Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Иванова, Мажорантные оценки для частичных сумм кратных рядов Фурье функций из пространств Орлича, равных нулю на некотором множестве, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 821–830

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:26:43

УДК 517.5

МАЖОРАНТНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА, РАВНЫХ НУЛЮ НА НЕКОТОРОМ МНОЖЕСТВЕ

О. К. Иванова

В работе рассматриваются $\sup_n |S_n(x; f)|$ – мажоранты частичных сумм двойных тригонометрических рядов Фурье функций из $L(\log^+ L)^3$, равных 0 на некоторых подмножествах $T^2 = [-\pi, \pi)^2$. В частности, доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x) \in L(\log^+ L)^3(T^2)$ и $f(x) = 0$ на $T^2 \setminus Q$, где Q – квадрат со сторонами, параллельными координатным осям ($Q \subset T^2$). Тогда для любого $\delta > 0$ существует константа $C_\delta > 0$ такая, что

$$\left\| \sup_n |S_n(x; f)| \right\|_{L_1(T_\delta^2 \setminus Q)} \leq C_\delta \iint_Q |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^3 dx + C_\delta,$$

где $T_\delta^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi + \delta \leq x_j \leq \pi - \delta, j = 1, 2\}$, C_δ – константа, не зависящая ни от функции f , ни от квадрата Q .

Библиография: 15 названий.

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать через $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $nx = n_1x_1 + \dots + n_Nx_N$.

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$ определим множество $\mathbb{R}_\lambda^N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j \geq \lambda, j = 1, \dots, N\}$. Кроме того, введем множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и положим $\mathbb{Z}_\lambda^N = \mathbb{Z}^N \cap \mathbb{R}_\lambda^N$.

Пусть $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция, через $\Phi(L) = \Phi(L)(T^N)$ обозначим множество суммируемых функций f таких, что

$$\int_{T^N} \Phi(|f(x)|) dx < \infty,$$

где $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, N\}$. Если $\Phi(u) = u^p$, то $\Phi(L) = L_p(T^N)$, $p \geq 1$, если $\Phi(u) = u \log^+ u$, где $\log^+ u = \log \max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L \log^+ L$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332, а также при поддержке проекта “Ведущие научные школы РФ”, грант № 96-15-96073.

Пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f(x) \in \Phi(L)(T^N)$, $N \geq 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}. \quad (1)$$

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \cdots \sum_{|k_N| \leq n_N} c_k e^{i(k_1 x_1 + \cdots + k_N x_N)}, \quad (2)$$

частным случаем которой является квадратная частичная сумма $S_{n_0}(x; f)$, когда $n_1 = n_2 = \cdots = n_N = n_0$.

При этом под *сходимостью ряда в (1) по прямоугольникам* будем понимать существование предела частичных сумм (2) при $n \rightarrow \infty$, т.е. при $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$, а под *сходимостью ряда в (1) по квадратам* – существование предела $S_{n_0}(x; f)$ при $n_0 \rightarrow \infty$.

Пусть Ω – произвольное измеримое множество, $\Omega \subset T^N$, $N \geq 1$, $0 < \mu\Omega < (2\pi)^N$ ($\mu = \mu_N$ есть N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на Ω .

2. Для кратных рядов Фурье И. Л. Блошанским было введено понятие обобщенной локализации почти всюду (см. [1], [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Omega \subset T^N$ – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $\Phi(L)$ (L_∞) справедлива на множестве Ω *обобщенная локализация почти всюду*, если из условия $f \in \Phi(L)(T^N)$ ($f \in L_\infty(T^N)$), $f(x) = 0$ на Ω , следует, что почти всюду на Ω существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0.$$

В работах [1], [2] был доказан обобщенный принцип локализации почти всюду для двойных тригонометрических рядов Фурье, который можно сформулировать, в частности, в следующем виде (см. также [3]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $\Omega \subset T^2$ – произвольное (непустое) открытое множество и пусть $f(x) \in L_p(T^2)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на Ω . Тогда

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu\Omega_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$, и постоянная $C(\varepsilon, p)$ такие, что

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^2} |S_n(x; f)| \right\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\varepsilon, p) \|f\|_{L_p(T^2)}. \quad (3)$$

Таким образом, из теоремы А следует, что обобщенная локализация почти всюду справедлива на любых открытых почти всюду множествах $\Omega \subset T^2$ для двойных рядов Фурье функций из классов $L_p(T^2)$, $p > 1$. Множество Ω назовем *открытым почти всюду*, если существует открытое множество E такое, что $\mu(\Omega \Delta E) = 0$.

