Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Карапетянц, С. Г. Самко, Пространства типа Бергмана–Мори со смешанной нормой на единичном диске, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 1, 47–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:11:15

Пространства типа Бергмана–Мори со смешанной нормой на единичном диске

А. Н. Карапетянц, С. Г. Самко

Вводятся и изучаются следующие пространства со смешанной нормой: Бергмана–Мори $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, Бергмана–Мори локального типа $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, и Бергмана–Мори дополнительного типа ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на единичном диске $\mathbb{D}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пространство со смешанной нормой Лебега–Мори $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ определяется тем условием, что последовательность Мори $L^{p,\lambda}(I)$ -норм коэффициентов Фурье функции f принадлежит l^q ($I = (0, 1)$). Таким образом, $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ определяется как подпространство аналитических функций из $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$. Два других пространства $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ определяются аналогично с использованием нормы локального Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$ и дополнительного Мори ${}^{\mathbb{C}}L^{p,\lambda}(I)$ соответственно. Введенные пространства наследуют свойства как пространств Бергмана, так и Мори, и, следовательно, мы называем их пространствами типа Бергмана–Мори. Доказывается ограниченность проектора Бергмана и приводится эквивалентная характеристика этих пространств.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: пространства, мера, оператор, норма, проектор.

DOI: 10.4213/mzm11159

1. Введение

Начиная с работ Бергмана [1] и Джрбачяна [2], [3], пространства аналитических функций p интегрируемых по отношению к сигма-конечной мере на открытом связном множестве в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{C}^n$ интенсивно изучались в работах многих авторов (см. книги [4]–[10] и имеющиеся там ссылки). Исследование теплицевых операторов, равно как и алгебр таких операторов, действующих в пространствах Бергмана, служит важной предпосылкой для развития теории таких пространств. Знание структурных свойств пространств, в частности, очень полезно в исследовании операторов типа Теплица в таких пространствах.

Недавнее продвижение в теории пространств аналитических функций связано с изучением пространств типа Бергмана и других пространств аналитических функций, таких как аналитические пространства Бесова, Q -пространства, Липшица, Блоха, ВМОА, и их многочисленных аналогов и обобщений. Разнообразие форм и подходов, использованных для определения и изучения таких пространств, позволяет

Работа С. Г. Самко выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-02732).

характеризовать их с различных точек зрения. Тем не менее, эти пространства имеют значительную общность, поскольку в той или иной мере наследуют черты пространства Бергмана и даже Харди.

В контексте вышесказанного отметим, что граничное поведение функции из рассматриваемого пространства или граничное поведение символа оператора Теплица является важным для изучения вопросом.

Введение смешанной нормы является естественным обобщением классического пространства Бергмана. Это, в частности, позволяет проводить различие между переменными и, следовательно, определять граничное поведение функции с большей точностью.

Имеется ряд работ по пространствам Бергмана с интегральной смешанной нормой. Результаты этих работ связаны с ограниченностью проектора Бергмана и некоторыми свойствами пространств Бергмана, такими как двойственность, и т.д. Не претендуя на полноту информации, укажем работы [11]–[15] (см. также цитируемые в них ссылки).

В настоящей работе мы рассматриваем другое обобщение классического пространства Бергмана, используя иной, отличный от упомянутого, подход к определению пространства. Вместо интегральной нормы по радиальной переменной мы используем l^q норму последовательности, чьи элементы суть нормы пространства типа Мори коэффициентов Фурье функции f на $\mathbb{D}$. Введенные пространства наследуют особенности как пространств Бергмана так и Мори, в связи с чем мы называем их пространствами типа Бергмана–Мори. Стандартная ссылка по пространствам Мори – [16], [17]. Мы также укажем [18] для информации о недавнем продвижении в контексте теории вещественных пространств типа Мори. Также упомянем недавнее существенное продвижение в исследовании классических операторов вещественного анализа в общих пространствах типа Мори – см. статьи [19]–[22] и цитируемую там литературу.

