^+ = L_p^+ \dot{+} \mathring{\mathcal{R}}^-, \quad \mathcal{M}_p^- = \mathcal{R}^+ \dot{+} \mathring{L}_p^-.$$

Данная работа посвящена задаче факторизации в L_p матрицы-функции G , допускающей явное представление вида

$$G = AB^{-1}, \quad (0.2)$$

где

$$A \in (L_p^-)^{n \times n}, \quad B \in (\mathcal{M}_p^+)^{n \times n}, \quad A^{-1} \in (\mathcal{M}_q^-)^{n \times n}, \quad B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}. \quad (0.3)$$

Случай, когда A и B являются невырожденными на контуре Γ матрицами-функциями с гёльдеровскими компонентами, допускающими аналитическое продолжение в Ω_- и в Ω_+ соответственно, рассмотрен в работе [4]. Предложенный там алгоритм факторизации получил дальнейшее развитие в [5] (см. также [3; секция 2.4]). Было доказано, что при выполнении условий (0.3) матрица-функция, определенная по формуле (0.2), факторизуема в L_p . Были также получены оценки частных индексов и вычислен суммарный индекс. Каждый шаг указанного алгоритма обусловлен результатами вычислений предыдущих шагов. Это обстоятельство не позволяет на основе алгоритма получить точные формулы для частных индексов и факторов $G_\pm$.

Предлагаемый здесь метод факторизации основан (см. [6], [7]) на свойствах ядер теплицевых операторов с символами $\tau_{-k}G$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\tau_k(t) = t^k$ – степенная функция с показателем k) и позволяет получить точные формулы для частных индексов в терминах конечного числа степенных моментов (относительно контура Γ) некоторых заранее известных матриц-функций. Конструкция факторов $G_\pm$ сводится к решению конечного числа конечных систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых выписываются с помощью вышеуказанных степенных моментов.

Впервые формулы такого типа для полиномиальных матриц были получены в [8], а для матриц-функций, непрерывных на контуре и допускающих мероморфное продолжение во внутреннюю односвязную область, получены в [9].

В [10] результаты подобного характера получены для матриц-функций из классов $(L_\infty^+)^{n \times n}$ и $(L_\infty^-)^{n \times n}$, определенных на карлесоновом контуре (см. [11]), ограничивающем конечно-связную область. Отметим также работы [12], [13]. В работе [14] рассмотрена задача факторизации в более общей постановке. В случае, когда $G \in (L_q^+)^{n \times n}$, а $G^{-1} \in (\mathcal{M}_p^+)^{n \times n}$, либо $G \in (L_p^-)^{n \times n}$, а $G^{-1} \in (\mathcal{M}_q^-)^{n \times n}$, рассматриваемая в [14] факторизация совпадает с обычной L_p -факторизацией. Результаты, полученные там, по существу, обобщают результаты [10] на указанные выше более широкие классы голоморфных матриц-функций в случае, когда контур является границей конечно-связной области и состоит из спрямляемых жордановых контуров.

Класс матриц-функций второго порядка, допускающих явное представление вида (0.2), рассмотрен в [15] (см. ниже приложение 6.3). Приложения результатов этой работы в теории интегральных уравнений приведены в [16] и [17].

1. Теплицев оператор. Обозначим через $\mathcal{P}_+ (\mathcal{P}_-)$ определенный на прямой сумме $L_1^+ \dot{+} L_1^-$ проектор на $L_1^+ (L_1^-)$ параллельно $L_1^- (L_1^+)$. Пусть G – L_p -факторизуемая, $1 < p < \infty$, матрица-функция с частными индексами $\varkappa_1 \leq \dots \leq \varkappa_n$, а $\mathcal{D}_p^+$ – множество вектор-функций $\varphi \in (L_p^+)^n$ таких, что $G\varphi \in (L_p^+)^n \dot{+} (L_p^-)^n$. Рассмотрим семейство теплицевых операторов $T_j: \mathcal{D}_p^+ \rightarrow (L_p^+)^n$, $j \in \mathbb{Z}$, действующих по формуле

$$T_j \varphi = \mathcal{P}_+(\tau_{-j} G \varphi).$$

Ядро оператора T_j обозначим через N_j . Легко видеть, что N_j совпадает с вектор-функциями вида $G_+ q$, где $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, причем q_k при $j > \varkappa_k$ является произвольным многочленом степени не более чем $j - \varkappa_k - 1$, а при $j \leq \varkappa_k$ равен нулю.

Обозначим $\mu(j) = \text{card}\{\varkappa_i \mid \varkappa_i = j\}$, где $\text{card } A$ – число элементов множества A . Пусть частные индексы принимают значения $\eta_1 < \dots < \eta_s$. Тогда если $\mu(\eta_k) = n_k$, то $n_1 + \dots + n_s = n$. Легко видеть, что

$$\dim N_j = \sum_{\varkappa_k \leq j} (j - \varkappa_k) = \sum_{m \leq j} (j - m) \mu(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

и поэтому

$$\dim N_j - \dim N_{j-1} = \sum_{m < j} \mu(m), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что

$$\dim N_j = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad j \leq \varkappa_1, \quad (1.3)$$

$$\dim N_j - \dim N_{j-1} = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad j > \varkappa_n. \quad (1.4)$$

Важное значение в дальнейшем играет следующая формула, вытекающая из (1.2) (более подробно см. [10]):

$$\varkappa_i = \eta_- + \text{card}\{j \mid \dim N_j - \dim N_{j-1} < i, j = \eta_- + 1, \dots, \eta_+\}, \quad (1.5)$$

где $\eta_{\pm}$ – произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $\eta_- \leq \eta_1$, $\eta_+ \geq \eta_s$, $\eta_- < \eta_+$.

Определим пространства

$$\widehat{N}_j = \{\varphi_1 + \tau_1 \varphi_2 \mid \varphi_1, \varphi_2 \in N_j\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Как известно (см. [6]), для $j \notin \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ имеет место равенство $N_{j+1} = \widehat{N}_j$. Пространство $\widehat{N}_{\eta_k}$, $k = 1, \dots, s$, строго лежит в N_{η_k+1} и имеет там коразмерность n_k . Произвольное прямое дополнение $\widehat{N}_{\eta_k}$ в N_{η_k+1} будем называть η_k -индексным подпространством матрицы-функции G . Прямое произведение $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\eta_1} \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{M}_{\eta_s}$ η_k -индексных подпространств будем называть индексным пространством матрицы-функции G . Очевидно, что

$$\dim \mathcal{M} = n_1 + \dots + n_s = n.$$

Если представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является L_p -факторизацией, то линейная оболочка столбцов фактора G_+ является индексным пространством G . Справедливо и

обратное утверждение: если вектор-функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются базисом некоторого индексного пространства G , а $G_+ = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ – матрица-функция со столбцами, равными $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, то представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$, где $\Lambda = \text{diag}[\tau_{\varkappa_1}, \dots, \tau_{\varkappa_n}]$, $G_- = G G_+ \Lambda^{-1}$, является факторизацией матрицы-функции G в пространстве L_p . Определим также следующие подпространства $\mathbb{C}^n$:

$$N_j^0 = \{\varphi(0) \mid \varphi \in N_j\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{M}_{\eta_k}^0 = \{\varphi(0) \mid \varphi \in \mathcal{M}_{\eta_k}\}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Эти пространства обладают следующими свойствами (см. [6], [7]):

