Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Аминова, Д. А. Калинин, Алгебры Ли H -проективных движений келеровых многообразий постоянной голоморфной секционной кривизны, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 803–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:38:11

УДК 514.747

АЛГЕБРЫ ЛИ H -ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОСТОЯННОЙ ГОЛОМОРФНОЙ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ

А. В. Аминова, Д. А. Калинин

В статье рассматриваются алгебры Ли инфинитезимальных H -проективных преобразований $2n$ -мерных келеровых многообразий постоянной голоморфной секционной кривизны. Доказывается, что эти алгебры изоморфны оветествлению комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, и дается их локальная реализация в виде алгебр векторных полей на многообразии.

Библиография: 9 названий.

Келеровы многообразия играют существенную роль в различных областях математики и математической физики: теории динамических систем, алгебраической геометрии, геометрии многообразий Эйнштейна, квантовой механике, квантовой теории поля, теории относительности, теории суперструн и нелинейных сигма-моделей. Важным разделом келеровой геометрии является теория H -проективных отображений [1]. H -проективные отображения представляют собой частный случай почти геодезических отображений, которые в свою очередь обобщают геодезические отображения псевдоримановых многообразий [2]–[4]. Особый интерес представляет изучение H -проективных отображений келеровых многообразий постоянной голоморфной секционной кривизны, так как такие и только такие келеровы многообразия допускают H -проективные отображения на плоское пространство [4], [5]. Кроме того, келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны представляют интерес с точки зрения их приложений в теоретической физике [6], [7].

В данной статье рассматриваются алгебры Ли инфинитезимальных H -проективных (голоморфно-проективных) преобразований $2n$ -мерных келеровых многообразий постоянной голоморфной секционной кривизны. Доказывается, что такие алгебры изоморфны оветествлению комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Дается локальная реализация алгебр инфинитезимальных H -проективных преобразований в виде алгебр векторных полей на многообразии.

Напомним [8], что *эрмитовым многообразием* называется дифференцируемое многообразие M , на котором заданы псевдориманова метрика g и комплексная структура J , т.е. дифференцируемое поле операторов $J_p: T_p M \rightarrow T_p M$, $(J_p)^2 = -\text{id}_{T_p M}$, $p \in M$, для которого тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01031.

обращается в 0 для любых векторных полей X, Y на M . Антисимметричная билинейная форма, определенная равенством $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ для любых векторных полей X, Y на M , называется *фундаментальной 2-формой* эрмитова многообразия M . *Келеровым многообразием* называется эрмитово многообразие M , фундаментальная 2-форма ω которого замкнута: $d\omega = 0$. В комплексных координатах $z^\alpha, \bar{z}^\alpha$ на M компоненты келеровой метрики g имеют вид

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha\bar{\beta}}\Phi,$$

где Φ – вещественнозначная функция, называемая *келеровым потенциалом* метрики g .

Пусть M – келерово многообразие, π_p – неизотропная плоскость в касательном пространстве $T_p M$ к многообразию M в точке p , т.е. плоскость такая, что $g(X, X) \neq 0$ для любого ненулевого вектора $X \in \pi_p$. Предположим, что плоскость π_p инвариантна относительно действия оператора J , т.е. для любого вектора $X \in \pi_p$ вектор JX также принадлежит π_p . Величина

$$K(\pi_p) = R(X, JX, X, JX), \quad |g(X, X)| = 1,$$

где R – тензор кривизны келерова многообразия M , называется *голоморфной секционной кривизной* многообразия M в направлении π_p . Пользуясь свойствами тензора кривизны, можно показать [8], что голоморфная секционная кривизна $K(\pi_p)$ не зависит от выбора единичного вектора $X \in \pi_p$. Если величина $K(\pi_p)$ постоянна для всех $\pi_p \subset T_p M$ и не зависит от выбора точки $p \in M$, то M называется *многообразием постоянной голоморфной секционной кривизны*.