Отметим, что для $\lambda = 0$ пространства типа Мори $L^{p,0}(I)$, $L_{\text{loc}}^{p,0}(I)$, $L^{p,0}(I)$ совпадают с $L^p(I)$. Пространства типа Бергмана со смешанной нормой в таком случае были рассмотрены в более общей постановке: в работе [23] мы использовали пространство Лебега переменного порядка $L^{p(\cdot)}(I)$ для определения соответствующего пространства Бергмана со смешанной нормой переменного порядка на $\mathbb{D}$. Так что результаты работы [23] включают результаты настоящей статьи для $\lambda = 0$. Настоящая статья также может рассматриваться как естественное продолжение исследования пространств типа Бергмана со специальной смешанной нормой, начатое [23]. Одна из основных идей данного исследования – применение полученных результатов к исследованию операторов типа Теплица. Мы планируем рассмотреть этот вопрос в другой работе.

Заметим, что норма Мори использовалась для пространства аналитических функций в контексте измерения граничных значений функций из пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Аналитические пространства Мори на единичном диске и верхней полуплоскости были введены и изучены в связи с Q -пространствами в [24] (см. также [25] для дальнейших результатов).

Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы приводим необходимые определения и понятия касательно классического пространства Бергмана, проектора Бергмана, и пространств Мори. В третьем разделе мы вводим простран-

ства

$$\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}), \quad \mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}), \quad \mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}), \quad \mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}), \quad \mathbb{C}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}), \quad \mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}).$$

В четвертом разделе мы приводим асимптотические оценки (асимптотическое поведение) для последовательностей

$$\|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)}, \quad \|r^n\|_{L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)}, \quad \|r^n\|_{\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \text{ (натуральные числа)}.$$

Эти оценки и асимптотическое поведение позволяют нам доказать ограниченность проектора Бергмана как проектора из $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, из $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, и из $\mathbb{C}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ в пятом разделе. В шестом разделе, основываясь на асимптотических оценках раздела 4, мы обсуждаем эквивалентные нормы в $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, и также связь с пространствами Харди $H^2(\mathbb{D})$, используя конструкции дробного интегрирования по Адамару в том числе.

2. Предварительные сведения и определения

2.1. Классическое пространство Харди $H^p(\mathbb{D})$ и Бергмана $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ и проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}$. Вспомогательные результаты и определения, приведенные здесь, можно найти в [6]–[9]. Для функции φ на единичном диске $\mathbb{D}$ и $0 \leq r < 1$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p(\varphi; r) &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(r, e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \\ \mathcal{M}_p(\varphi; r) &= \text{ess-sup}_{\theta \in [0, 2\pi)} |\varphi(r, e^{i\theta})|, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Класс аналитических на $\mathbb{D}$ функций f , для которых

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} \equiv \lim_{r \rightarrow 1} \mathcal{M}_p(f; r) < \infty, \quad 0 < p \leq \infty,$$

называется *классом Харди $H^p(\mathbb{D})$* .

Пусть $dA(z)$ обозначает плоскую меру на $\mathbb{D}$ нормализованную так, что площадь $\mathbb{D}$ равна 1. Как обычно, $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ обозначает пространство Бергмана аналитических на $\mathbb{D}$ функций f , которые принадлежат $L^p(\mathbb{D}) = L^p(\mathbb{D}; dA(z))$. Соответствующий проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}$, который определен на $f \in L^1(\mathbb{D})$ по правилу

$$B_{\mathbb{D}}f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) dA(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

является ограниченным из $L^p(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ для $1 < p < \infty$.

2.2. Пространство Мори $L^{p,\lambda}(I)$, локальное пространство Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$ и дополнительное пространство Мори $\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)$ на $I = (0, 1)$. Имеются многочисленные источники для теории пространств Мори. Мы сошлемся на [18] для определений и используемых здесь свойств. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$. Пространство Мори $L^{p,\lambda}(I)$ на интервале I определяется как множество измеримых на I функций φ таких, что

$$\sup_{r, r \pm h \in I, h > 0} \frac{1}{(2h)^\lambda} \int_{r-h}^{r+h} |\varphi(t)|^p 2t dt < \infty.$$

Локальное пространство Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$ на интервале I определяется как множество измеримых на I функций φ таких, что

$$\sup_{h \in I} \frac{1}{h^\lambda} \int_{1-h}^1 |\varphi(t)|^p 2t \, dt < \infty.$$

Такое локальное пространство иногда называют *центральным пространством Мори*. Дополнительное пространство Мори $\mathbb{G}L^{p,\lambda}(I)$ на интервале I определяется как множество измеримых на I функций φ таких, что

$$\sup_{h \in I} h^\lambda \int_0^{1-h} |\varphi(t)|^p 2t \, dt < \infty.$$

Корень p -й степени из каждого приведенного выше выражения будет являться соответствующей нормой.