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{\eta_k}^0 &= n_k, & N_{j+1}^0 &= N_j^0 \quad \text{для } j \notin \{\eta_1, \dots, \eta_s\}, \\ N_{\eta_k+1}^0 &= N_{\eta_k}^0 \dot{+} \mathcal{M}_{\eta_k}^0, & k &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В дальнейшем важную роль играет следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Если $\varphi_k \in N_{\varkappa_k+1}$, $k = 1, \dots, n$, а векторы $\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$ линейно независимы в $\mathbb{C}^n$, то система вектор-функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ является базисом некоторого индексного пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что φ_k линейно независимы. Пусть $n_0 = 0$. Определим пространства

$$\mathcal{M}_k = \text{span}\{\varphi_{n_0+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \varphi_{n_0+\dots+n_k}\}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Пространство $\mathcal{M}_1$ является η_1 -индексным подпространством. С помощью индукции докажем, что каждое из подпространств $\mathcal{M}_k$, $k = 2, \dots, s$, является η_k -индексным подпространством. Действительно, пусть для некоторого m , $1 \leq m < s$, пространства $\mathcal{M}_k$, $k = 1, \dots, m$, являются η_k -индексными подпространствами и $\varphi_\ell \in \mathcal{M}_{m+1}$ ($\ell \in \{n_0 + \dots + n_m + 1, \dots, n_0 + \dots + n_m\}$).

Из (1.6) следует, что $N_{\eta_{m+1}}^0 = \mathcal{M}_1^0 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{M}_m^0$ и потому

$$\dim N_{\eta_{m+1}}^0 = n_1 + \dots + n_m.$$

Кроме того, так как $N_{\eta_{m+1}}^0 = N_{\eta_{m+1}}^0$, то $\varphi_1(0), \dots, \varphi_{n_1+\dots+n_m}(0) \in N_{\eta_{m+1}}^0$. Поскольку $\varphi_1(0), \dots, \varphi_{n_1+\dots+n_m}(0), \varphi_\ell(0)$ линейно независимы, то $\varphi_\ell(0)$ не принадлежит пространству $N_{\eta_{m+1}}^0$. Таким образом, векторы $\mathcal{M}_{m+1}$ принадлежат $N_{\eta_{m+1}}$ и не принадлежат $N_{\eta_{m+1}}^0$. Учитывая, что $\dim \mathcal{M}_{m+1} = n_{m+1}$, получим, что $\mathcal{M}_{m+1}$ является η_{m+1} -индексным подпространством. Лемма доказана.

2. Свойства степенных моментов. Далее мы предполагаем, что матрицы-функции A и B удовлетворяют условиям (0.3). Пусть $z_1^-, \dots, z_{\ell_-}^- \in \Omega_-$ – все конечные нули функции $\det A$ с кратностями $m_1^-, \dots, m_{\ell_-}^-$ соответственно, а $z_1^+, \dots, z_{\ell_+}^+ \in \Omega_+$ – все нули функции $\det B^{-1}$ с кратностями $m_1^+, \dots, m_{\ell_+}^+$ соответственно. Рассмотрим многочлены

$$\Delta_-(z) = \prod_{i=1}^{\ell_-} \left(\frac{z}{z_i^-} - 1 \right)^{m_i^-}, \quad \Delta_+(z) = \prod_{i=1}^{\ell_+} (z - z_i^+)^{m_i^+}$$

и числа $\chi_- = m_0^- + \dots + m_{\ell_-}^-$, $\chi_+ = m_0^+ + \dots + m_{\ell_+}^+$, где m_0^- – порядок нуля функции $\det A$ в бесконечности. Легко заметить, что $\Delta_- \mathcal{P}_+(A^{-1})$ является матричным полиномом, степень которого не превышает χ_- . Следовательно, существуют матричные

полиномы Q_r, Q_ℓ порядка $n \times n$ такие, что $Q_r(0) = Q_\ell(0) = I_n$ (I_n – единичная матрица порядка $n \times n$), а матрицы-функции $\mathcal{P}_+(A^{-1})Q_r, Q_\ell\mathcal{P}_+(A^{-1})$ являются полиномами. Наименьшие возможные значения чисел $\max\{\deg Q_r, \deg(\mathcal{P}_+(A^{-1})Q_r)\}, \max\{\deg Q_\ell, \deg(Q_\ell\mathcal{P}_+(A^{-1}))\}$ будем обозначать через ν_r и ν_ℓ соответственно. Очевидно, что $\nu_r \leq \chi_-, \nu_\ell \leq \chi_-$.

Условимся далее для произвольной матрицы-функции (вектор-функции, функции) Φ пользоваться следующим обозначением:

$$\langle \Phi \rangle_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(t) t^{-k-1} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Считая формальную степень полиномиальной матрицы Q_r равной ν ($\nu \geq \nu_r$), из равенств $\langle \mathcal{P}_-(A^{-1}) \rangle_m = 0, m = 0, 1, \dots$ (см. [3; теорема 1.24]), получим, что

$$\langle A^{-1}Q \rangle_{\nu+m} = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, можно утверждать, что для любого целого числа ν такого, что $\nu \geq \nu_r$, существуют матрицы $Q_1^{(r)}, \dots, Q_\nu^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\langle A^{-1} \rangle_{\nu+m} + \sum_{k=1}^{\nu} \langle A^{-1} \rangle_{\nu+m-k} Q_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Аналогично, для любого целого числа ν такого, что $\nu \geq \nu_\ell$, существуют матрицы $Q_1^{(\ell)}, \dots, Q_\nu^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\langle A^{-1} \rangle_{\nu+m} + \sum_{k=1}^{\nu} Q_k^{(\ell)} \langle A^{-1} \rangle_{\nu+m-k} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Поскольку $\Delta_+ \mathcal{P}_-(B)$ является матричным полиномом, степень которого не превышает $\chi_+ - 1$, существует полином F_r (F_ℓ), старший коэффициент которого равен I_n , а матрица-функция BF_r ($F_\ell B$) принадлежит $(L_p^+)^{n \times n}$. Обозначим наименьшие возможные степени многочленов F_r и F_ℓ через μ_r и μ_ℓ соответственно. Из [3; теорема 1.24] следует, что

$$\langle BF_r \rangle_m = \langle F_\ell B \rangle_m = 0, \quad m = -1, -2, \dots$$

Переходя при необходимости от матрицы F_r (F_ℓ) к матрице $\tau_k F_r$ ($\tau_k F_\ell$), где $k > 0$, можно утверждать, что для любого целого числа μ такого, что $\mu \geq \mu_r$, существуют матрицы $F_0^{(r)}, \dots, F_{\mu-1}^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\langle B \rangle_{-(\mu+m)} + \sum_{k=0}^{\mu-1} \langle B \rangle_{-(m+k)} F_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Аналогично, для любого целого μ такого, что $\mu \geq \mu_\ell$, существуют матрицы $F_0^{(\ell)}, \dots, F_{\mu-1}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\langle B \rangle_{-(\mu+m)} + \sum_{k=0}^{\mu-1} F_k^{(\ell)} \langle B \rangle_{-(m+k)} = n, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Определим рациональную матрицу-функцию U по формуле

$$U = \tau_{\nu_\ell} \mathcal{P}_-(\tau_{-\nu_\ell} B) \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1}). \quad (2.5)$$

Поскольку $\tau_{\nu_\ell} \mathcal{P}_-(\tau_{-\nu_\ell} B) = B - \tau_{\nu_\ell} \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_\ell} B)$, из условия $F_\ell B \in (L_p^+)^{n \times n}$ следует $F_\ell U \in (\mathcal{R}^+)^{n \times n}$ и потому вместе с (2.5) одновременно справедливы и соотношения

$$\langle U \rangle_{-(\mu+m)} + \sum_{k=0}^{\mu-1} F_k^{(\ell)} \langle U \rangle_{-(m+k)} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Числа ν_r и ν_ℓ (соответственно μ_r и μ_ℓ) могут быть отличны друг от друга. Рассмотрим следующий пример. Пусть $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ и

$$B(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(z-1)(z-2)} & 0 \\ \frac{1}{z-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}$ и, кроме того, $\mu_r = 2$, а $\mu_\ell = 1$.

