Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Руткаускас, О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 270–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:16:14

О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой

С. Руткаускас

В данной работе рассматривается задача типа Дирихле для системы эллиптических уравнений второго порядка с вырождением на прямой, пересекающей ее область определения. Обсуждается задача типа Дирихле с дополнительным условием в виде асимптотики решения, заданной на этой прямой. Доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи в классе функций Гёльдера.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: эллиптические системы, вырождение, задача Дирихле, асимптотика решений.

DOI: 10.4213/mzm11160

1. Введение. Пусть Ω – область точек $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, с границей $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Предположим, что она содержит цилиндр $\{(x, z) : |x| < R, H_1 < z < H_2\}$ и оба основания этого цилиндра лежат на границе Γ . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} Lu := A(x, z)u_{zz} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, z)u_{x_i x_j} \\ + B(x, z)u_z + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x_i B_i(x, z)u_{x_i} + C(x, z)u = f(x, z), \quad (x, z) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где матрицы

$$\begin{aligned} A = \text{diag}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)}), \quad B = \text{diag}(b^{(1)}, \dots, b^{(m)}), \quad C = (c_{kl}), \quad k, l = 1, \dots, m, \\ A_{ij} = \text{diag}(a_{ij}^{(1)}, \dots, a_{ij}^{(m)}), \quad B_i = \text{diag}(b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(m)}), \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и вектор-функция $f = (f_1, \dots, f_m)$ принадлежат банахову пространству $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, и $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Будем использовать следующие обозначения: $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, Q_ρ – боковая поверхность $\{(x, z) : r = \rho, H_1 < z < H_2\}$ цилиндра $C_\rho = \{(x, z) : r < \rho, H_1 < z < H_2\}$, $B_{i\rho}$, $i = 1, 2, \dots, n$ – основания $\{(x, z) : r < \rho, z = H_i\}$ этого цилиндра, $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{x = 0\}$ и $|\cdot|_{l,\alpha;\Omega}$, $|\cdot|_{l;\Omega}$ – нормы в банаховых пространствах $C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $C^l(\bar{\Omega})$, $l \geq 0$ – целое число.

Кроме того, будем рассматривать область $\Omega_\delta = \Omega \cap \{(x, z) : r > \delta\}$, где $0 \leq \delta < R$. Следовательно, граница $\partial\Omega_\delta$ этой области образована двумя поверхностями $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \{(x, z) : r > \delta\}$ и Q_δ и двумя прямыми $E_{\delta i} = \{(x, z) : r = \delta, z = H_i\}$, $i = 1, 2$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) матрица A является положительно определенной в $\bar{\Omega}$, т.е.

$$a^{(k)}(x, z) > 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \quad k = 1, \dots, m;$$

(ii) существуют непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции ν_1 , ν_2 и число $\gamma > 0$ такие, что $0 < \nu_1(x, z) \leq \nu_2(x, z)$ при $x \neq 0$,

$$\nu_2(x, z) = O(r^{1+\gamma}) \quad \text{равномерно при } r \rightarrow 0,$$

и равенство

$$\nu_1(x, z)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z)\xi_i\xi_j \leq \nu_2(x, z)|\xi|^2, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

выполняется в $\bar{\Omega}$ при любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$;

(iii) неравенства

$$c_k := c_{kk} + \sum_{l \neq k} |c_{kl}| < 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

выполняются всюду в Ω_0 .

Из условий (i) и (ii) следует, что (1.1) – эллиптическая система в Ω_0 , вырождающаяся в систему параболического типа на прямой $x = 0$.

Наша цель – исследовать задачу типа Дирихле для системы (1.1) в области Ω . Задача типа Дирихле вида

$$u = g \quad \text{на } \Gamma_0, \quad |u| < \infty \quad \text{в } \Omega_0$$

для системы (1.1) рассматривалась в работе [1]. (Заметим, что в этой задаче участвуют только граничное условие и условие ограниченности решения.) Аналогичная задача для эллиптической системы с вырождением ее порядка на некоторой прямой, пересекающей ее область определения, обсуждалась в работе [2], где были получены достаточные условия для существования единственного решения в классе функций Гёльдера. Аналогичная задача Дирихле решена в работе [3] для уравнения

$$u_{zz} + (x^2 + y^2)^\alpha (u_{xx} + u_{yy}) - au = 0, \quad \alpha = 1, \frac{1}{2},$$

которое, очевидно, является частным случаем уравнения (1.1).