Пространство $L^{p,\lambda}(I)$ тривиально для $\lambda > 1$ и

$$L^{p,0}(I) = L_{\text{loc}}^{p,0}(I) = \mathbb{G}L^{p,0}(I) = L^p(I),$$

а также $L^{p,1}(I) = L^\infty(I)$. Пространство $\mathbb{G}L^{p,\lambda}(I)$ содержит неинтегрируемые функции при $\lambda \geq p - 1$.

Следовательно, всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $0 \leq \lambda < 1$ для $L^{p,\lambda}(I)$, $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$, и $0 \leq \lambda < p - 1$ для $\mathbb{G}L^{p,\lambda}(I)$. Заметим, что эти пространства несепарабельны при указанных λ за исключением $\lambda = 0$.

3. Пространства со смешанной нормой типа Бергмана–Мори

3.1. Пространства $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, и $\mathbb{G}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$. Для функции $f(z) = f(r, e^{i\alpha})$ на $\mathbb{D}$ преобразование Фурье по угловой переменной определяется соотношением

$$I \otimes \mathcal{F}f = \{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, e^{i\alpha}) e^{-in\alpha} \, d\alpha.$$

Пусть далее для каждого $n \in \mathbb{Z}$ функция $f_n = f_n(r)$ принадлежит пространству $L^{p,\lambda}(I)$, где $1 \leq p < \infty$.

Введем пространство со смешанной нормой $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, как пространство измеримых на $\mathbb{D}$ функций f , для которых коэффициенты Фурье $f_n(r)$ существуют для почти всех $r \in I$ и норма

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^q \right)^{1/q} \quad (3.1)$$

конечна. Пространства со смешанной нормой $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, и $\mathbb{G}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$, определяются аналогично с использованием нормы локального Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$ и нормы дополнительного Мори $\mathbb{G}L^{p,\lambda}(I)$ соответственно в (3.1) вместо $L^{p,\lambda}(I)$ -нормы.

3.2. Пространства типа Бергмана–Мори $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$.

Введем пространство со смешанной нормой Бергмана–Мори $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, как подпространство аналитических на $\mathbb{D}$ функций из $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$. Следовательно, норма функции $f \in \mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ определяется соотношением

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|f_n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^q \right)^{1/q}. \quad (3.2)$$

Аналогично, пространство со смешанной нормой Бергмана–Мори локального типа $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, и пространство со смешанной нормой Бергмана–Мори дополнительного типа $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$, соответственно определяются как подпространства $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathbb{C}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, состоящие из аналитических на $\mathbb{D}$ функций.

Будет удобно использовать следующее соглашение. Всюду в дальнейшем $X^{p,\lambda}(I)$ может обозначать любое из пространств:

- 1) $X^{p,\lambda}(I) = L^{p,\lambda}(I)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$,
- 2) $X^{p,\lambda}(I) = L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$,
- 3) $X^{p,\lambda}(I) = \mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно определению рассматриваемых пространств, коэффициенты Фурье $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, функции f , принадлежащей любому из указанных пространств типа Бергмана–Мори: $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, или $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ имеют следующий вид:

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n \|r^n\|_{X^{p,\lambda}(I)}^{-1} r^n, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

и $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in l_+^q$, $|a_n| = \|f_n\|_{X^{p,\lambda}(I)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$; кроме того,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})} = \|\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}\|_{l_+^q}$$

для допустимых значений q , p , λ в каждом конкретном равенстве.

