Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Дубицкас, Многочлены с большой кратностью в единице и проблема Терри, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 810–815

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:11:19

УДК 511

МНОГОЧЛЕНЫ С БОЛЬШОЙ КРАТНОСТЬЮ В ЕДИНИЦЕ И ПРОБЛЕМА ТЕРРИ

А. Дубицкас

Установлено существование многочлена с целыми коэффициентами, который имеет относительно небольшую длину и достаточно большую кратность в единице. Доказательство соответствующего утверждения основано на оценке числа решений системы Терри.

Библиография: 14 названий.

Пусть $P(z)$ – ненулевой многочлен с целыми коэффициентами степени $\deg P(z) \leq N$ –
1. Обозначим кратность многочлена в единице через

$$r(P) = \text{ord}_{z=1} P(z).$$

Пусть также $H(P)$ и $L(P)$ являются соответственно высотой и длиной многочлена $P(z)$. Из классической леммы Зигеля следует, что существуют многочлены с не очень большой высотой и достаточно большой кратностью в единице. Так, Блох и Пойя [1] показали, что существует многочлен с коэффициентами $\{0, 1, -1\}$ такой, что

$$r(P) \geq \left\lceil \sqrt{2 \log 2 \frac{N-1}{\log N}} \right\rceil - 1. \quad (1)$$

Миньотт [2] получил соответствующую оценку снизу для многочлена с произвольной, но не очень большой высотой. Эти результаты, обычно называемые вариантами леммы Зигеля, основаны на применении принципа Дирихле. Иногда для приложений требуются как можно более точные варианты леммы Зигеля. Так, например, Бомбьери [3] использовал подобные результаты для оценок эффективных приближений алгебраических чисел. В работе [4] Бомбьери и Ваалер получили общий вариант леммы Зигеля. Вместо принципа Дирихле они воспользовались рядом результатов из геометрии чисел. Ряд специальных важных случаев рассматривался ими в работе [5]. В частности, они показали, что существует многочлен с высотой $\leq H$ такой, что

$$\frac{\log H}{N} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{r(P)}{N} \right)^2 \log \left(\frac{N}{r(P)} \right) (1 + \varepsilon), \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$, а $N/r(P)$ достаточно большое.

Работа выполнена при частичной поддержке Литовского фонда студий и науки.

Легко видеть, что из (2) следует существование многочлена с коэффициентами $\{0, 1, -1\}$ такого, что

$$r(P) \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log 2 \frac{N}{\log N}}, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$, а N достаточно большое. Ясно, что неравенство (3) усиливает неравенство (1).

Недавно Аморозо [6], используя идеи Добровольского, разработанные при исследовании гипотезы Лемера [7], показал, что константа $1/2$ в (2) может быть заменена на $1/4$ при выполнении некоторых дополнительных условий. Однако, для этого требуется, чтобы высота была достаточно большая, т.е. это не дает усиления неравенства (3). Наконец, автор [8], [9] рассматривал явно построенный многочлен с большой кратностью в единице, для которого выполняется неравенство типа (2).

Хорошо известно, что кратность многочлена в единице не может быть очень большой, если его высота или длина небольшие. По теореме Шура [10] количество вещественных корней многочлена P не превосходит $2\sqrt{N \log L(P)}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$r(P) \leq 2\sqrt{N \log L(P)}. \quad (4)$$

В том случае, когда $H(P)$, а вместе с тем и $L(P)$, достаточно большое, неравенство (4) также было доказано Бомбьери и Ваалером [5]. Аморозо [6] доказал, что константа 2 в (4) может быть заменена на 1.21, когда N и $\log H(P)/\log N$ достаточно большие. Заметим, что в случае $L(P) \leq N$ из (4) следует, что

$$r(P) \leq 2\sqrt{N \log N}.$$

Таким образом, если неравенство (3) может быть уточнено, то только за счет константы и $\log N$.

В настоящей работе мы покажем, что существуют многочлены с небольшой по сравнению со степенью длиной, имеющие достаточно большую кратность в единице. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $1/(\delta N) \leq a \leq 2^{N-1}$, то существует многочлен с целыми коэффициентами P , удовлетворяющий условиям $\deg P \leq N - 1$, $L(P) \leq aN$,*

$$r(P) > (\sqrt{2} - \varepsilon) \sqrt{\frac{f(a)N}{\log N}}, \quad (5)$$

где $f(a) = (1 + a/2) \log(1 + a/2) - (a/2) \log(a/2)$. Более того, если $N^{-\delta} \leq a \leq 2^{N-1}$ и N достаточно большое, то

$$r(P) > (2 - \varepsilon) \sqrt{\frac{f(a)N}{\log N}}. \quad (6)$$

Отметим, что если a – целое положительное число, то при условиях теоремы из (2) следует неравенство