Однако такая постановка задачи Дирихле для этого уравнения не всегда корректна. Такая ситуация возникает потому, что это уравнение может иметь “слишком много” решений, ограниченных на прямой $x = 0$. Следовательно, для того, чтобы получить корректную задачу типа Дирихле, нужно сформулировать некоторое дополнительное условие. В работах [4]–[6] показано, что в случае вырождения во внутренней точке, некоторая заданная асимптотика решения может играть роль такого условия. Итак, в данной работе изучается задача типа Дирихле для уравнения (1.1) с дополнительным условием в виде асимптотики решения, заданной вблизи линии вырождения $x = 0$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим класс вектор-функций

$$C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega) = \{u : u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\delta}) \text{ для всех } \delta > 0, |u| < \infty \text{ в } \Omega_0\}.$$

Будем рассматривать следующую задачу типа Дирихле:

$$Lu = f \quad \text{в } \Omega_0, \quad u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega), \quad (2.1)$$

$$u = g \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(u(x, z) - h\left(\frac{x}{r}, z\right) \right) = 0, \quad (2.3)$$

где $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ и $h = (h_1, \dots, h_n) \in C^{2,\alpha}(Q_1)$ – заданные вектор-функции. Таким образом, в данной постановке основная часть асимптотики решения $u(x, z)$ определяется формулой (2.3) дополнительно к условию Дирихле (2.2).

Заметим, что условие (2.3) означает, что решение u этой задачи не является непрерывным (в общем случае) на линии вырождения $x = 0$. Если мы хотим иметь решение непрерывное на этой прямой, то нужно заменить условие (2.3) на более строгое условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, z) = h(z).$$

3. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\Omega' \subset \Omega$ – подобласть, лежащая вне прямой $x = 0$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in C^2(\Omega') \cap C^0(\overline{\Omega'})$ – решение уравнения (1.1), и пусть существует $\sup_{\Omega_0} |f_k/c_k|$ для всех $k = 1, \dots, m$. Если условие (1.3) выполнено, то имеет место оценка

$$|u_j|_{0;\Omega'} \leq \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \max_{\Omega'} |u_k|, \sup_{\Omega_0} \left| \frac{f_k}{c_k} \right| \right\}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Лемма 1 доказывается простым повторением рассуждений в доказательстве леммы 1 в работе [2]. Заметим, что при $m = 1$ оценка (3.1) совпадает с хорошо известным принципом максимума для отдельных эллиптических уравнений (см., например, [7]). Таким образом, эту оценку можно назвать аналогом классического принципа максимума. Рассмотрим оператор

$$L_k = a^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x_i b_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_i} + c_{kk}. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 2. Предположим, что матрицы B_i , $i = 1, \dots, n$, совпадают на прямой $x = 0$ и, кроме того,

$$b^{(k)}(z) := b_1^{(k)}(0, z) = \dots = b_n^{(k)}(0, z) \neq 0 \quad \text{для всех } z \in [H_1, H_2], \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

Пусть $\beta \in (0, \lambda)$, где $\lambda = \min\{\alpha, \gamma\}$. Тогда

$$L_k r^\beta = \beta b^{(k)}(z) r^{\beta-1} (1 + O(r^\lambda)) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственными вычислениями получим

$$\begin{aligned} L_k r^\beta &= \beta(\beta - 2)r^{\beta-4} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z)x_i x_j \\ &+ \beta r^{\beta-3} \sum_{i=1}^n (r a_{ii}^{(k)}(x, z) + x_i^2 b_i^{(k)}(x, z)) + r^\beta c_{kk}(x, z). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из условия (1.2) следует очевидные соотношения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z)x_i x_j, \quad r^2 \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(k)}(x, z) = O(r^{\gamma-1}) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Далее, принимая во внимание условие (3.3) и включения $B_i \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$, получим

$$b_i^{(k)}(x, z) - b^{(k)}(z) = b_i^{(k)}(x, z) - b_i^{(k)}(0, z) = O(r^\alpha) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

при всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 b_i^{(k)}(x, z) &= r^2 b^{(k)}(z) + \sum_{i=1}^n x_i^2 (b_i^{(k)}(x, z) - b^{(k)}(z)) \\ &= r^2 (b^{(k)}(z) + O(r^\alpha)) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.5) и (3.6) следует соотношение (3.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $q \in C^2(Q_1)$ – скалярная функция и $\hat{q}$ – ее продолжение по нулевой однородности равномерно относительно x на слой $\mathbb{R}_0^n \times [H_1, H_2]$, т.е., $\hat{q}(x, z) = q(x/r, z)$, и пусть λ – число из леммы 2. Тогда

$$L_k \hat{q} = O(r^{\lambda-1}) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$ – вектор с компонентами $y_k = x^k/r$, $k = 1, \dots, n$. Прямым дифференцированием получим

$$\begin{aligned} L_k \hat{q} &= a^{(k)}(x, z) \frac{\partial^2 q(y, z)}{\partial z^2} + \sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 q(y, z)}{\partial y_p \partial y_q} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \\ &+ \sum_{p=1}^n \frac{\partial q(y, z)}{\partial y_p} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z) \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n y_i b_i^{(k)}(x, z) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \right) \\ &+ b^{(k)}(x, z) \frac{\partial q(y, z)}{\partial z} + c_{kk}(x, z) q(y, z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что из условия (ii) следует соотношение

$$a_{ij}^{(k)}(x, z) = O(r^{1+\gamma}) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Далее, легко видеть, что

$$\frac{\partial y_p}{\partial x_i} = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad i, j, p = 1, \dots, n.$$

Следовательно, выполняются соотношения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z) \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x, z) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} = O(r^{\gamma-1}) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что из равенства

$$\sum_{i=1}^n x_i \hat{q}_{x_i} = 0,$$

которое выполняется ввиду нулевой однородности функции $\hat{q}$ относительно x , в соответствии с (3.6) получим

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \frac{\partial q(y, z)}{\partial y_p} \sum_{i=1}^n y_i b_i^{(k)}(x, z) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \\ = \sum_{p=1}^n \frac{\partial q(y, z)}{\partial y_p} \sum_{i=1}^n y_i (b_i^{(k)}(x, z) - b_0^{(k)}(z)) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} = O(r^{1-\alpha}) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что все производные функции $q(y, z)$ до второго порядка включительно относительно всех переменных y_k, z ограничены в $\mathbb{R}_0^n \times [0, H]$ в силу включения $q \in C^2(Q_1)$. Следовательно, равенство (3.7) следует из (3.8) в силу (3.9) и (3.10). Лемма доказана.

4. Существование и единственность решения задачи (2.1)–(2.3). Предположим, что выполнены условия согласованности

$$g(x, H_i) = h\left(\frac{x}{r}, H_i\right), \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

при $|x| < \rho$ и некоторым $\rho \leq R$. Пусть x_0 – фиксированная точка на сфере $|x| = \varepsilon < \rho$, где ε выбирается произвольным образом, и пусть $\Sigma_\varepsilon^{(i)}, i = 1, 2$, – поверхности, полученные вращением сфер

$$\left\{ (x, z) : |x - x_0|^2 + \left(z - H_i + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \right\}$$

вокруг оси z соответственно. Обозначим через $\sigma_\varepsilon^{(i)}$ части поверхности $\Sigma_\varepsilon^{(i)}$, лежащие в цилиндрическом кольце $\{(x, z) : \varepsilon/2 \leq |x| \leq \varepsilon, H_1 \leq z \leq H_2\}$. Составим область Ω_ε^* с границей $\partial\Omega_\varepsilon^* = \Gamma_\varepsilon \cup Q_{\varepsilon/2}^* \cup \sigma_\varepsilon^{(1)} \cup \sigma_\varepsilon^{(2)}$, где $Q_{\varepsilon/2}^*$ – часть цилиндрической поверхности $Q_{\varepsilon/2}$, находящаяся между плоскостями

$$z = H_1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad z = H_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon^*$ и $\partial\Omega_\varepsilon^* \in C^{2,\alpha}$, т.е. область Ω_ε^* не имеет ребра, в противоположность области Ω_ε . Введем вектор-функцию $\varphi_\varepsilon = (\varphi_{\varepsilon 1}, \dots, \varphi_{\varepsilon m})$ по формуле

$$\varphi_{i\varepsilon}(x, z) = \begin{cases} g_i(x, z) & \text{при } (x, z) \in \Gamma_\varepsilon, \\ h_i\left(\frac{x}{r}, z\right) & \text{при } (x, z) \in \partial\Omega_\varepsilon^* \setminus \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $\{\delta_k\}$ – последовательность чисел такая, что $\delta_k \downarrow 0$, $\delta_k < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть $\{\Omega_{\delta_k}^*\}$ – последовательность соответствующих областей, построенных по вышеприведенному правилу. Легко видеть, что