4. Оценки норм $\|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)}$, $\|r^n\|_{L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)}$, $\|r^n\|_{\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)}$

Ввиду замечания 1 поведение $\|r^n\|_{X^{p,\lambda}(I)}$ при $n \rightarrow \infty$ играет существенную роль в настоящем исследовании.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$. Тогда имеет место следующая двухсторонняя оценка:

$$C_1 n^{(\lambda-1)/p} \leq \|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)} \leq C_2 n^{(\lambda-1)/p}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где C_1 , C_2 некоторые положительные постоянные, не зависящие от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим неравенство Гёльдера к следующему интегралу ($h > 0$, $r \pm h \in I$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2h)^\lambda} \int_{r-h}^{r+h} t^{np+1} 2 dt &\leq 2 \left(\int_{r-h}^{r+h} t^{(np+1)(1/(1-\lambda))} dt \right)^{1-\lambda} \leq 2 \left(\int_I t^{(np+1)(1/(1-\lambda))} dt \right)^{1-\lambda} \\ &= 2 \left((np+1) \frac{1}{1-\lambda} + 1 \right)^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению

$$\|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)} = \sup_{r, r \pm h \in I, h > 0} \left(\frac{1}{(2h)^\lambda} \int_{r-h}^{r+h} t^{np+1} 2 dt \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} \left((np+1) \frac{1}{1-\lambda} + 1 \right)^{(\lambda-1)/p}.$$

Теперь докажем аналогичную оценку снизу. Обозначим

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ h \in I : 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(np+1)} < 2h < 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{1/(np+1)} \right\} \\ &= \left\{ h \in I : \frac{1}{4} < (1-2h)^{np+1} < \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^p &\geq \sup_{r+h=1, 0 < h < 1/2} \frac{1}{(2h)^\lambda} \int_{1-2h}^1 t^{np+1} 2 dt \\ &= 2 \sup_{0 < h < 1/2} \frac{1}{(2h)^\lambda} \left(\int_{1-2h}^1 t^{np+1} dt \right)^\lambda \left(\int_{1-2h}^1 t^{np+1} dt \right)^{1-\lambda} \\ &\geq 2 \sup_{h \in E_n} (1-2h)^{(np+1)\lambda} \left(\frac{1 - (1-2h)^{np+2}}{np+2} \right)^{1-\lambda} \\ &\geq 24^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2^{1/(np+1)}} \right)^{1-\lambda} (np+2)^{\lambda-1} \geq 2^{-\lambda} (np+2)^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Последнее завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие асимптотические соотношения:*

- 1) $\|r^n\|_{L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)} \sim n^{(\lambda-1)/p}$, $n \rightarrow \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$,
- 2) $\|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)} \sim n^{(-\lambda-1)/p}$, $n \rightarrow \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится непосредственным вычислением и взятием супремума по $h \in I$. Например,

$$\|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^p = \sup_{h \in I} 2h^\lambda \frac{(1-h)^{np+2}}{np+2} = \frac{2}{np+2} \left(\frac{\lambda}{np+2+\lambda} \right)^\lambda.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из лемм 1, 2 следует, что пространства $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, совпадают с точностью до эквивалентности норм, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$. Однако, пространства $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ различны.

5. Ограниченность проектора Бергмана

Сначала приведем некоторые предварительные результаты.

ЛЕММА 3 ([23]). *Пусть f из $L^1(\mathbb{D})$ и $f_n = f_n(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье функции f . Тогда коэффициенты Фурье функции $B_{\mathbb{D}}f$ имеют вид*

$$\begin{aligned} (B_{\mathbb{D}}f)_n(r) &= r^n(n+1) \int_I \tau^n f_n(\tau) 2\tau d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ (B_{\mathbb{D}}f)_n(r) &= 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{5.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Нам необходимо оценить $\|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{X^{p,\lambda}(I)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Ключевым результатом для этого является следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть $g \in X^{p,\lambda}(I)$, где $X^{p,\lambda}(I)$ – любое из трех пространств $L^{p,\lambda}(I)$, $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$, или $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(I)$. Тогда

$$\left| \int_I \tau^n g(\tau) 2\tau d\tau \right| \leq C \|g\|_{X^{p,\lambda}(I)} n^{-\lambda^*/p-1/p'}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

где обозначено $\lambda^* = \lambda$ для случая пространств Мори $L^{p,\lambda}(I)$ и локального Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$, и $\lambda^* = -\lambda$ для случая дополнительного пространства Мори $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(I)$, и постоянная C не зависит от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к двоичному разбиению по интервалам $I_k = (1-2^{-k}, 1-2^{-k-1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\int_I \tau^n g(\tau) 2\tau d\tau = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \int_{I_k} \tau^{n+1} g(\tau) d\tau.$$

