Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Подъяпольский, Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:23:31

СУММИРУЕМОСТЬ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Подъяпольский

Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями в виде интегралов Стильеса рассматривались в работах М. Пиконе [1], А. Краля [2], В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [3], А. А. Шкаликова [4] и др. При исследовании обычно предполагалось, что интеграл содержит атомарную меру на концах интервала. Примененные в рабо-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00-82

те А. Л. Скубачевского и Г. М. Стеблова [5] методы нелокальных эллиптических задач позволяют отказаться от подобных ограничений. Далее полученные результаты были усилены в работе А. Л. Скубачевского и Е. И. Галахова [6]. В предлагаемой статье рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями без атомарности меры на концах интервала, приведен результат о суммируемости по Абелю системы корневых функций.

Рассмотрим уравнение

$$-a_0(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) = f_0(t) \quad (t \in (0, 1)) \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$B_j u = \int_0^1 \varphi_j(t)u(t) dt = f_j \quad (j = 1, 2), \quad (2)$$

где a_i ($i = 0, 1, 2$) – вещественнозначные функции такие, что $a_0(t) \geq k > 0$ ($0 \leq t \leq 1$) и $a_1, a_2 \in C[0, 1]$, $f_0 \in L_2(0, 1)$ – комплекснозначные функции, f_j ($j = 1, 2$) – константы и φ_j – линейно независимые вещественнозначные функции.

Введем некоторые обозначения, которые нам потребуются для описания a_0 и φ_j . Обозначим через $C^{0,\alpha}[a, b]$ пространство Гёльдера непрерывных функций и через $W^{1,\infty}(a, b)$ пространство абсолютно непрерывных функций $u(t)$, $t \in [a, b]$, таких, что $u' \in L_\infty(a, b)$. Введем следующие пространства: $C_\beta^{0,\alpha}[0, 1] = \{u \in L_2(0, 1) : u \in C^{0,\alpha}[0, \beta] \cap C^{0,\alpha}[1 - \beta, 1]\}$ и $W_\beta^{1,\infty}(0, 1) = \{u \in C[0, 1] : u \in W^{1,\infty}(0, \beta) \cap W^{1,\infty}(1 - \beta, 1)\}$, где $0 < \beta < 1/2$.

Потребуем, чтобы $a_0 \in W_\beta^{1,\infty}(0, 1)$, $\varphi_j \in C_\beta^{0,\alpha}[0, 1]$ ($1/2 < \alpha \leq 1$) и $\Delta_\varphi = \varphi_1(0)\varphi_2(1) - \varphi_1(1)\varphi_2(0) \neq 0$.

Через $W^m(0, 1)$ обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$ с абсолютно непрерывными производными до порядка $m - 1$ и производной m -го порядка из $L_2(0, 1)$. Норма в $W^m(0, 1)$ имеет вид:

$$\|u\|_{W^m(0,1)} = \left\{ \sum_{j=0}^m \int_0^1 |u^{(j)}(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}$, действующий в $L_2(0, 1)$ по формуле $\mathcal{A}u = Au$ ($u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in W^2(0, 1) : B_j u = 0, j = 1, 2\}$).

Нетрудно заметить, что оператор $\mathcal{A}$ не является плотно определенным в $L_2(0, 1)$.

В работе [6] показано, что при $\Delta_\varphi \neq 0$ оператор $\mathcal{A}$ имеет дискретный спектр. Резольвента оператора $\mathcal{A}$

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$$

может быть оценена сверху на любом луче $\arg \lambda \neq 0$. Из теоремы 2.2 [6] следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\Delta_\varphi \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $\lambda : |\arg \lambda| > \varepsilon$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| = O(|\lambda|^{-\frac{3}{4}}). \quad (3)$$