$$\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon^* \subset \Omega_{\delta_k}^* \subset \Omega_{\delta_{k+1}}^* \subset \Omega_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $A, B, A_{ij}, B_i, i, j = 1, \dots, n$, и $C \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{\delta_k}^*})$, $\partial\Omega_{\delta_k}^* \in C^{2,\alpha}$, и из формулы (1.2) следует, что оператор L – равномерно эллиптический в каждой области $\Omega_{\delta_k}^*$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда и из леммы 1 следует [8]–[10] существование единственного решения $u^k = (u_1^k, \dots, u_m^k) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{\delta_k}^*})$ задачи Дирихле

$$Lu = F \quad \text{в } \Omega_{\delta_k}^*, \quad u|_{\partial\Omega_{\delta_k}^*} = \varphi_{\delta_k}. \quad (4.2)$$

Применяя *априорные* оценки [8]–[10] к оператору L , включая часть Γ_ε границы $\partial\Omega_\varepsilon^*$, получим

$$|u_j^k|_{2,\alpha;\Omega_\varepsilon^*} \leq M_\varepsilon \sum_{i=1}^m (|f_i|_{0,\alpha;\Omega_{\delta_k}^*} + |u_i^k|_{0;\Omega_{\delta_k}^*} + |\varphi_{i\varepsilon}|_{2,\alpha;\Gamma_\varepsilon}) \quad (4.3)$$

с константой M_ε , зависящей от ε .

В соответствии с леммой 1 имеем неравенство

$$|u_j^k|_{0;\Omega_{\delta_k}^*} \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{\partial\Omega_{\delta_k}^*} |\varphi_{i\delta_k}|, \sup_{\Omega_0} \left| \frac{f_i}{c_i} \right| \right\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Так как

$$\max_{\partial\Omega_{\delta_k}^*} |\varphi_{i\delta_k}| \leq \max \left\{ \max_{\Gamma_{\delta_k}} |g_i|, \max_{Q_1} |h_i| \right\} \leq \max \left\{ \max_{\Gamma} |g_i|, \max_{Q_1} |h_i| \right\}, \quad j = 1, \dots, m,$$

и $\Omega_{\delta_k} \subset \Omega_{\delta_k}^*$, получим оценку

$$|u_j^k|_{0;\Omega_{\delta_k}} \leq |u_j^k|_{0;\Omega_{\delta_k}^*} \leq M_1 := \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{\Gamma} |g_i|, \max_{Q_1} |h_i|, \sup_{\Omega_0} \left| \frac{f_i}{c_i} \right| \right\}. \quad (4.4)$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} |f_i|_{0,\alpha;\Omega_{\delta_k}} &\leq M_2 := \max_{1 \leq i \leq m} |f_i|_{0,\alpha;\Omega}, \\ \max_{1 \leq i \leq m} |g_i|_{2,\alpha;\Gamma_{\delta_k}} &\leq M_3 := \max_{1 \leq i \leq m} |g_i|_{2,\alpha;\Gamma} \end{aligned}$$

и неравенство (4.4), из (4.3) получим

$$|u_j^k|_{2,\alpha;\Omega_\varepsilon^*} \leq nM_\varepsilon(M_1 + M_2 + M_3).$$

Таким образом, последовательность $\{u^k\}$ равномерно ограничена в $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\varepsilon^*})$, т.е. компактна в $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\varepsilon^*})$. Следовательно, существует некоторая подпоследовательность $\{u^{k_i}\} \subset \{u^k\}$, сильно сходящаяся в $C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$ к некоторому u_ε : $Lu_\varepsilon = f$ в Ω_ε^* , $u|_{\Gamma_\varepsilon} = g$. Заметим, что, в действительности, $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\varepsilon^*})$, поскольку $u^{k_i} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\varepsilon^*})$, $i = 1, 2, \dots$, и пространство $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\varepsilon^*})$ полное.

Применим метод диагонализации для доказательства существования решения задачи (2.1)–(2.3).