Пусть как обычно $1/p + 1/p' = 1$. Ниже мы рассмотрим случай $p > 1$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\left| \int_{I_k} \tau^{n+1} g(\tau) d\tau \right| \leq \left(\int_{I_k} \tau^{(n+1)p'} (1-\tau)^{\lambda^* p'/p} d\tau \right)^{1/p'} \left(\int_{I_k} (1-\tau)^{-\lambda^*} |g(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в случае пространства Мори $L^{p,\lambda}(I)$ получаем

$$\left(\int_{I_k} (1-\tau)^{-\lambda} |g(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq \left(2^{(k+1)\lambda} \int_{I_k} |g(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq \|g\|_{L^{p,\lambda}(I)}.$$

Аналогичная оценка справедлива для локального пространства Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$, но с дополнительным постоянным множителем $2^{\lambda/p}$ в правой части. Также для случая дополнительного пространства Мори $X^{p,\lambda}(I) = \mathfrak{L}^{p,\lambda}(I)$ имеем

$$\left(\int_{I_k} (1-\tau)^{\lambda} |g(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq \left(2^{-k\lambda} \int_{I_k} |g(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq 2^{\lambda/p} \|g\|_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}(I)}.$$

Далее, если обозначим

$$J_{n,\lambda^*,p'}(k) = \left(\int_{I_k} \tau^{(n+1)p'} (1-\tau)^{\lambda^* p'/p} d\tau \right)^{1/p'},$$

то непосредственные оценки приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} J_{n,\lambda,p'}(k) &\leq 2^{\lambda/p} (1-2^{-k-1})^{(n+1)} (2^{-k-1})^{\lambda/p+1/p'}, \\ J_{n,-\lambda,p'}(k) &\leq (1-2^{-k-1})^{(n+1)} (2^{-k-1})^{-\lambda/p+1/p'}. \end{aligned}$$

Следовательно, если снова $X^{p,\lambda}(I)$ – любое из трех пространств $L^{p,\lambda}(I)$, $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$ или $\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)$, то

$$\left| \int_I \tau^n g(\tau) 2\tau \, d\tau \right| \leq 2^{1+\lambda/p} \delta_{p,\lambda} \|g\|_{X^{p,\lambda}(I)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (1 - 2^{-k-1})^{(n+1)} (2^{-k-1})^{\lambda^*/p+1/p'},$$

где $\delta_{p,\lambda} = 1$, если либо $X^{p,\lambda}(I) = L^{p,\lambda}(I)$, либо $X^{p,\lambda}(I) = \mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)$, и $\delta_{p,\lambda} = 2^{\lambda/p}$ для случая локального пространства Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$. Заметим, что $0 < \lambda^*/p + 1/p' < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (1 - 2^{-k-1})^{(n+1)} (2^{-k-1})^{\lambda^*/p+1/p'} \\ & \leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \int_{I_{k+1}} \tau^{n+1} (1 - \tau)^{\lambda^*/p+1/p'-1} d\tau \\ & = 2 \int_{1/2}^1 \tau^{n+1} (1 - \tau)^{\lambda^*/p+1/p'-1} d\tau \leq 2B\left(n+2, \frac{\lambda^*}{p} + \frac{1}{p'}\right), \end{aligned}$$

где $B(x, y)$ – бета-функция Эйлера. Известно, что

$$B\left(n+2, \frac{\lambda^*}{p} + \frac{1}{p'}\right) \sim (n+2)^{-\lambda^*/p-1/p'}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Собирая приведенные выше оценки, приходим к справедливости (5.2) для случая $p > 1$.

Пусть теперь $p = 1$. В этом случае необходимо доказать утверждение только для пространства Мори $L^{p,\lambda}(I)$ и локального пространства Мори $L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)$. Это обеспечивается рассуждениями, аналогичными случаю $p > 1$, в которых при необходимости интегральная норма заменяется на норму $L^\infty(I_k)$.