$$r(P) \geq (2 - \varepsilon) \sqrt{\frac{N \log(1 + a)}{\log N}}. \quad (7)$$

Если же $a < 1$, то при условиях теоремы из (3) следует неравенство

$$r(P) \geq (1 - \varepsilon) \sqrt{4 \log 2 \frac{aN}{\log(aN)}}. \quad (8)$$

Нижние оценки для $r(P)$ в теореме сильнее, чем (7) и (8). Например, при $a = 1$ неравенство (6) сильнее, чем (7):

$$f(1) = \frac{3}{2} \log 3 - \log 2 > \log 2,$$

а при $a = 1/\sqrt{N}$ неравенство (5) лучше, чем (8), на логарифмический множитель $\sqrt{\log N}$. Если $a \geq 2^{N-1}/N$, то многочлен $(1 - z)^{N-1}$ имеет максимально возможную кратность $r(P) = N - 1$.

Первоначальный вариант доказательства теоремы с функцией несколько меньшей, чем $f(a)$ состоял в применении оценок, получаемых в проблеме Терри (или Пруэ–Терри–Эскотта). Рассмотрим систему из n уравнений

$$x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j - y_1^j - y_2^j - \dots - y_k^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k$ принимают значения целых чисел от 1 до N . Различные вопросы о числе решений этой системы обычно называют проблемой Терри (см., например, [11]–[13] или [14, гл. III, лемма 5], где приводится оценка снизу для числа решений этой системы). Решение системы Терри $(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k)$ назовем *тривиальным*, если числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ получаются перестановкой чисел $y_1, y_2, \dots, y_k$.

Рассмотрим многочлен

$$F(z) = \sum_{j=1}^k z^{x_j} - \sum_{j=1}^k z^{y_j},$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k)$ – нетривиальное решение системы Терри. Легко видеть, что

$$F(1) = F'(1) = \dots = F^{(n)}(1) = 0.$$

Положим $P(z) = F(z)/z$. Ясно, что $P(z)$ – ненулевой многочлен с целыми коэффициентами степени $\leq N - 1$. Кроме того, $L(P) = L(F) \leq 2k$ и $r(P) = r(F) \geq n + 1$. Для доказательства теоремы остается проверить, что при $k = \lfloor aN/2 \rfloor$ и достаточно больших r (соответствующих (5), (6)) система Терри (9) с $n = r - 1$ имеет нетривиальное решение.

Автор благодарит рецензента, который предложил дать непосредственное доказательство этого и не пользоваться известными нижними оценками для числа всех решений системы Терри, которые хороши только тогда, когда N велико по сравнению с n и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что при $n = r - 1$ система (9) эквивалентна следующей:

$$\binom{x_1}{j} + \binom{x_2}{j} + \dots + \binom{x_k}{j} - \binom{y_1}{j} - \binom{y_2}{j} - \dots - \binom{y_k}{j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r - 1.$$

Рассмотрим все $(r-1)$ -мерные векторы

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i, \sum_{i=1}^k \binom{x_i}{2}, \dots, \sum_{i=1}^k \binom{x_i}{r-1} \right),$$

где $1 \leq x_i \leq N$. Ясно, что j -я компонента этих векторов принимает неотрицательные целочисленные значения, не превосходящие $k \binom{N}{j}$. Кроме того, первая компонента принимает лишь положительные значения, а при $r \leq N/2$ j -я компонента ($1 \leq j \leq r-1$) не равна, скажем, $k \binom{N}{j} - 1$. Поэтому общее количество различных векторов не превосходит

$$\prod_{j=1}^{r-1} k \binom{N}{j} \leq k^{r-1} N^{r(r-1)/2} \prod_{j=1}^{r-1} (j!)^{-1}.$$

Используя неравенство $j! > (j/e)^j$ и индукцию по r , имеем

$$\prod_{j=1}^{r-1} j! > \frac{r^2 (\log r - 2)}{2}.$$

Следовательно, количество различных векторов не превосходит

$$k^{r-1} \left(\frac{8N}{r} \right)^{r^2/2} < (aN)^r \left(\frac{8N}{r} \right)^{r^2/2}.$$

Если это меньше количества неупорядоченных наборов $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, т.е. меньше $\binom{N+k-1}{k}$, то хотя бы два вектора совпадают при различных наборах, и система Терри имеет нетривиальное решение.