Гладкая кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow M: t \mapsto x_t$ на келеровом многообразии M называется *аналитически планарной кривой*, или *H -планарной кривой*, если она удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\chi \chi = a(t)\chi + b(t)J\chi, \quad \chi \equiv \frac{dx}{dt},$$

где $a(t), b(t)$ – гладкие функции параметра t и ∇ – риманова связность метрики g . Пусть (M, g, J) и (M', g', J') – два келеровых многообразия. Диффеоморфизм $f: M \rightarrow M'$ называется *голоморфно-проективным отображением*, или *H -проективным отображением*, если для любой H -планарной кривой γ в M кривая $f \circ \gamma$ является H -планарной кривой в M' .

Пусть M, M' – два келеровых многообразия и $f: M \rightarrow M'$ есть H -проективное отображение. Системы локальных координат (карт) (Ω, x) и $(f(\Omega), x')$ в M и M' называются *соответственными*, если координаты точек $p \in M$ и $f(p) \in M'$ совпадают в этих картах. Напомним, что по определению отображение $f: M \rightarrow M'$ сохраняет комплексную структуру J , если выполняется равенство $f_* \circ J = J' \circ f$, где f_* означает дифференциал отображения f . Поскольку любое H -проективное отображение сохраняет комплексную структуру [4], в M и M' можно ввести *соответственные комплексные координаты* $(\Omega, z), (f(\Omega), z')$.

Если келерово многообразие (M, g) с римановой связностью ∇ допускает H -проективное отображение на келерово многообразие (M', g') с римановой связностью ∇' , то говорят, что связности ∇, ∇' *H -проективно-эквивалентны*. Необходимое и достаточное условие H -проективной эквивалентности связностей ∇ и ∇' выражается в локальных координатах равенством

$$\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i = \rho_j \delta_k^i + \rho_k \delta_j^i - \rho_s J_j^s J_k^i - \rho_s J_k^s J_j^i, \quad (1)$$

где $\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk}'^i$ – коэффициенты связностей ∇ и ∇' , $\rho = \rho_i dx^i$ – некоторая замкнутая ($d\rho = 0$) 1-форма на M .

ТЕОРЕМА 1 [1], [5]. *Келерово многообразие M_{2n} является H -проективно-плоским, т.е. допускает H -проективное отображение на (плоское) келерово пространство $\mathbb{C}^n$, тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной голоморфной секционной кривизны.*

Пусть (M, g, J) – келерово многообразие. Вещественное голоморфное векторное поле X (т.е. векторное поле, обладающее свойством $L_X J = 0$) называется *инфинитезимальным H -проективным преобразованием*, или *H -проективным движением* в M , если в локальных координатах на M выполняется условие

$$L_X \Gamma_{jk}^i = \varphi_j \delta_k^i + \varphi_k \delta_j^i - \varphi_s J_j^s J_k^i - \varphi_s J_k^s J_j^i, \quad (2)$$

где L_X – производная Ли, а $\varphi = \varphi_i dx^i$ есть замкнутая вещественная 1-форма на M . Так как согласно лемме Пуанкаре [9] любая замкнутая дифференциальная форма локально точна, в окрестности каждой точки $p \in M$ существует функция ψ такая, что $\varphi = d\psi$; следовательно, локально $\varphi_i = \partial_i \psi$. Если $\varphi \equiv 0$, то H -проективное движение называется *аффинным движением* в M . В противном случае, т.е. при $\varphi \neq 0$, X называется *собственно H -проективным движением* в M .