3. Ганкелевы операторы. Рассмотрим семейство ганкелевых операторов

$$H_j^- : (\mathring{L}_p^-)^n \rightarrow (L_p^+)^n, \quad H_j^+ : (L_q^+)^n \rightarrow (\mathring{L}_1^-)^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

действующих по формулам

$$H_j^- \varphi = \mathcal{P}_+(\tau_{j+} A^{-1} \varphi), \quad H_j^+ \varphi = \mathcal{P}_-(\tau_{j-} B \varphi),$$

где $j^\pm = 1/2(j \pm |j|)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_j$ в случае $j > 0$, $j \in \mathbb{Z}$, пространство векторных многочленов $\sum_{k=0}^{j-1} \varphi_k z^k$, $\varphi_0, \dots, \varphi_{j-1} \in \mathbb{C}^n$, а в случае $j < 0$ – пространство векторных многочленов от z^{-1} вида $\sum_{k=j}^{-1} \varphi_k z^k$, $\varphi_j, \dots, \varphi_- \in \mathbb{C}^n$. Будем считать, что $\mathcal{L}_0 = \{0\}$.

ЛЕММА 3.1. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{im} H_0^- = \operatorname{im}(H_0^-|_{\mathcal{L}_{-\nu_r}}), \quad \operatorname{im} H_0^+ = \operatorname{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_{\mu_r}}). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор-функцию $f \in (\mathring{L}_p^-)^n$ можно представить в виде

$$f = q + \tau_{-\chi_-} \Delta_- f_0,$$

где $q \in \mathcal{L}_{-\chi_0}$, а $f_0 \in (\mathring{L}_p^-)^n$ (более подробно см. [10; предложение 5.2]).

Из аналитичности $\mathcal{P}_+(A^{-1})$ в Ω_+ и равенств

$$\langle \mathcal{P}_-(A^{-1}) \rangle_k = 0, \quad \langle \mathcal{P}_+(A^{-1}) \rangle_k = \langle A^{-1} \rangle_k$$

для целых $k \geq 0$ следует, что в окрестности нуля имеет место следующее разложение:

$$\mathcal{P}_+(A^{-1})(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle A^{-1} \rangle_k z^k. \quad (3.2)$$

Пусть $\nu \geq \nu_r$, $Q_1^{(r)}, \dots, Q_\nu^r \in \mathbb{C}^n$ – матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.1), и $y \in \mathcal{L}_{-(\nu+1)}$. Определим $h \in \mathcal{L}_{-\nu}$ равенствами

$$\langle h \rangle_k = \begin{cases} \langle y \rangle_k - Q_{\nu+k+1}^r \langle y \rangle_{-(\nu+1)}, & k = -\nu, \dots, -1, \\ 0, & k \notin \{-\nu, \dots, -1\}. \end{cases}$$

Пользуясь разложением (3.2) и соотношениями (2.1), легко убедиться, что $H_0^-(h) = H_0^-(y)$. Следовательно,

$$\text{im}(H_0^-|_{\mathcal{L}_{-(\nu+1)}}) = \text{im}(H_0^-|_{\mathcal{L}_{-\nu}}),$$

что доказывает первое равенство (3.1).

Доказательство второго равенства (3.1) аналогично. Из представления

$$f = q + \Delta_+ f_0,$$

где $q \in \mathcal{L}_{\chi_+}$, $f_0 \in (L_q^+)^n$, имеющего место для произвольного $f \in (L_q^+)^n$, следует, что $\text{im } H_0^+ = \text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_{\chi_+}})$. Пусть $\mu \geq \mu_r$, $y \in \mathcal{L}_{\mu+1}$, а $F_0^{(r)}, \dots, F_\mu^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – матрицы, удовлетворяющие условиям (2.3). Определим $h \in \mathcal{L}_\mu$ следующими образом:

$$\langle h \rangle_k = \begin{cases} \langle y \rangle_k - F_k^{(r)} \langle y \rangle_\nu, & k = 0, \dots, \nu - 1, \\ 0, & k \notin \{0, 1, \dots, \nu - 1\}. \end{cases}$$

Тогда из соотношений (2.3) и разложения $\mathcal{P}_-(B)$ в окрестности $z = \infty$

$$\mathcal{P}_-(B)(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \langle B \rangle_k z^k$$

следует равенство $H_0^+(h) = H_0^+(y)$ или, что то же самое, что

$$\text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_{\mu+1}}) = \text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_\mu}).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ и любого $\nu \geq \nu_r$ справедливы равенства

$$\text{im } H_j^- = \text{im}(H_j^-|_{\mathcal{L}_{-(\nu+j+)}}). \quad (3.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Не останавливаясь на доказательстве, заметим, что равенства (3.1) не улучшаемы. Действительно, легко убедиться, что если $\text{im } H_0^- = \text{im}(H_0^-|_{\mathcal{L}_{-\nu}})$, то $\nu \geq \nu_r$. Аналогично, из равенства $\text{im } H_0^+ = \text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_\mu})$ следует, что $\mu \geq \mu_r$.

Поскольку $\mathcal{P}_+(\tau_{j+}A^{-1}) \in (\mathcal{R}^+)^{n \times n}$ и $H_j^- \varphi = \mathcal{P}_+(\mathcal{P}_+(\tau_{j+}A^{-1})\varphi)$, то в силу леммы 3.1 имеет место включение

$$\text{im } H_j^- \subset (\mathcal{R}^+)^n.$$

Это означает, что может быть определено произведение операторов $H_j^+ H_j^-$, $j \in \mathbb{Z}$. Кроме того, поскольку $\mathcal{P}_-(\tau_{j-}B) \in (\hat{\mathcal{R}}^-)^{n \times n}$ и $H_j^+ \varphi = \mathcal{P}_-(\mathcal{P}_-(\tau_{j-}B)\varphi)$, то

$$\text{im } H_j^+ H_j^- \subset (\hat{\mathcal{R}}^-)^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Важную роль в дальнейшем играют ядра конечномерных операторов

$$K_j := H_j^+ H_j^- : \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)} \rightarrow (\mathring{\mathcal{R}}^-)^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Дадим описание этих ядер в терминах конечномерных матриц.