ЛЕММА 5. Для $f \in L^1(\mathbb{D})$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

- 1) $\|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{L^{p,\lambda}(I)} \leq C \|f_n\|_{L^{p,\lambda}(I)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$,
- 2) $\|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)} \leq C \|f_n\|_{L_{\text{loc}}^{p,\lambda}(I)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$,
- 3) $\|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)} \leq C \|f_n\|_{\mathbb{C}L^{p,\lambda}(I)}$, $1 < p \leq \infty$, $0 \leq \lambda < p-1$,

где постоянная C не зависит от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, справедливость первого утверждения. Доказательства двух других аналогичны. Используя (5.1), будем иметь следующее выражение для $L^{p,\lambda}(I)$ -нормы функции $(B_{\mathbb{D}}f)_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{L^{p,\lambda}(I)} = \|r^n\|_{L^{p,\lambda}(I)} (n+1) \left| \int_I \tau^n f_n(\tau) 2\tau \, d\tau \right|. \quad (5.3)$$

Остается использовать леммы 1, 2 и 4.

Наконец, мы непосредственно подошли к результату об ограниченности проектора Бергмана. Проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}$ понимается как непрерывное продолжение с плотного множества (см. ниже).

ТЕОРЕМА 6. Оператор $B_{\mathbb{D}}$ ограничен как проектор

- 1) из $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$;
- 2) из $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$;
- 3) из $\mathbb{C}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ на $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Остальные доказываются по аналогии. Пусть $\mathcal{L}_0^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ обозначает множество функций вида

$$f(z) = f(r, e^{i\alpha}) = \sum_{n=-N}^N f_n(r) e^{in\alpha}, \quad f_n \in L^{p,\lambda}(I),$$

где $N \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Очевидно, что $\mathcal{L}_0^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ плотно в $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$. Проектор Бергмана $B_{\mathbb{D}}$ определен на функциях такого типа, поскольку $\mathcal{L}_0^{p,\lambda}(\mathbb{D}) \subset L^1(\mathbb{D})$. Лемма 5 применима для $f \in \mathcal{L}_0^{p,\lambda}(\mathbb{D})$ и мы получаем

$$\|B_{\mathbb{D}}f\|_{\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})}^q = \sum_{n=-N}^N \|(B_{\mathbb{D}}f)_n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^q \leq C^q \sum_{n=-N}^N \|f_n\|_{L^{p,\lambda}(I)}^q = C^q \|f\|_{\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})}^q,$$

где постоянная C та же, что и в лемме 4, и не зависит от f . Применение теоремы Банаха–Штейнгауза завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 7. При условиях на q, p, λ , приведенных в теореме 6, пространства $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathcal{A}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, и $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ являются замкнутыми подпространствами пространств $\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathbb{C}\mathcal{L}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ соответственно.

6. Некоторые свойства $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$

Ввиду замечания 2 мы будем рассматривать дальнейшие свойства пространства Бергмана–Мори $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и пространства Бергмана–Мори $\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$ дополнительного типа.

Введем весовое пространство Лебега $L_{(1-r)^\gamma}^p(I)$ как пространство измеримых функций g на I с нормой

$$\|g\|_{L_{(1-r)^\gamma}^p(I)} = \left(\int_I |g(r)|^p (1-r)^\gamma 2r \, dr \right)^{1/p}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (6.1)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда

- 1) норма $\|f\|_{\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})}$ функции $f \in \mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, эквивалентна любой из двух следующих конструкций:

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+1)^{q(\lambda-1)/p} |c_n|^q \right)^{1/q}, \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|f_n\|_{L_{(1-r)^{-\lambda}}^p(I)}^q \right)^{1/q};$$

- 2) норма $\|f\|_{\mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})}$ функции $f \in \mathbb{C}\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p-1$, эквивалентна любой из двух следующих конструкций:

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+1)^{q(-\lambda-1)/p} |c_n|^q \right)^{1/q}, \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|f_n\|_{L_{(1-r)^\lambda}^p(I)}^q \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из определения соответствующих пространств с учетом замечания 1, лемм 1, 2, и ввиду следующего соотношения:

$$\|r^n\|_{L_{(1-r)^{\mp\lambda}}^p(I)}^p = 2B(np+2, 1 \mp \lambda) \sim 2(np+2)^{-(1 \mp \lambda)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $1 \leq q < 2$. Из теоремы Харди–Литлвуда (см. [6; с. 76]) получаем непрерывное вложение:

- 1) $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, если $q(1 + (1 - \lambda)/p) \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$;
- 2) $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D})$, если $q(1 + (1 + \lambda)/p) \geq 2$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$.