ТЕОРЕМА 2. *Для любых двух H -проективных движений $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$ в келеровом многообразии (M, g, J) их скобка Ли $X = [X_{(1)}, X_{(2)}] = L_{X_{(1)}} X_{(2)}$ также есть H -проективное движение в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как векторные поля $X_{(1)}, X_{(2)}$ являются H -проективными движениями, в локальных координатах выполняются равенства

$$\begin{aligned} L_{X_{(A)}} \Gamma_{jk}^i &= \varphi_{(A)j} \delta_k^i + \varphi_{(A)k} \delta_j^i - \varphi_{(A)s} J_j^s J_k^i - \varphi_{(A)s} J_k^s J_j^i, \\ L_{X_{(A)}} J &= 0, \quad A = 1, 2, \quad i, j, k = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь известной формулой

$$L_{[X_{(1)}, X_{(2)}]} = L_{X_{(1)}} L_{X_{(2)}} - L_{X_{(2)}} L_{X_{(1)}},$$

находим

$$L_X \Gamma_{jk}^i = \tilde{\varphi}_j \delta_k^i + \tilde{\varphi}_k \delta_j^i - \tilde{\varphi}_s J_j^s J_k^i - \tilde{\varphi}_s J_k^s J_j^i,$$

где $\tilde{\varphi} = L_{X_{(1)}} \varphi_{(2)} - L_{X_{(2)}} \varphi_{(1)}$. Следовательно, векторное поле $X = [X_{(1)}, X_{(2)}]$ является H -проективным движением.

Из доказанного следует, что множество всех H -проективных движений келерова многообразия M образует алгебру Ли $\text{hr}(M)$, называемую *H -проективной алгеброй Ли* в M .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ∇ и ∇' – H -проективно-эквивалентные связности в M . Если X есть инфинитезимальное H -проективное преобразование связности ∇ , то таким оно является и для связности ∇' . Поэтому H -проективные алгебры H -проективно-эквивалентных связностей изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторное поле X является инфинитезимальным H -проективным преобразованием келерова многообразия (M, g, J) . Тогда выполняется условие (2). Если связности ∇ и ∇' H -проективно-эквивалентны, то справедливо равенство (1). Взяв производную Ли вдоль векторного поля X от обеих частей этого равенства и используя (2), получим

$$L_X \Gamma'^i_{jk} = \varphi'_j \delta^i_k + \varphi'_k \delta^i_j - \varphi'_s J^s_j J^i_k - \varphi'_s J^s_k J^i_j,$$

где $\varphi' = \varphi - L_X \rho$. Следовательно, X является инфинитезимальным H -проективным преобразованием связности ∇' , что и требовалось доказать.

В комплексных координатах $z^\alpha, \bar{z}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, определенных в некоторой области $\Omega \subset M$, уравнение (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_X \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} &= 2\delta^\alpha_\beta \psi_{,\lambda} + 2\delta^\alpha_\lambda \psi_{,\beta}, & L_X \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\lambda}} &= 2\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \psi_{,\bar{\lambda}} + 2\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\lambda}} \psi_{,\bar{\beta}}, \\ L_X \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\beta\lambda} &= L_X \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\beta\lambda} = L_X \Gamma^\alpha_{\bar{\beta}\bar{\lambda}} = L_X \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где (вещественнозначная) функция ψ связана с 1-формой φ условием $\varphi = d\psi$.

Пусть (M, g, J) – келерово многообразие постоянной голоморфной секционной кривизны k . Согласно теореме 1 многообразие M (локально) допускает H -проективное отображение на плоское пространство. Поэтому риманова связность ∇ келеровой метрики g H -проективно-эквивалентна плоской связности и, следовательно, H -проективная алгебра Ли $\text{hr}(M)$ многообразия M изоморфна H -проективной алгебре $\text{hr}(\mathbb{C}^n)$ плоского келерова пространства $\mathbb{C}^n$, причем в соответственных координатах локальные выражения для базисных векторных полей алгебр Ли $\text{hr}(M)$ и $\text{hr}(\mathbb{C}^n)$ совпадают.