Пусть $j \in \mathbb{Z}$, $\mu_\ell - j^- > 0$ и $\nu_r + j^+ > 0$. Определим A_j – матрицы порядка $n(\nu_r + j^+) \times n(\nu_r + j^+)$ и B_j, U_j, K_j – матрицы порядка $n(\mu_\ell - j^-) \times n(\nu_r + j^+)$ по следующим формулам:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-1} & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-2} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{1-j^+} \\ 0 & 0 & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-1} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{2-j^+} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \langle B \rangle_{-1-j^-} & \langle B \rangle_{-2-j^-} & \dots & \langle B \rangle_{-\nu_r-j} \\ \langle B \rangle_{-2-j^-} & \langle B \rangle_{-3-j^-} & \dots & \langle B \rangle_{-\nu_r-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle B \rangle_{-\mu_\ell} & \langle B \rangle_{-\mu_\ell-1} & \dots & \langle B \rangle_{-(\mu_\ell+\nu_r)-j^+-1} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$U_j = \begin{pmatrix} \langle U \rangle_{-1-j^-} & \langle U \rangle_{-2-j^-} & \dots & \langle U \rangle_{-\nu_r-j} \\ \langle U \rangle_{-2-j^-} & \langle U \rangle_{-3-j^-} & \dots & \langle U \rangle_{-\nu_r-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle U \rangle_{-\mu_\ell} & \langle U \rangle_{-\mu_\ell-1} & \dots & \langle U \rangle_{-(\mu_\ell+\nu_r)-j^+-1} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$K_j = U_j - B_j A_j. \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и $j \geq -\nu_\ell$. Если $\mu_\ell - j^- > 0$ и $\nu_r + j^+ > 0$, то вектор-функция $q \in \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$ принадлежит $\ker K_j$ тогда и только тогда, когда вектор

$$(\langle q \rangle_{-(\nu_r+j^+)}, \dots, \langle q \rangle_{-1}^T)^T \in \mathbb{C}^{n(\nu_r+j^+)}$$

принадлежит пространству $\ker K_j$. Если $\mu_\ell = 0$ и $j \geq 0$, то $\ker K_j = \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$. Если $\nu_r = 0$ и $j \leq 0$, то $\ker K_j = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_\ell - j^- > 0$ и $\nu_r + j^+ > 0$. Пользуясь равенством

$$A^{-1} = \tau_{-j^++1} \mathcal{P}_-(\tau_{j^+-1} A^{-1}) + \tau_{\nu_r} \mathcal{P}_-(\tau_{-\nu_r-j^++1} \mathcal{P}_+(\tau_{j^+-1} A^{-1})) + \tau_{\nu_r} \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1}),$$

в силу $\tau_{\nu_r+j^+} \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1}) q \in (\mathcal{R}^+)^n$ и $\mathcal{P}_-(\tau_{-\nu_r-1}) q \in (\mathring{L}_q^-)^n$ для произвольного $q \in \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$ получим равенство $H_j^- q = \tau_{\nu_r+j^+} \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1}) q + g$, где

$$g = \mathcal{P}_+(\tau_{\nu_r+j^+} \mathcal{P}_-(\tau_{-j^+-\nu_r+1} \mathcal{P}_+(\tau_{j^+-1} A^{-1}) q)). \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что

$$K_j q = \mathcal{P}_-(\tau_{\nu_r+j} B \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1}) q) + \mathcal{P}_-(\tau_j - B g).$$

Поскольку первое слагаемое равно $\mathcal{P}_-(\tau_j - U_{j^++\nu_r} q)$, обозначив $h = \tau_{\nu_r+j^+} q$, получим $K_j q = \mathcal{P}_-(\tau_j - U h) + H_j^+ q$. Разлагая вектор-функцию $K_j q$ в окрестности $z = \infty$,

получим, что

$$(K_j q)(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m \left(\sum_{k=0}^{\nu_r+j^+-1} (\langle U \rangle_{m-k-j^-} \langle h \rangle_k + \langle B \rangle_{m-k-j^-} \langle g \rangle_k) \right).$$

Отсюда, пользуясь соотношениями (2.4), (2.6), получим, что условие $K_j f = 0$ эквивалентно выполнению следующей системы равенств:

$$\sum_{k=0}^{\nu_r+j^+-1} (\langle U \rangle_{m-k-j^-} \langle h \rangle_k + \langle B \rangle_{m-k-j^-} \langle g \rangle_k) = 0, \quad m = -1, \dots, \mu_\ell - j^-. \quad (3.9)$$

Разлагая $\mathcal{P}(\tau_{j+1} A^{-1})$ в степенной ряд в окрестности нуля и пользуясь (3.9), несложно убедиться, что

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\nu_r+j^+-2} z^k \sum_{s=k-j^+-\nu_r+1}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{k-s-j^+} \langle q \rangle_s.$$

Осталось подставить в (3.9) значения $\langle g \rangle_k$ и $\langle h \rangle_k = \langle q \rangle_{k-j^+-\nu_r}$. Лемма доказана.

4. Описания ядер теплицевых операторов. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. *Справедливы равенства*

$$N_j = \tau_{j^-} B H_j^-(\ker K_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in H_j^-(\ker K_j)$. Тогда существует вектор-функция $\psi \in \ker K_j$ такая, что $\varphi = H_j^- \psi$. Следовательно, $H_j^+ \varphi = K_j \psi = 0$, т.е.

$$\varphi \in \ker(H_j^+|_{\operatorname{im} H_j^-}).$$

Пусть теперь $\varphi \in \ker(H_j^+|_{\operatorname{im} H_j^-})$. В частности, $\varphi \in \operatorname{im} H_j^-$ и в силу следствия 3.1 существует $\psi \in \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$ такая, что $\varphi = H_j^- \psi$. Поскольку $0 = H_j^+ \varphi = K_j \psi$, то $\psi \in \ker K_j$, а $\varphi \in H_j^-(\ker K_j)$. Таким образом,

$$H_j^-(\ker K_j) = \ker(H_j^+|_{\operatorname{im} H_j^-}) \quad (4.2)$$

и для доказательства леммы следует убедиться, что вектор-функция $\varphi \in (L_p^+)^n$ принадлежит N_j тогда и только тогда, когда вектор-функция $\varphi_0 = \tau_{-j^-} B^{-1} \varphi$ принадлежит пространству $\ker(H_j^+|_{\operatorname{im} H_j^-})$.

Пусть $\varphi \in N_j$. Тогда $f = \tau_{-j} A B^{-1} \varphi \in (\mathring{L}_p^-)^n$ и $\varphi_0 = \tau_{-j^-} B \varphi = \tau_{j^+} A^{-1} f$. Из условий $B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}$ и $\varphi \in (L_p^+)^n$ следует, что $\varphi_0 \in (L_1^+)^n$, а потому

$$\varphi_0 = \mathcal{P}_+ \varphi_0 = H_j^- f.$$

Кроме того, $H_j^+ \varphi_0 = \mathcal{P}_- \varphi_0 = 0$. Таким образом, $\varphi_0 \in \ker(H_j^+|_{\operatorname{im} H_j^-})$.