Введем пространство $\mathcal{A}_\gamma^{q;p}(\mathbb{D})$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, аналогично определению пространств типа Бергмана–Мори, в котором вместо нормы типа Мори будем использовать интегральную лебегову норму (6.1), как подсказывает утверждение теоремы 8.

ТЕОРЕМА 10. Следующие соотношения:

- 1) $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_\lambda^{q;p}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$;
- 2) $\mathcal{C}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_{-\lambda}^{q;p}(\mathbb{D})$, $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$,

имеют место с точностью до эквивалентности норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из теоремы 8.

В качестве еще одного следствия из теоремы 8 отметим, что для случая $q = 2$ рассматриваемые пространства состоят из функций, являющихся дробными производными типа Адамара функций из класса Харди $H^2(\mathbb{D})$. Теория дробного интегрирования представлена, например, в [26]. Оператор умножения коэффициентов функции $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^n$ на $(n+1)^\alpha$, $\alpha > 0$, есть дробная производная по Адамару. Мы обозначим этот оператор через D^α , и для соответствующего дробного интеграла будем использовать I^α . Эти операторы корректно определены на функциях f , аналитических в диске $\mathbb{D}$, сохраняют множество аналитических функций и $D^\alpha I^\alpha f = I^\alpha D^\alpha f = f$ для всех таких f (см. [26] и [27]).

ТЕОРЕМА 11. Пусть $q = 2$. Тогда следующие соотношения:

- 1) $\mathcal{A}^{2;p,\lambda}(\mathbb{D}) = D^{(1-\lambda)/p}(H^2(\mathbb{D}))$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$;
- 2) $\mathcal{C}^{2;p,\lambda}(\mathbb{D}) = D^{(1+\lambda)/p}(H^2(\mathbb{D}))$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < p - 1$,

имеют место с точностью до эквивалентности норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из теоремы 8 с учетом известного факта, что

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n z^n \in H^2(\mathbb{D}) \iff \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^2 < \infty.$$

Следуя [27], введем пространства со смешанной нормой $H(s, t, \gamma)$, $s > 0$, $t > 0$, $\gamma > 0$ как пространства измеримых на $\mathbb{D}$ функций с нормой

$$\|f\|_{H(s,t,\gamma)} = \left\{ \int_I (1-r)^{t\gamma-1} \mathcal{M}_s^t(f; r) dr \right\}^{1/t}, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\|f\|_{H(s,\infty,\gamma)} = \sup_I \{(1-r)^\gamma \mathcal{M}_s(f; r)\}, \quad t = \infty.$$

Информация о таких пространствах, включая теоремы вложения, имеется, например, в [28].

Следующий результат показывает, что по крайней мере для $q \leq 2$ функции из введенных нами пространств регулярны в том смысле, что они имеют конечную лебегову смешанную норму.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq 2$. Тогда имеют место следующие непрерывные вложения:

- 1) $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(s, t, 1/2 - 1/s + (1 - \lambda)/p) \hookrightarrow L^1(\mathbb{D})$, $0 \leq \lambda < 1$, если $(1 - \lambda)/p < 1/2 + 1/s$, $2 < s \leq \infty$, $2 \leq t \leq \infty$;
- 2) $\mathcal{C}_{\mathcal{A}^{q;p,\lambda}}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H(s, t, 1/2 - 1/s + (1 + \lambda)/p) \hookrightarrow L^1(\mathbb{D})$, $0 \leq \lambda < p - 1$, если $(1 + \lambda)/p < 1/2 + 1/s$, $2 < s \leq \infty$, $2 \leq t \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{A}^{q;p,\lambda}(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{A}^{2;p,\lambda}(\mathbb{D})$ и $\mathcal{C}_{\mathcal{A}^{q;p,\lambda}}(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}^{2;p,\lambda}}(\mathbb{D})$ при $1 \leq q \leq 2$, то достаточно доказать теорему для $q = 2$.