Уравнения H -планарной кривой пространства $\mathbb{C}^n$ в аффинной системе координат, в которой все символы Кристоффеля плоской метрики равны 0, имеют вид

$$\frac{d^2 z^\alpha}{dt^2} = c(t) \frac{dz^\alpha}{dt}, \quad \frac{d^2 \bar{z}^\alpha}{dt^2} = \overline{c(t)} \frac{d\bar{z}^\alpha}{dt},$$

где $c(t)$ есть комплекснозначная функция вещественного параметра t . Интегрируя эти уравнения, находим

$$z^\alpha = C_1^\alpha f(t) + C_2^\alpha, \quad \bar{z}^\alpha = \overline{C_1^\alpha f(t)} + \overline{C_2^\alpha},$$

где

$$f(t) = \int dt \exp\left(\int c(t) dt\right),$$

а C_1^α и C_2^α – постоянные интегрирования. Отсюда следует, что H -планарные кривые принадлежат подмногообразию $P \subset \mathbb{C}^n$, определенному уравнениями

$$z^\alpha = C_1^\alpha u + C_2^\alpha, \quad u \in \mathbb{C}.$$

Пусть X – вещественное H -проективное движение в $\mathbb{C}^n$:

$$X = \xi^\alpha(z) \partial_\alpha + \overline{\xi^\alpha(z)} \partial_{\bar{\alpha}},$$

где $\xi^\alpha(z)$, $\alpha = 1, \dots, n$, – голоморфные функции. Подставляя это равенство в (3), находим

$$\begin{aligned} L_X \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha &= \partial_\alpha \partial_\lambda \xi^\alpha = \delta_\beta^\alpha \psi_{,\lambda} + \delta_\lambda^\alpha \psi_{,\beta}, & L_X \Gamma_{\beta\lambda}^{\bar{\alpha}} &= \partial_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\lambda}} \bar{\xi}^{\bar{\alpha}} = \delta_\beta^\alpha \psi_{,\bar{\lambda}} + \delta_\lambda^\alpha \psi_{,\bar{\beta}}, \\ L_X \Gamma_{\beta\lambda}^{\bar{\alpha}} &= L_X \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = L_X \Gamma_{\beta\lambda}^{\bar{\alpha}} = L_X \Gamma_{\beta\lambda}^{\bar{\alpha}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия интегрируемости этих уравнений в комплексных координатах $z^\alpha, \bar{z}^\alpha$ можно записать в виде равенств

$$\begin{aligned} (L_X \Gamma_{\beta[\lambda],\mu}^\alpha) &= 2\psi_{\beta,\mu} \delta_\lambda^\alpha - 2\psi_{\beta,\lambda} \delta_\mu^\alpha \equiv L_X R^\alpha \beta \lambda \mu, \\ (L_X \Gamma_{\beta[\lambda],\bar{\mu}}^\alpha) &= 2\psi_{\beta,\bar{\mu}} \delta_\lambda^\alpha + 2\psi_{\beta,\lambda} \delta_{\bar{\mu}}^\alpha \equiv L_X R^\alpha \beta \lambda \bar{\mu} \end{aligned} \quad (5)$$

(квадратные скобки означают альтернирование). Остальные условия интегрируемости уравнений (4) могут быть получены из приведенных выше с помощью комплексного сопряжения и свойств симметрии тензора кривизны.

Ввиду того что $R_{jkl}^i = 0$ для $\mathbb{C}^n$, из (5) следуют соотношения

$$\partial_\alpha \psi_{,\beta} = 0, \quad \partial_{\bar{\alpha}} \psi_{,\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n,$$

из которых вытекает, что $\psi_{,\alpha}$ и $\psi_{,\bar{\alpha}}$ постоянны для любого $\alpha = 1, \dots, n$, т.е.

$$\psi = c_\alpha z^\alpha + \bar{c}_\alpha \bar{z}^\alpha.$$

Подставив этот результат в (4), получим

$$\xi^\alpha = c_\sigma z^\sigma z^\alpha + a_\sigma^\alpha z^\sigma + b^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где a_σ^α , b^α и c^α – произвольные комплексные постоянные. Эта формула определяет общий вид H -проективного движения $X = \xi^\alpha(z) \partial_\alpha + \bar{\xi}^{\bar{\alpha}}(\bar{z}) \partial_{\bar{\alpha}}$ в плоском пространстве $\mathbb{C}^n$ и (в соответственных координатах) в произвольном $2n$ -мерном келеровом многообразии M постоянной голоморфной секционной кривизны. Чтобы получить базисные векторные поля алгебры Ли $\mathfrak{hp}(\mathbb{C}^n) \cong \mathfrak{hp}(M)$, положим в (6) последовательно