Предположим теперь обратное. Пусть $\varphi \in (L_p^+)^n$, и пусть $\varphi_0 = \tau_{-j} B^{-1} \varphi \in \ker(H_j^+|_{\text{im } H_j^-})$. Так как $\varphi_0 \in \text{im } H_j^-$, в силу следствия 3.1 существует $f \in \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$ такая, что $\varphi_0 = H_j^- f$. Следовательно,

$$\varphi_0 = \tau_{-j} B^{-1} \varphi = H_j^- f = \tau_{j+} A^{-1} f - \mathcal{P}_-(\tau_{j+} A^{-1} \varphi)$$

и потому $\tau_{-j} G \varphi = f - \tau_{j+} A \mathcal{P}_-(\tau_{j+} A^{-1} f)$. Но

$$\mathcal{P}_-(\tau_{j+} A^{-1} f) = H_j^- f \in (\mathring{R}_p)^n \quad \text{и} \quad \tau_{-j} G \varphi \in (\mathring{L}_p^-)^n,$$

т.е. $\varphi \in N_j$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Справедливы равенства*

$$\dim \text{im } H_j^- = nj^+ + \chi_-, \quad \dim \text{im } H_0^+ = \chi_+, \quad \dim N_j = \chi_- + nj^+ - \dim \text{im } K_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $B = I_n$ и $j \geq 0$. Поскольку в этом случае $H_j^+ = H_0^+$ является нулевым оператором, то $\ker(H_j^+|_{\text{im } H_j^-}) = \text{im } H_j^-$. Из (4.1) и (4.2) следует, что $\dim \text{im } H_j^- = \dim N_j$. Так как в этом случае $G = A \in (L_p^-)^{n \times n}$, частные индексы G не положительны, а суммарный индекс $\varkappa$ равен $-\chi_-$ (см. [3; теорема 2.7]). Из формулы (1.1) следует, что при $j \geq 0$

$$\dim H_j^- = \dim N_j = nj - \varkappa = nj + \chi_-.$$

Для доказательства первого равенства (4.3) остается заметить, что $H_j^- = H_0^-$ при $j < 0$.

Рассмотрим теперь случай $A = I_n$ и $j = \max\{\varkappa_n, \mu_r\}$. Очевидно, что $H_j^+ = H_0^+$ и $\text{im } H_j^- = \mathcal{L}_j$. В силу равенств (4.1), (4.2) и второго равенства (3.1)

$$\dim N_j = \dim \ker(H_0^+|_{\mathcal{L}_j}) = nj - \dim \text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_j}) = nj - \dim \text{im } H_0^+.$$

Так как в рассматриваемом случае $G = B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}$, частные индексы неотрицательны и суммарный индекс $\varkappa$ равен χ_+ (см. [3; теорема 2.6]). Из формулы (1.1) следует, что $nj - \chi_+ = nj - \dim \text{im } H_0^+$, т.е. $\dim \text{im } H_0^+ = \chi_+$.

Докажем теперь третье равенство (4.3). Из (4.1), (4.2) и первого равенства (4.3) следует, что

$$\dim N_j = \dim \ker(H_j^+|_{\text{im } H_j^-}) = \dim H_j^- - \dim \text{im}(H_j^+|_{\text{im } H_j^-}) = \chi_- + nj^+ - \dim \text{im } K_j.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Если $j \geq \mu_r$, то*

$$\dim N_j = \chi_- - \chi_+ + nj. \quad (4.4)$$

Если же $j \leq -\nu_\ell$, то $\dim N_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $j \geq 0$ и $q \in \mathcal{L}_j$. Тогда $\tau_{-j}Aq \in (\mathring{L}_p^-)^n$ и $H_j^- \varphi = q$. Следовательно, $\mathcal{L}_j \subset \text{im } H_j^-$. Взяв теперь $j \geq \mu_r$ и пользуясь следствием 3.1, получим

$$\text{im } H_j^+ \supset \text{im } K_j = \text{im}(H_j^+|_{\text{im } H_j^-|_{\mathcal{L}_{-(\nu_r+j+)}}}) = \text{im}(H_j^+|_{\text{im } H_j^-}) \supset \text{im}(H_0^+|_{\mathcal{L}_{\mu_r}}) = \text{im } H_0^+.$$

Таким образом, $\text{im } H_0^+ = \text{im } K_j$ при $j \geq \mu_r$ и формула (4.4) следует из третьей формулы (4.3).

Пусть теперь $j \leq -\nu_\ell^-$ и ψ — произвольная вектор-функция из N_j . В силу леммы 4.1 существует $q \in \ker K_j$ такая, что $\psi = \tau_j B H_0^- q$. Обозначим $\varphi = H_0^- q$. Из $B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}$, $\psi \in (L_p^+)^n$ и $\varphi = \tau_{-j} B^{-1} \psi$ следует, что

$$\langle \varphi \rangle_0 = \dots = \langle \varphi \rangle_{-j-1} = 0.$$

Поскольку в окрестности $z = 0$ имеет место представление

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{m+k} \langle q \rangle_{-k},$$

то

$$\sum_{k=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{m+k} \langle q \rangle_{-k}, \quad m = 0, \dots, -j-1.$$

Из этих равенств и соотношений (2.2) при $\nu = \nu_\ell$ следует, что

$$\langle \varphi \rangle_{-j} = \sum_{m=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{-j+m} \langle q \rangle_{-m} = - \sum_{k=1}^{\nu_\ell} Q_k^\ell \sum_{m=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{-j-k+m} \langle q \rangle_{-m} = 0.$$

Применяя аналогичные рассуждения, последовательно получим, что

$$\langle \varphi \rangle_{-j+1} = \langle \varphi \rangle_{-j+2} = \dots = 0,$$

т.е. $\varphi = 0$, а следовательно, и $\psi = 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Частные индексы матрицы-функции G удовлетворяют неравенствам $-\nu_\ell \leq \kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n \leq \mu_r$, а суммарный индекс $\varkappa$ равен $\chi_+ - \chi_-$.

Неравенства являются непосредственным следствием (1.3) и (1.4). Из формулы (1.1) следует, что $\dim N_j = n_j - \varkappa$ для $j \geq \kappa_n$. Сравнивая это равенство с (4.4), получим формулу для суммарного индекса. Заметим, что эта формула ранее была получена в [3] (см. [3; теорема 2.10]).

5. Основные результаты. Заметим, что в случае $\nu_\ell = \mu_r = 0$ частные индексы матрицы-функции G равны нулю, а представление $G = AB$ является ее факторизацией.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\nu_\ell + \mu_r > 0$. Тогда частные индексы матрицы-функции G могут быть вычислены по формулам

$$\kappa_i = -\nu_\ell + \text{card}\{j \mid n\theta_j + r_{j-1} - r_j < i, j = -\nu_\ell + 1, \dots, \mu_r\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где $\theta_j = \text{sgn}(j + |j|)$, $r_{-\nu_\ell} = \chi_-$, $r_0 = 0$, если $\mu_r = 0$, и $r_j = \text{rang } K_j$, если $\mu_r - j^- > 0$ и одновременно $-\nu_\ell < j \leq \mu_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-\nu_\ell < j \leq \mu_r$ и $\mu_r - j^- > 0$. Поскольку в этом случае $\dim \operatorname{im} K_j = r_j$, из леммы 4.2 следует, что

$$\dim N_j = \chi_- + nj^+ - r_j. \quad (5.2)$$

В силу определения числа $r_{-\nu_\ell}$ формула (5.2) остается справедливой и в случае $j = -\nu_\ell$. Осталось рассмотреть случай $\mu_r - j^- = 0$. Поскольку $j \leq \mu_r$, в этом случае $\mu_r = j = 0$, а оператор K_0 является нулевым. В силу леммы 4.3 $\dim N_0 = \chi_-$. Из определения числа r_0 в случае $\mu_r = 0$ получим, что формула (5.2) справедлива и в этом случае. Из (5.2) следует, что

$$\dim N_j - \dim N_{j-1} = n\theta_j + r_{j-1} - r_j.$$

Остается воспользоваться следствием 4.1 и применить формулу (1.5). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 остается справедливым, если в ее условии и в формулах (2.5), (3.5)–(3.8) заменить числа $\nu_r, \nu_\ell, \mu_r, \mu_\ell$ на произвольные числа $\nu'_r, \nu'_\ell, \mu'_r, \mu'_\ell$, удовлетворяющие неравенствам $\nu'_r \geq \nu_r, \nu'_\ell \geq \nu_\ell, \mu'_r \geq \mu_r, \mu'_\ell \geq \mu_\ell$.