Выберем δ произвольным образом и предположим, что $\{\varepsilon_j\}$ – числовая последовательность такая, что $\varepsilon_j \downarrow 0$. Через $\{\Omega_{\varepsilon_j}^*\}$ обозначим последовательность областей, соответствующих последовательности $\{\varepsilon_j\}$. Пусть $\{u^{1k}\}$ – последовательность решений $u^{1k} = (u_1^{1k}, \dots, u_m^{1k})$ задачи Дирихле вида (4.2), построенная так же, как и $\{u^k\}$ при $\varepsilon = \varepsilon_1$. Из вышесказанного следует, что существует подпоследовательность $\{u^{1k_i}\} \subset \{u^{1k}\}$, которая сильно сходится к некоторому решению $u_{\varepsilon_1} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{\varepsilon_1}^*})$: $Lu_{\varepsilon_1} = F$ в $\Omega_{\varepsilon_1}^*$, $u|_{\Gamma_{\varepsilon_1}} = g$. Далее, пусть $\{u^{2k_i}\} \subset \{u^{1k_i}\}$ – подпоследовательность, строго сходящаяся к некоторому $u_{\varepsilon_2} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{\varepsilon_2}^*})$: $Lu_{\varepsilon_2} = F$ в $\Omega_{\varepsilon_2}^*$, $u|_{\Gamma_{\varepsilon_2}} = g$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность $\{u^{jk_i}\}$, $j = 1, 2, \dots$, такую, что $\{u^{j+1,k_i}\} \subset \{u^{jk_i}\}$ и

$$|u^{jk_i} - u_{\varepsilon_j}|_{2;\Omega_{\varepsilon_j}^*} \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

где $u_{\varepsilon_j} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_{\varepsilon_j}^*})$ – некоторое решение системы (1.1), удовлетворяющее граничному условию $u|_{\Gamma_{\varepsilon_j}} = g$.

Применяя метод диагонализации, введем последовательность $\{v^l\}$, где $v^l = u^{lk_l}$. Пусть j_0 удовлетворяет условию, что $\varepsilon_j \leq \delta$ при $j \geq j_0$. Тогда $\Omega_\delta \subset \Omega_{\varepsilon_{j_0}}$ и $v^l \in \{\tilde{u}^{j_0 k_l}\}$ при $l \geq j_0$. Таким образом, последовательность $\{v^l\}$ сильно сходится в пространстве $C^2(\overline{\Omega_{\varepsilon_{j_0}}})$ к некоторому пределу $u = (u_1, \dots, u_m)$ в силу выбора последовательности $\{u^{j_0 k_l}\}$. Так как $C^2(\overline{\Omega_\delta}) \subset C^2(\overline{\Omega_\delta^*}) \subset C^2(\overline{\Omega_{\varepsilon_{j_0}}^*})$, получим

$$|v^l - u|_{2,\Omega_\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty$$

и, очевидно,

$$\mathcal{L}u = F \quad \text{в } \Omega_\delta \quad u|_{\Gamma_\delta} = g.$$

Кроме того, фактически имеем, что $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\delta})$, так как $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_\delta})$ – полное пространство. Так как δ выбирается произвольно, получим $u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\Omega_0)$ и

$$\mathcal{L}u = F \quad \text{в } \Omega_0, \quad u|_{\Gamma_0} = g.$$

Остается доказать, что выполняется асимптотическое условие (2.3). Для этого введем функции

$$w_j^\pm(x, z) = \hat{h}_j(x, z) \pm \varkappa r^\beta,$$

где $\hat{h}_j$, $j = 1, \dots, m$, – компоненты вектор-функции $\hat{h}(x, z) = h(x/r, z)$, $\beta \in (0, \lambda)$ – число из леммы 2, и $\varkappa$ – некоторая положительная константа, которая будет выбрана ниже.

Пусть L_j – оператор, определенный формулой (3.2), и пусть $u = (u_1, \dots, u_m)$ – полученное выше решение системы (1.1). Очевидно, что

$$L_j(u_j) = f_j(x, z) - \sum_{k=1}^m c_{jk}(x, z)u_k = O(1) \quad \text{в } \Omega_0,$$

так как u равномерно ограничено в Ω_0 . Теперь, принимая во внимание обе леммы 2 и 3, получим

$$L_j(u_j - w_j^\pm) = \mp \beta \varkappa b_0^{(j)}(z) r^{\beta-1} (1 + O(r^{\lambda-\beta})) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Так как $B_0(z)$ – отрицательно определенная матрица на интервале $[H_1, H_2]$, а числа β и $\varkappa$ положительны, из этого соотношения следует существование достаточно малого числа $\tilde{\delta}$ такого, что

$$L_j(u_j - w_j^+) > 0, \quad L_j(u_j - w_j^-) < 0 \quad (4.5)$$

всюду в цилиндре $C_{\tilde{\delta}}^0 = C_{\tilde{\delta}} \setminus \{x = 0\}$.