- 1) $c_\lambda = \psi_{,\lambda}^{(\mu)} = \eta \delta_\lambda^\mu$, $a_\lambda^\alpha = 0$, $b^\alpha = 0$;
- 2) $c_\lambda = 0$, $a_\lambda^\alpha = a_{\lambda(\nu)}^{\alpha(\mu)} = \eta \delta_\lambda^\alpha \delta_\nu^\mu$, $b^\alpha = 0$;
- 3) $c_\lambda = 0$, $a_\lambda^\alpha = 0$, $b_{(\mu)}^\alpha = \eta \delta_\mu^\alpha$,

где $\alpha, \lambda, \mu, \nu = 1, \dots, n$, а постоянная η равна единице или мнимой единице. Выделенным случаям соответствуют следующие три группы базисных векторных полей:

$$\begin{aligned} X^\mu &= z^\mu z^\sigma \partial_\sigma + \bar{z}^\mu \bar{z}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}}, & Y^\mu &\equiv JX^\mu = i(z^\mu z^\sigma \partial_\sigma - \bar{z}^\mu \bar{z}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}}), \\ U_\nu^\mu &= z^\mu \partial_\nu + \bar{z}^\mu \partial_{\bar{\nu}}, & V_\nu^\mu &= i(z^\mu \partial_\nu - \bar{z}^\mu \partial_{\bar{\nu}}), \\ Z_\mu &= \partial_\mu + \partial_{\bar{\mu}}, & W_\mu &= i(\partial_\mu - \partial_{\bar{\mu}}), \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Векторные поля из первой группы (X, Y) являются собственно H -проективными движениями пространства $\mathbb{C}^n$, а векторные поля из второй (U, V) и третьей (Z, W) групп образуют алгебру Ли $\mathfrak{a}_J(\mathbb{C}^n)$ аффинных движений в $\mathbb{C}^n$, сохраняющих комплексную структуру. Из (7) следует, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{hp}(\mathbb{C}^n) = 2n^2 + 4n$.

Доказана

ТЕОРЕМА 4. *H -проективная алгебра Ли $\mathfrak{hp}(M)$ келерова многообразия M постоянной голоморфной секционной кривизны есть $(2n^2 + 4n)$ -мерная вещественная алгебра Ли. Генераторами этой алгебры Ли являются векторные поля $X^\mu, Y^\mu, U_\nu^\mu, V_\nu^\mu, Z^\mu, W^\mu$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, определенные в подходящей комплексной карте $(\Omega, z^\alpha, \bar{z}^\alpha)$ формулами (7).*

Известно [8], что в келеровом многообразии (M, g, J) постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны $k \neq 0$ можно ввести локальную комплексную систему координат $z^\alpha, \bar{z}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, в которой (ненулевые) компоненты $g_{\alpha\bar{\beta}}$ метрики g и ее келеров потенциал Φ определяются равенствами

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{2}{k} \frac{(1 + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} z^{\sigma} \bar{z}^{\sigma}) \varepsilon_{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} - \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \bar{z}^{\alpha} z^{\beta}}{(1 + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} z^{\sigma} \bar{z}^{\sigma})^2}, \quad \varepsilon_{\sigma} = \pm 1,$$

$$\Phi = \frac{2}{k} \ln \left(1 + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} z^{\sigma} \bar{z}^{\sigma} \right).$$

Отличные от 0 символы Кристоффеля метрики g имеют вид

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \overline{\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\alpha}} = -\mathcal{A}^{-1} (z^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta} + z^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha}),$$

где $\mathcal{A} = 1 + \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} z^{\sigma} \bar{z}^{\sigma}$. Вычислив производную Ли от символов Кристоффеля вдоль векторных полей $X^\mu, Y^\mu, U_\nu^\mu, V_\nu^\mu, Z^\mu, W^\mu$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, легко убедиться в том, что векторные поля Z^μ, W^μ , $\mu = 1, \dots, n$, являются собственно H -проективными движениями в M , а векторные поля $X^\mu, Y^\mu, U_\nu^\mu, V_\nu^\mu$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, натягивают алгебру Ли $\mathfrak{a}_J(M)$ голоморфных аффинных движений в M , т.е. аффинных движений, сохраняющих комплексную структуру.