Например, в случае замены на числа $\nu'_r = \nu'_\ell = \chi_-, \mu'_r = \mu'_\ell = \chi_+$. Однако следует учесть, что при такой замене может существенно увеличиться как количество рассматриваемых матриц, так и их размеры. Действительно, не останавливаясь на доказательстве, заметим, что справедливы неравенства $\max\{\nu_r, \nu_\ell\} \leq \chi_- \leq n \min\{\nu_r, \nu_\ell\}$, $\max\{\mu_r, \mu_\ell\} \leq \chi_+ \leq n \min\{\mu_r, \mu_\ell\}$ и несложно строить примеры, когда $\chi_- = n\nu_r = n\nu_\ell, \chi_+ = n\mu_r = n\mu_\ell$.

Для построения факторов G_+, G_- необходимо описать пространства N_j^0 .

Пусть $j > -\nu_\ell$. Очевидно, что $\nu_r + j^+ > 0$. В случае $\mu_\ell - j^- = 0$ оператор K_j является нулевым с областью определения $\mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$. Поэтому для сохранения утверждения леммы 3.2 и в этом случае далее нам удобно формально считать, что $\ker K_j$ совпадает с пространством $\mathbb{C}^{n(\nu_r+j)}$, несмотря на то, что матрицы $\mathcal{K}_j$ в этом случае не определены.

Пусть функция $\det B^{-1}$ имеет в $z = 0$ нуль порядка m_0 . Матрица-функция B в некоторой окрестности нуля допускает разложения в степенной ряд

$$B(z) = \sum_{k=-m_0}^{\infty} b_k z^k. \quad (5.3)$$

Определим матрицы $V_{j,s}$, $j = -\nu_\ell + 1, \dots, \mu_r + 1$, $s = -(\nu_r + j^+), \dots, -1$, порядка $n \times n$ и матрицы W_j , $j = -\nu_\ell + 1, \dots, \mu_r^+ + 1$, порядка $n \times n(\nu_r + j^+)$ следующими формулами:

$$V_{j,s} = \sum_{m=0}^{m_0-j^-} b_{-m-j^-} \langle A^{-1} \rangle_{m-s-j^+}, \quad (5.4)$$

$$W_j = [V_{j,-(\nu_r+j^+)}, V_{j,-(\nu_r+j^+)+1}, \dots, V_{j,-1}]. \quad (5.5)$$

ЛЕММА 5.1. Для $j > -\nu_\ell$ справедливы равенства

$$N_j^0 = \operatorname{im}(W_j|_{\ker \mathcal{K}_j}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 4.1 и 3.2 вектор-функция $\varphi \in (L_p^+)^n$ принадлежит N_j тогда и только тогда, когда допускает представление $\varphi = \tau_{j-} B\mathcal{P}_+(\tau_{j+} Aq)$, где $q \in \mathcal{L}_{-(\nu_r+j^+)}$, а вектор $(\langle q \rangle_{-(\nu_r+j^+)}^T, \dots, \langle q \rangle_{-1}^T)^T$ принадлежит $\ker \mathcal{K}_j$.

Разлагая вектор-функцию $\mathcal{P}_+(\tau_{j+} A^{-1}q)$ в степенной ряд в окрестности нуля

$$(\mathcal{P}_+(\tau_{j+} A^{-1}q))(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-(\nu_r+j^+)}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k-j} q_k \right) z^k$$

и пользуясь (5.3), нетрудно убедиться, что вектор-функция $\varphi \in N_j$ в окрестности нуля допускает представление

$$\varphi(z) = \sum_{k=j^- - m_0}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

где

$$\varphi_k = \sum_{s=-(\nu_r+j^+)}^{-1} \left(\sum_{m=0}^{k+m_0-j^-} b_{k-m-j^-} \langle A^{-1} \rangle_{m-s-j^+} \right) \langle q \rangle_s,$$

$k = j^- - m_0, j^- - m_0 + 1, \dots$. Поскольку функция φ аналитична в нуле, то $\varphi_{j^- - m_0} = \varphi_{j^- - m_0 + 1} = \dots = \varphi_{-1} = 0$, а

$$\varphi(0) = \sum_{s=-(\nu_r+j^+)}^{-1} V_{j,s} \langle q \rangle_s.$$

Лемма доказана.

В силу свойств пространств N_j^0 существуют векторы $\xi_i \in \ker \mathcal{K}_{\varkappa_i+1}$, $i = 1, \dots, n$, такие, что система векторов $W_{\varkappa_1+1}\xi_1, \dots, W_{\varkappa_n+1}\xi_n$ линейно независима. Из леммы 1.1 следует справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть числа $\varkappa_1 \leq \dots \leq \varkappa_n$ являются частными индексами матрицы-функции G , а векторы

$$\xi_i = (q_{i,-(\nu_r+(\varkappa_i+1)^+)}^T, \dots, q_{i,-1}^T)^T \in \ker \mathcal{K}_{\varkappa_i+1},$$

$q_{i,k} \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, \dots, n$, $k = -(\nu_r + (\varkappa_k + 1)^+), \dots, -1$, таковы, что система векторов $W_{\varkappa_1+1}\xi_1, \dots, W_{\varkappa_n+1}\xi_n$ линейно независима. Тогда если

$$q_i(z) = \sum_{k=-(\nu_r^+ + (\varkappa_i+1)^+)}^{-1} q_{ik} z^k, \quad \varphi_i = \tau_{(\varkappa_i+1)-} B\mathcal{P}_+(\tau_{(\varkappa_i+1)+} A^{-1}q_i),$$

где $i = 1, \dots, n$, и $G_+ = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ — матрица-функция со столбцами, равными $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\Lambda = \text{diag}[\tau_{\varkappa_1}, \dots, \tau_{\varkappa_n}]$, а $G_- = GG_+ \Lambda^{-1}$, то представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является факторизацией матрицы-функции G в пространстве L_p .

Таким образом, если частные индексы матрицы-функции известны и принимают значения $\eta_1 < \dots < \eta_\ell$, то построение фактора G_+ сводится к описанию пространств

$\ker \mathcal{K}_{\eta_1+1}, \dots, \ker \mathcal{K}_{\eta_s+1}$ и $\text{im}(W_{\eta_1+1}|_{\ker \mathcal{K}_{\eta_1+1}}), \dots, \text{im}(W_{\eta_s+1}|_{\ker \mathcal{K}_{\eta_s+1}})$. Точнее, необходимо найти базисы пространств $\mathcal{M}_k^0$, $k = 1, \dots, s$, определяемых следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \text{im}(W_{\eta_1+1}|_{\ker \mathcal{K}_{\eta_1+1}}), \\ \text{im}(W_{\eta_k}|_{\ker \mathcal{K}_{\eta_k}}) \dot{+} \mathcal{M}_k &= \text{im}(W_{\eta_k+1}|_{\ker \mathcal{K}_{\eta_k+1}}), \quad k = 2, \dots, s. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Наиболее простой вид матрицы $V_{j,s}$ и W_j принимают в случае, когда B^{-1} аналитична в нуле. Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$W_j = \langle B \rangle_0 \langle \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r^- - j}, \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r^- - j - 1}, \dots, \langle A^{-1} \rangle_{1-j} \rangle, \quad (5.6)$$

причем матрица $\langle B \rangle_0 = b_0 = B(0)$ обратима и потому в условии теоремы 5.2 естественно требовать линейную независимость векторов $\langle B_0 \rangle^{-1} W_{\varkappa_i} \xi_i$, $i = 1, \dots, n$.