Пусть выполнено условие утверждения 1. Обозначим через λ_k собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Пусть z_0 – некоторая фиксированная точка в резольвентном множестве оператора $\mathcal{A}$. Введем вполне непрерывный в $L_2(0, 1)$ оператор

$$T = (\mathcal{A} - z_0 I)^{-1}$$

с собственными значениями $\mu_k = 1/(\lambda_k - z_0)$. Резольвенты операторов $\mathcal{A}$ и T связаны следующим образом:

$$R\left(\frac{1}{\lambda - z_0}, T\right) = (\lambda - z_0)I - (\lambda - z_0)^2 R(\lambda, \mathcal{A}), \quad \lambda \neq \lambda_k. \quad (4)$$

Используя теорему А1.1 [7], получаем следующее важное свойство оператора T .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\Delta_\varphi \neq 0$. Тогда для любого $\varkappa > 0$

$$\|C(\lambda)R(\lambda, T)\| \leq \exp(|\lambda|^{-1/2-\varkappa}),$$

где $C(\lambda)$ – целая функция по переменной $1/\lambda$ порядка не выше $1/2$.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Поэтому возьмем $z_0 = 0$. Из (3) и (4) следует оценка нормы оператора $(I - \lambda T)^{-1}$ на некоторых лучах.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\Delta_\varphi \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $\lambda : |\arg \lambda| > \varepsilon$ выполнена оценка

$$\|(I - \lambda T)^{-1}\| = O(|\lambda|^{\frac{1}{4}}).$$

В силу теоремы 2.2 [6] для любого $\varepsilon > 0$ найдется $q(\varepsilon)$ такое, что спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varepsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < q(\varepsilon)\}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в угле $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varepsilon\}$.

Выбирая в каждом корневом подпространстве жорданов базис, получим систему векторов $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$). В [8, гл. II, § 4] показано, что найдется система векторов $\{g_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$), биортогональная к системе $\{e_i\}$.

Пусть $f \in L_2(0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_s c_s(t) e_s. \quad (5)$$

Здесь $c_s(t)$ зависят от t и определяются следующим образом. Если e_s – собственный вектор T , соответствующий характеристическому числу λ_p , не имеет присоединенных, то

$$c_s(t) = e^{-\lambda_p^\delta t} c_s,$$

где $\lambda^\delta = |\lambda|^\delta e^{\delta i \arg \lambda}$, $\delta > 0$, c_s – коэффициент формального разложения вектора f по системе $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Если же $e_s, \dots, e_{s+j}$ образуют жорданову цепочку, то $c_{s+i}(t)$ ($i = 0, \dots, j$) – коэффициенты разложения вычета подынтегральной функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} e^{-\lambda^\delta t} T(I - \lambda T)^{-1} f d\lambda$$

по векторам $e_s, \dots, e_{s+j}$, где γ_p – замкнутый контур, охватывающий только λ_p . Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ряд (5), соответствующий f , суммируем к f по методу Абеля порядка δ , если для этого ряда существует подпоследовательность частичных сумм S_{N_ν} , сходящаяся в $L_2(0, 1)$ при всех $t > 0$, такая, что

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} c_s(t) e_s \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = f.$$

После получения приведенных выше оценок становится возможным реализовать схему, предложенную в [8]. Отличие состоит в том, что вместо суммируемости характеристических чисел оператора T с некоторой степенью можно воспользоваться оценкой из утверждения 2 и оценки из утверждения 3 достаточно для равномерной сходимости по t интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\lambda^\delta t} T(I - \lambda T)^{-1} f d\lambda,$$

где γ – контур, охватывающий все характеристические значения оператора T . Таким образом, получаем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Delta_\varphi \neq 0$. Тогда для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ряд (5) по корневым функциям оператора $\mathcal{A}$ суммируем к f в $L_2(0, 1)$ по методу Абеля порядка δ , где $\delta > 1/2$.

Автор благодарит А. Л. Скубачевского за постановку задачи и внимание к работе, а также А. А. Шкаликова за обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Picone M. // Rend. Acad. Lincei. 1908. V. 17. P. 340–347.
2. Krall A. M. // Rocky Mountain J. Math. 1975. V. 5. № 4. P. 493–542.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795–804.
4. Шкаликов А. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
5. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.
6. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 25–32.
7. Лидский В. Б. // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 3–35.
8. Agmon S. // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.

Московский государственный авиационный институт

Поступило
18.11.98