Запишем базисные векторные поля $X^\mu, Y^\mu, U_\nu^\mu, V_\nu^\mu, Z^\mu, W^\mu$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, в вещественных координатах x^i , $i = 1, \dots, 2n$, определенных в области $\Omega \subset M$ равенствами

$$x^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (z^{\alpha} + \bar{z}^{\alpha}), \quad x^{n+\alpha} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (z^{\alpha} - \bar{z}^{\alpha}).$$

Выразив ∂_{α} и $\partial_{\bar{\alpha}}$ через $\partial/\partial x^i$, из (7) получаем

$$X^{\mu} = \sqrt{2} \sum_{\sigma} \left((x^{\mu} x^{\sigma} - x^{n+\mu} x^{n+\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} + (x^{\mu} x^{n+\sigma} + x^{n+\mu} x^{\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^{n+\sigma}} \right),$$

$$Y^{\mu} = \sqrt{2} \sum_{\sigma} \left(-(x^{\mu} x^{n+\sigma} + x^{n+\mu} x^{\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} + (x^{\mu} x^{\sigma} - x^{n+\mu} x^{n+\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^{n+\sigma}} \right),$$

$$U_{\nu}^{\mu} = x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + x^{n+\mu} \frac{\partial}{\partial x^{n+\nu}}, \quad V_{\nu}^{\mu} = x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{n+\nu}} - x^{n+\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}},$$

$$Z_{\mu} = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad W_{\mu} = -\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x^{n+\mu}}.$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{p}(\mathbb{C}^n)$ проективных движений комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$ (т.е. преобразований в $\mathbb{C}^n$, которые переводят комплексные прямые в $\mathbb{C}^n$ в

комплексные прямые). Аналогично вещественному случаю генераторы проективной алгебры соответствуют сдвигам, аффинным преобразованиям и собственно проективным преобразованиям в $\mathbb{C}^n$. Этими генераторами являются голоморфные векторные поля

$$T_\nu = \partial_\nu, \quad R_\nu^\mu = z^\mu \partial_\nu, \quad P^\mu = z^\mu z^\sigma \partial_\sigma, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Как известно [5], алгебра $\mathfrak{p}(\mathbb{C}^n)$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$. Сравнивая (7) и (8), мы приходим к выводу, что алгебра $\mathfrak{hp}(M)$ является овеществлением алгебры Ли $\mathfrak{p}(\mathbb{C}^n) \cong \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 5. *H -проективная алгебра $\mathfrak{hp}(M)$ келерова многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны изоморфна овеществлению $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(n+1, \mathbb{C})$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Otsuki T., Tashiro Y. On curves in Kählerian spaces // Math. J. Okayama Univ. 1954. V. 4. P. 57–78.
- [2] Аминова А. В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими // УМН. 1993. Т. 48. С. 107–159.
- [3] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
- [4] Синюков Н. С., Курбатова И. Н., Микеш Й. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств. Одесса: Изд. Одесского ун-та, 1985.
- [5] Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifolds // Tôhoku Math. J. 1957. V. 9. P. 273–297.
- [6] Aminova A. V., Kalinin D. A. Quantization of Kähler manifolds admitting H -projective mappings // Tensor. 1995. V. 56. P. 1–11.
- [7] Калинин Д. А. Келеровы магнитные поля на пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Физика. 1996. № 1. С. 13–19.
- [8] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [9] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.

Казанский государственный университет

Поступило
14.05.97