Вообще говоря, условие обратимости $B^{-1}(0)$ можно требовать без потери общности. Действительно, выбрав z_0 так, чтобы $-z_0 \in \Omega_+ \setminus \{z_1^+, \dots, z_{\ell_+}^+\}$, мы можем перейти к контуру $\tilde{\Gamma} = \Gamma + z_0$, к областям $\tilde{\Omega}_{\pm} = \Omega_{\pm} + z_0$ и к матрицам-функциям

$$\tilde{G}(z) = G(z - z_0), \quad \tilde{A}(z) = A(z - z_0), \quad \tilde{B}^{-1}(z) = B^{-1}(z - z_0).$$

Очевидно, $0 \in \tilde{\Omega}_+$, матрица $\tilde{B}^{-1}(0) = B^{-1}(z_0)$ обратима и $\tilde{G} = \tilde{A}\tilde{B}^{-1}$. Если представление $\tilde{G} = \tilde{G}_- \tilde{\Lambda} \tilde{G}_+^{-1}$ с $\tilde{\Lambda} = \text{diag}[\tau_{\varkappa_1}, \dots, \tau_{\varkappa_n}]$ является факторизацией $\tilde{G}$ в $L_p(\tilde{\Gamma})$, то взяв

$$\begin{aligned} G_-(z) &= \tilde{G}_-(z + z_0) \text{diag}[(z + z_0)^{\varkappa_1} z^{-\varkappa_1}, \dots, (z + z_0)^{\varkappa_n} z^{-\varkappa_n}], \\ G_+^{-1}(z) &= \tilde{G}_+^{-1}(z + z_0), \quad \Lambda(z) = \text{diag}[z^{\varkappa_1}, \dots, z^{\varkappa_n}], \end{aligned}$$

получим, что представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является факторизацией G в L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Матрицу-функцию $G' = A'B'$, где

$$A' \in (M_p^-)^{n \times n}, \quad B' \in (M_p^+)^{n \times n}, \quad (A')^{-1} \in (M_q^-)^{n \times n}, \quad (B')^{-1} \in (M_q^+),$$

несложно представить в виде $G' = \omega G$, где ω – рациональная функция, полюсы и нули которой находятся вне контура Γ , а G удовлетворяет условиям (0.2), (0.3). Если представление (0.1) является факторизацией G в пространстве L_p , $\omega = \omega_- \tau_{\varkappa_0} \omega_+^{-1}$ – факторизацией функции ω , а $\Lambda' = \text{diag}[\tau_{\varkappa_1 + \varkappa_0}, \dots, \tau_{\varkappa_n + \varkappa_0}]$, то представление $G' = (\omega_- G_-) \Lambda' (\omega_+ G_+)^{-1}$ является факторизацией G' в L_p .

6. Приложения.

6.1. Рассмотрим случай $A = I_n$, т.е. $G = B^{-1}$. В этом случае $\chi_- = \nu_{\ell} = \nu_r = 0$, $U = \mathcal{P}_-(B)$. Случай $\mu_r = \mu_{\ell} = 0$ тривиален. Будем предполагать, что $\mu_{\ell} > 0$ и $B^{-1}(0)$ – обратимая матрица. Следовательно, и $\mu_r > 0$, а в силу (5.6)

$$W_j = [\langle B \rangle_0, 0, \dots, 0] \in C^{n \times nj}.$$

Для $j \in \mathbb{N}$ матрицы $\mathcal{K}_j$ совпадают с $\mathcal{B}_j$, которые в данном случае имеют вид

$$\mathcal{B}_j = \begin{bmatrix} \langle B \rangle_{-1} & \langle B \rangle_{-2} & \dots & \langle B \rangle_{-j} \\ \langle B \rangle_{-2} & \langle B \rangle_{-3} & \dots & \langle B \rangle_{-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle B \rangle_{-\mu_{\ell}} & \langle B \rangle_{-\mu_{\ell}-1} & \dots & \langle B \rangle_{-\mu_{\ell}-j+1} \end{bmatrix}.$$

В данном случае теоремы 5.1 и 5.2 допускают более простую формулировку.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $B^{-1} \in (L_q^+)^{n \times n}$, $B \in (M_p^+)^{n \times n}$, $\mu_\ell > 0$ и $B^{-1}(0)$ обратимая матрица. Тогда частные индексы факторизуемой в L_p матрицы-функции B^{-1} могут быть вычислены по формулам

$$\varkappa_i = \text{card}\{j \mid n + r_{j-1} - r_j < i, j = 1, \dots, \mu_r\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

где $r_0 = 0$, $r_j = \text{rang } \mathcal{B}_j$, $j = 1, \dots, \mu_r$.

Кроме того, существуют векторы

$$\xi_i = (q_{i,0}^T, \dots, q_{i,\varkappa_i}^T)^T \in \ker \mathcal{B}_{\varkappa_i+1}, \quad q_{i,0}, \dots, q_{i,\varkappa_i} \in \mathbb{C}^n,$$

такие, что система векторов $q_{1,0}, \dots, q_{n,0}$ линейно независима в $\mathbb{C}^n$. Если

$$q_i(z) = \sum_{k=0}^{\varkappa_i} q_{ik} z^k, \quad \varphi_i = B q_i,$$

где $i = 1, \dots, n$, и $B_+ = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ – матрица-функция со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\Lambda = \text{diag}[\tau_{\varkappa_1}, \dots, \tau_{\varkappa_n}]$, а $B_- = B^{-1} B_+ \Lambda^{-1}$, то представление $B^{-1} = B_- \Lambda B_+^{-1}$ является факторизацией матрицы-функции B^{-1} в пространстве L_p .

Заметим, что формула (6.1) ранее была получена в [14], но приведенная здесь схема построения фактора G_+ отличается от предложенной в [14].

6.2. Рассмотрим случай $B = I_n$, т.е. $G = A$. В этом случае $\chi_+ = \mu_\ell = \mu_r = 0$, $U = \mathcal{P}_+(\tau_{-\nu_r} A^{-1})$. Поскольку случай $\nu_\ell = \nu_r = 0$ тривиален, будем предполагать, что $\nu_\ell > 0$ (а следовательно, и $\nu_r > 0$). Пользуясь равенствами $\langle U \rangle_k = 0$ при $k < 0$ и $\langle U \rangle_k = \langle A^{-1} \rangle_{k+\nu_r}$ при $k \geq 0$, несложно убедиться, что в данном случае

$$\mathcal{K}_j = \begin{pmatrix} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j-1} & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j-2} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{-j} \\ \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j-2} & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j-3} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r} & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-1} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_1 \end{pmatrix}, \quad j = -1, -2, \dots,$$

а

$$W_j = (\langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j}, \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-j-1}, \dots, \langle A^{-1} \rangle_{-j+1}), \quad j = 0, -1, -2, \dots, \\ W_1 = (\langle A^{-1} \rangle_{\nu_r}, \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r-1}, \dots, \langle A^{-1} \rangle_0).$$

Кроме того, как уже договаривались, будем считать $\ker \mathcal{K}_n = \mathbb{C}^{n\nu_r}$, $\ker \mathcal{K}_1 = \mathbb{C}^{n(\nu_r+1)}$.