Для доказательства теоремы остается проверить неравенство

$$(aN)^r \left(\frac{8N}{r} \right)^{r^2/2} < \binom{N + [aN/2] - 1}{N-1}, \quad (10)$$

где

$$r = \left(\theta - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sqrt{\frac{f(a)N}{\log N}},$$

а θ равно соответственно $\sqrt{2}$ или 2. В обоих случаях теоремы числа N и aN достаточно большие, поэтому с помощью формулы Стирлинга

$$e^{-1/(12j)} < \frac{j!}{\sqrt{2\pi j} (j/e)^j} < e^{1/(12j)}$$

легко получить оценку снизу для биномиального коэффициента

$$\begin{aligned} \binom{N + [aN/2] - 1}{N-1} &= \frac{N}{N + [aN/2]} \frac{(N + [aN/2])!}{N! [aN/2]!} \\ &> \frac{1}{(N + aN/2)^3} \left(\frac{(1 + a/2)^{1+a/2}}{(a/2)^{a/2}} \right)^N = \frac{1}{(N + aN/2)^3} e^{f(a)N}. \end{aligned}$$

Прологарифмируем неравенство (10) и проверим, что

$$(r+3)\log(N+aN) + \frac{r^2}{2} \log\left(\frac{8N}{r}\right) < f(a)N. \quad (11)$$

Возьмем достаточно малое $\delta > 0$, и пусть N достаточно большое. В обоих случаях $(1/(\delta N) \leq a \leq 2^{N-1}$ и $N^{-\delta} \leq a \leq 2^{N-1}$) имеем

$$(r+3)\log(N+aN) = \left(\left(\theta - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sqrt{\frac{f(a)N}{\log N}} + 3 \right) \log(N+aN) < \frac{\varepsilon}{8} f(a)N.$$

Ясно также, что число r достаточно большое, так как

$$f(a) > \frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{2}{a}\right) > \frac{\log(\delta N)}{2\delta N}.$$

Поэтому если $1/(\delta N) \leq a$ и ε достаточно мало, то

$$\frac{r^2}{2} \log\left(\frac{8N}{r}\right) < \frac{r^2}{2} \log N = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \varepsilon)^2 f(a)N < (1 - \varepsilon)f(a)N.$$

Следовательно, неравенство (11) выполняется, что доказывает (5).

Если $a \geq N^{-\delta}$ и N достаточно большое, то

$$f(a) > \frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{2}{a}\right) > \frac{\delta \log N}{2 N^\delta}.$$

Поэтому r можно оценить снизу

$$r = \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{\frac{f(a)N}{\log N}} > N^{1/2-\delta}.$$

Следовательно, $8N/r < N^{1/2-2\delta}$ и

$$\frac{r^2}{2} \log\left(\frac{8N}{r}\right) < \left(\frac{1}{4} - \delta\right) r^2 \log N < \left(\frac{1}{4} - \delta\right) \left(4 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f(a)N < \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) f(a)N.$$

Теорема доказана, так как неравенство (11) по-прежнему выполняется.

Подобным образом можно доказать и неравенство (3). Пусть все $x_1, x_2, \dots, x_k$ различны. Число таких наборов равно $\binom{N}{k}$, а вместо (10) теперь имеем неравенство

$$k^r \left(\frac{8N}{r}\right)^{r^2/2} < \binom{N}{k}.$$

Для любого ε , $0 < \varepsilon < 1/2$, и достаточно большого N это неравенство выполняется, если взять $k = \lfloor N/2 \rfloor$ и

$$r = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{4 \log 2 \frac{N}{\log N}}.$$

Несколько более сложными комбинаторными рассуждениями можно сосчитать количество наборов $\{x_1, \dots, x_k\}$, где среди $x_1, \dots, x_k$ не более, чем H одинаковых чисел. Выбирая k оптимальным образом, получим неравенство Бомбьери и Ваалера (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bloch A., Pólya G. On the roots of certain algebraic equations // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 33. P. 102–114.
- [2] Mignotte M. Sur la répartition des racines des polynômes // J. Théor. Anal. Elém. Nombres. Caen, 29–30 septembre 1980. P. 24–34.
- [3] Bombieri E. On the Thue–Siegel theorem // Acta Math. 1982. V. 148. P. 255–296.
- [4] Bombieri E., Vaaler J. On Siegel's lemma // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 11–32.
- [5] Bombieri E., Vaaler J. Polynomials with low height and prescribed vanishing // Analytic Number Theory and Diophantine Problems / ed. A.C. Adolphson, J.B. Conrey, A. Ghosh, R.I. Yager. Progr. Math. V. 70. Boston: Birkhäuser, 1987. P. 53–73.
- [6] Amoroso F. Polynomials with prescribed vanishing at roots of unity // Boll. Un. Mat. Ital. B (7).. 1995. V. 9. № 7. P. 1021–1042.
- [7] Dobrowolski E. On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial // Acta Arith. 1979. V. 34. P. 391–401.
- [8] Dubickas A. On algebraic numbers of small measure // Lithuanian Math. J. 1995. V. 35. P. 333–342.
- [9] Dubickas A. On a polynomial with large number of irreducible factors (to appear).
- [10] Schur I. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. I. Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1933. H. 7/10. P. 403–428.
- [11] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.
- [12] Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Наука, 1964.
- [13] Vooley T. Some remarks on Vinogradov's mean value theorem and Tarry's problem // Monatsh. Math. 1996. V. 122. P. 265–273.
- [14] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

Вильнюсский университет

E-mail: arturas.dubickas@maf.vu.lt

Поступило

20.05.98

Исправленный вариант

28.10.98