В соответствии с результатом Флетта (см. [27; теорема В и теорема 6]) для $f \in H^2(\mathbb{D})$ имеет место оценка $\|D^\alpha f\|_{H(s,t,1/2-1/s+\alpha)} \leq C\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$, если $2 < s \leq \infty$, $2 \leq t \leq \infty$, $\alpha > 0$, где C не зависит от f . Эта оценка вместе с теоремой 11 приводят к вложению

$$\mathcal{A}^{2;p,\lambda}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H\left(s, t, \frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{1 - \lambda}{p}\right), \quad \mathcal{C}_{\mathcal{A}^{2;p,\lambda}}(\mathbb{D}) \hookrightarrow H\left(s, t, \frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{1 + \lambda}{p}\right).$$

Для доказательства $H(s, t, 1/2 - 1/s + (1 \mp \lambda)/p) \hookrightarrow L^1(\mathbb{D})$ необходимо последовательно дважды использовать неравенство Гёльдера при следующих условиях на параметр s :

$$\frac{1 \mp \lambda}{p} < \frac{1}{2} + \frac{1}{s}, \quad 2 < s \leq \infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Bergman, “Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **169** (1932), 1–42.
- [2] М. М. Джрбашян, “О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций”, *Докл. АН Арм. ССР*, **3**:1 (1945), 3–9.
- [3] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, *Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР*, 1948, № 2, 3–55.
- [4] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys Monogr., **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.
- [5] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, **105**, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988.
- [6] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces*, Math. Surveys Monogr., **100**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [7] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [8] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Math. Surveys Monogr., **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [9] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Graduate Texts in Math., **226**, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [10] N. L. Vasilevski, *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Operator Theory: Adv. Appl., **185**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [11] D. Gu, “Bergman projections and duality in weighted mixed norm spaces of analytic functions”, *Michigan Math. J.*, **39**:1 (1992), 71–84.
- [12] M. Jevtić, “Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions”, *Complex Variables Theory Appl.*, **8**:3–4 (1987), 293–301.
- [13] S. Gadbois, “Mixed norm generalizations of Bergman spaces and duality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:4 (1988), 1171–1180.

- [14] Y. Liu, “Boundedness of the Bergman type operators on mixed norm space”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:8 (2002), 2363–2367.
- [15] S. Li, “A class of integral operators on mixed norm spaces in the unit ball”, *Czechoslovak Math. J.*, **57 (132)**:3 (2007), 1013–1023.
- [16] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces*, Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1977.
- [17] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Ann. of Math. Stud., **105**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1977.
- [18] N. Samko, S. Samko, H. Rafeiro, “Morrey–Campanato spaces: an overview”, *Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics*, Oper. Theory Adv. Appl., **228**, Springer, Basel, 2013, 293–323.
- [19] V. I. Burenkov, “Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I”, *Eurasian Math. J.*, **3**:3 (2012), 11–32.
- [20] V. I. Burenkov, “Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II”, *Eurasian Math. J.*, **4**:1 (2013), 21–45.
- [21] V. Guliev, J. Hasanov, S. Samko, “Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces”, *Math. Scand.*, **107**:2 (2010), 285–304.
- [22] V. S. Guliev, J. J. Hasanov, S. G. Samko, “Boundedness of the maximal, potential and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces”, *J. Math. Sci.*, **170**:4 (2010), 423–443.
- [23] A. Karapetyants, S. Samko, “Mixed norm variable exponent Bergman space on the unit disc”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2016 (to appear).
- [24] Z. Wu, C. Xie, “ Q spaces and Morrey spaces”, *J. Funct. Anal.*, **201**:1 (2003), 282–297.
- [25] J. Liu, Z. Lou, “Properties of analytic Morrey spaces and applications”, *Math. Nachr.*, **288**:14–15 (2015), 1673–1693.
- [26] S. Samko, A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Yverdon, 1993.
- [27] T. M. Flett, “The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **38**:3 (1972), 746–765.
- [28] I. Arévalo, “A characterization of the inclusions between mixed norm spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **429**:5 (2015), 942–955.

А. Н. Карапетянц

Южный федеральный университет,
г. Ростов-на-Дону;

Донской государственный технический университет,
г. Ростов-на-Дону

E-mail: karapetyants@gmail.com

С. Г. Самко

Universidade do Algarve, Portugal

E-mail: ssamko@ualg.pt

Поступило

17.02.2016