Предположим, что постоянная $\varkappa$ выбрана настолько большой, что

$$u_j - w_j^+ < 0, \quad u_j - w_j^- > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

на боковой поверхности $Q_{\tilde{\delta}}$ цилиндра $C_{\tilde{\delta}}^0$. Кроме того, в силу условия (4.1) имеем

$$(u_j - w_j^{\pm})|_{z=H_i} = g(x, H_i) - \hat{h}(x, H_i) \mp \varkappa r^{\beta} = \mp \varkappa r^{\beta},$$

т.е. неравенства (4.6) выполняются на обоих основаниях цилиндра $C_{\tilde{\delta}}^0$. Следовательно, из принципа Хопфа [11] следует, что выполняются неравенства (4.6) или, что то же самое,

$$|u_j(x, z) - \hat{h}_j(x, z)| \leq \varkappa r^{\beta}, \quad j = 1, \dots, m,$$

всюду в $C_{\tilde{\delta}}^0$. Очевидно, отсюда следует выполнение асимптотического условия (2.3).

Покажем, что решение задачи (2.1)–(2.3) единственно. Пусть снова $\delta > 0$ – произвольное число. Так как подпоследовательность $\{v^l\}$ равномерно сходится к u в Ω_{δ}^* , из (4.4) следует оценка

$$|u_j|_{0; \Omega_{\delta}} \leq |u_j|_{0; \Omega_{\delta}^*} \leq M_1, \quad j = 1, \dots, m,$$

где M_1 – постоянная из (4.4). Так как δ – произвольное число, отсюда следуют оценки

$$\sup_{\Omega_0} |u_j| \leq M_1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Предположим, что $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ – решения задачи (2.1)–(2.3). Тогда разность $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ будет решением задачи (2.1)–(2.3), где f , g и h тождественно равны нулю, т.е. эта разность удовлетворяет неравенству (4.7), где $M_1 = 0$. Следовательно, $u \equiv 0$ в Ω_0 .

Таким образом, приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что условия (i)–(iii) выполнены и матричные коэффициенты B_i , $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условию (3.3). Пусть $B(z) = \text{diag}(b_0^{(1)}(z), \dots, b_0^{(m)}(z))$ – отрицательно определенная матрица на интервале $[H_1, H_2]$, и пусть выполнены условия согласованности (4.1). Тогда решение задачи (2.1)–(2.3) существует и единственно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Руткаускас, “О первой краевой задаче для системы эллиптических уравнений с вырождением на прямой”, *Тр. ин-та матем. НАН Беларуси*, **10** (2001), 126–129.
- [2] S. Rutkauskas, “Dirichlet type problem for the system of elliptic equations, which order degenerate at a line”, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19:3** (2014), 476–487.

- [3] А. И. Янушаускас, “К задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **7**:1 (1971), 166–174.
- [4] С. Руткаускас, “Задачи Дирихле с асимптотическими условиями для вырождающейся в точке эллиптической системы. I”, *Дифференц. уравнения*, **38**:3 (2002), 385–392.
- [5] С. Руткаускас, “Задачи Дирихле с асимптотическими условиями для вырождающейся в точке эллиптической системы. II”, *Дифференц. уравнения*, **38**:5 (2002), 681–686.
- [6] S. Rutkauskas, “On the influence of the lowest terms on Dirichlet type problems for elliptic systems degenerate at a point”, *Lithuanian Math. J.*, **41**:3 (2001), 282–291.
- [7] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [8] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 35–92.
- [9] В. А. Солонников, “Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагглиса–Л. Ниренберга. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:3 (1964), 665–706.
- [10] В. А. Солонников, “Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагглиса–Л. Ниренберга. II”, *Краевые задачи математической физики*. 4, Тр. МИАН СССР, **92**, 1966, 233–297.
- [11] E. Hopf, “Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus”, *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, **19** (1927), 147–152.

С. Руткаускас

Institute of Mathematics and Informatics,

Vilnius University, Литва

E-mail: stasys.rutkauskas@mii.vu.lt

Поступило

15.09.2015