Не останавливаясь на переформулировке теорем 5.1 и 5.2, приведем лишь формулы для частных индексов матрицы-функции $\mathcal{A}$ (см. также [14]):

$$\varkappa_i = -\nu_\ell + \text{card}\{j \mid r_{j-1} - r_j < i, j = -\nu_\ell + 1, \dots, 0\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $r_{-\nu_\ell} = \chi_-$, $r_j = \text{rang } \mathcal{K}_j$ при $j = -\nu_{\ell+1}, \dots, -1$ и $r_0 = 0$.

6.3. Пусть Γ – карлесонов контур, $G_{11}, G_{12}, G_{22} \in L_\infty$, $p_- \in L_\infty^-$, $p_+ \in L_\infty^+$, q_- , q_+ – многочлены с нулями в Ω_+ и Ω_- соответственно, $\deg q_+ \leq n_0 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим матрицу-функцию второго порядка

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \frac{p_- \tau_{n_0}}{q_+} G_{11} + \frac{p_+}{q_-} G_{22} - \frac{p_- p_+}{q_+ q_-} \tau_{n_0} G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Определим функции

$$V_1 = (q_- G_{11} - p_+ G_{12}) \frac{\tau_{n_0}}{q_+ q_-}, \quad V_2 = (\tau_{-n_0} q_+ G_{22} - p_- G_{12}) \frac{\tau_{n_0}}{q_+ q_-}.$$

Будем предполагать, что $V_1^{-1}, V_2^{-1} \in L_\infty$, а V_i , $i = 1, 2$, допускают факторизацию в L_p : $V_i = V_i^- \tau_{\chi_i} (V_i^+)^{-1}$. Тогда треугольная матрица-функция

$$V = \begin{pmatrix} \tau_{-\chi_1} V_1 & \frac{\tau_{n_0-\chi_1} G_{12}}{q_+ q_-} \\ 0 & \tau_{-\chi_2} V_2 \end{pmatrix}$$

допускает L_p -факторизацию в $V = V_- V_+^{-1}$ (см. [3; секция 4.1]), где

$$V_- = \begin{pmatrix} V_1^- & V_{12}^- \\ 0 & V_2^- \end{pmatrix}, \quad V_+^{-1} = \begin{pmatrix} (V_1^+)^{-1} & V_{12}^+ \\ 0 & (V_2^+)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$V_i^- = \exp \mathcal{P}_-(\ln(\tau_{-\chi_i} V_i)), \quad (V_i^+)^{-1} = \exp \mathcal{P}_+(\ln(\tau_{-\chi_i} V_i)), \quad i = 1, 2,$$

$$V_{12}^+ = \frac{1}{V_2^+} \mathcal{P}_+ \left(\frac{\tau_{n_0-\chi_1} V_2^+ G_{12}}{V_1^- q_+ q_-} \right), \quad V_{12}^- = V_1^- \mathcal{P}_- \left(\frac{\tau_{n_0-\chi_1} V_2^+ G_{12}}{V_1^- q_+ q_-} \right).$$

Нетрудно убедиться, что $G = AB$, где

$$A = \tau_{\chi_0}^- \begin{pmatrix} \frac{q_+}{\tau_N} & 0 \\ p_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{\chi_1-\chi_2} & 0 \\ 0 & \tau_{\chi_2-\chi_1} \end{pmatrix} V_-, \quad B = \tau_{\chi_0}^+ V_+^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_+ & q_- \end{pmatrix},$$

где $\chi_0 = \max\{\chi_1, \chi_2\}$. Таким образом, матрицы-функции вида (6.1) допускают явное представление в виде (0.2), (0.3) и к ним применимы теоремы 5.1, 5.2.

Отметим, что задаче эффективной факторизации матриц-функций, допускающих представление (6.1) (либо сводящихся к таковым), посвящено большое количество работ (см., например, [18]–[23]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [2] Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон, “Классы аналитических функций в многосвязных областях”, *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного*, Физматгиз, М., 1960, 45–77.
- [3] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, *Factorization of Measurable Matrix Functions*, Oper. Theory: Adv. Appl., **25**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.
- [4] Ф. Д. Гахов, “Краевая задача Римана для системы n пар функций”, *УМН*, **7:4** (50) (1952), 3–54.
- [5] И. М. Спитковский, “Факторизация измеримых матриц-функций. Связанные с ней вопросы теории систем сингулярных интегральных уравнений и векторной краевой задачи Римана. Г”, *Дифференц. уравнения*, **17:4** (1981), 697–709.
- [6] А. Г. Камалян, “Некоторые свойства ядер теплицевых операторов”, *Докл. НАН РА*, **107:4** (2007), 316–322.
- [7] А. Г. Камалян, “Индексная факторизация матриц-функций”, *Докл. НАН РА*, **108:1** (2008), 5–11.

- [8] I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, “Factorization indices for matrix polynomials”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1978), 275–277.
- [9] В. М. Адуков, “Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций”, *Алгебра и анализ*, **4**:1 (1992), 54–74.
- [10] А. Г. Камалян, “Явная обобщенная факторизация ограниченных голоморфных матриц-функций”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **32**:2 (1997), 19–38.
- [11] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*, Progr. Math., **154**, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [12] В. М. Адуков, “О точном и приближенном решении задачи факторизации Винера–Хопфа для мероморфных матриц-функций”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем., физ., хим.*, **10**:7 (2008), 3–12.
- [13] В. М. Адуков, “Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 3–24.
- [14] Р. А. Амирджанян, А. Г. Камалян, “Факторизация мероморфных матриц-функций”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **42**:6 (2007), 31–50.
- [15] А. Г. Камалян, А. В. Саргсян, “О частных индексах одного класса матриц-функций второго порядка”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **42**:3 (2007), 39–48.
- [16] А. Г. Камалян, А. В. Саргсян, “Разрешимость некоторых интегральных уравнений на окружности со сдвигом”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **46**:3 (2011), 29–46.
- [17] А. Г. Камалян, А. Г. Степанян, Г. М. Топикян, “Интегральные уравнения с ядром Гильберта”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **47**:2 (2012), 31–44.
- [18] В. Н. Гавдзинский, И. М. Спитковский, “Об одном способе эффективного построения факторизации”, *Укр. матем. журн.*, **34**:1 (1982), 15–19.
- [19] A. V. Lebre, “Factorization in the Wiener algebra of a class of 2×2 matrix functions”, *Integral Equations Operator Theory*, **12**:3 (1989), 408–423.
- [20] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, “A method of explicit factorization of matrix functions and applications”, **18**:3 (1994), 277–302.
- [21] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, “An explicit factorization algorithm”, *Integral Equations Operator Theory*, **49**:2 (2004), 149–164.
- [22] В. М. Адуков, “О классах матриц-функций, допускающих явное решение задачи факторизации Винера–Хопфа”, *Изв. Челябинск. научн. центра*, **41**:3 (41) (2008), 12–17.
- [23] С. Н. Киясов, “Некоторые случаи эффективной факторизации матриц-функций второго порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 6, 36–43.

А. Г. Камалян

Ереванский государственный университет, Армения;

Институт математики НАН Армении

E-mail: kamalyan_armen@yahoo.com

Поступило

04.09.2015