Обзор результатов, показывающих существенность ограничений в теореме А ($N = 2$, $p > 1$, Ω – открытое множество), см., например, в [4]–[6].

Результаты теоремы А (в частности, оценка (3)) привели к новому вопросу. Существуют ли открытые почти всюду множества $\Omega \subset T^2$ такие, что мажорантная оценка (3) справедлива на всем множестве Ω ? Другими словами, влияет ли геометрия открытого почти всюду двумерного множества Ω на мажорантную оценку (3)?

Пусть $Q \subset T^2$ – квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, т.е.

$$Q = [a, a + q] \times [b, b + q], \quad (4)$$

где $a, b, q \in \mathbb{R}^1$, $q > 0$.

В работе [7] Блошанским была доказана (см. [7, лемма 3])

ТЕОРЕМА Б. Пусть $f(x) \in L_p(T^2)$, $p > 1$, и пусть $f(x) = 0$ на $T^2 \setminus Q$. Тогда

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^2} |S_n(x; f)| \right\|_{L_p(T^2 \setminus Q)} \leq C(p) \|f\|_{L_p(Q)}, \quad (5)$$

где квадрат Q определен в (4), константа $C(p)$ не зависит ни от функции f , ни от квадрата Q .

Как отмечалось в работе [7, с. 255], результат теоремы Б остается справедливым, если вместо квадрата (4) рассмотреть прямоугольник $[a, a + q_1] \times [b, b + q_2] \subset T^2$ или объединение конечного числа таких прямоугольников (в последнем случае константа $C(p)$ в (5) будет зависеть от числа прямоугольников).

В работах [8]–[10] продолжено исследование обобщенной локализации почти всюду на открытых множествах $\Omega \subset T^2$ в классах $\Phi(L)(T^2)$. В частности, в этих работах доказаны следующие результаты, обобщающие теорему А для функций из классов, “лежащих между” L_1 и L_p , $p > 1$, равных 0 на открытом множестве Ω .

ТЕОРЕМА В. Пусть $\Omega \subset T^2$ – произвольное (непустое) открытое множество и $f(x) = 0$ на Ω . Тогда

1) если $f \in L \log^+ L \log^+ L(T^2)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \Omega;$$

2) если $f \in L(\log^+ L)^2(T^2)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu \Omega_\varepsilon > \mu \Omega - \varepsilon$, и постоянная $C_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^2} |S_n(x; f)| \right\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \int_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon.$$

Таким образом, обобщенная локализация почти всюду справедлива при $N = 2$ на открытых почти всюду множествах для функций из классов $L \log^+ L \log^+ \log^+ L(T^2)$; в свою очередь, мажорантная оценка на подмножестве Ω_ε множества Ω (сколь угодно мало отличающемся от всего множества Ω) справедлива уже для функций из класса $L(\log^+ L)^2(T^2)$.

3. Естественно возникает такой вопрос: для функций из какого класса $\Phi(L)(T^2)$, $\Phi(u) = o(u^p)$, $p > 1$, $u \rightarrow \infty$, будет справедлива оценка вида (5).

В настоящей работе мы даем следующий ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x) \in L(\log^+ L)^3(T^2)$ и $f(x) = 0$ на $T^2 \setminus Q$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует константа $C_\delta > 0$ такая, что

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^2} |S_n(x; f)| \right\|_{L_1(T_\delta^2 \setminus Q)} \leq C_\delta \iint_Q |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^3 dx + C_\delta, \quad (6)$$

где $T_\delta^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi + \delta \leq x_j \leq \pi - \delta, j = 1, 2\}$, квадрат Q определен в (4), константа C_δ не зависит ни от функции f , ни от квадрата Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так же, как теорема Б, сформулированная теорема остается справедливой, если вместо квадрата (4) рассмотреть прямоугольник $[a, a + q_1] \times [b, b + q_2]$, где $a, b, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^1$, $[a, a + q_1], [b, b + q_2] \subset T^2$, или объединение конечного числа таких прямоугольников (в последнем случае константа C в (6) будет зависеть от числа прямоугольников).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В основе доказательства сформулированной теоремы лежит конструкция, предложенная Блошанским для доказательства теоремы Б (см. [7, лемма 3]).

Далее, естественно возникает вопрос о справедливости оценки (6) в “более широком”, чем $L(\log^+ L)^3$ классе.

Очевидно, что оценка (6) несправедлива в тех классах $\Phi(L)$, где обобщенная локализация почти всюду несправедлива на открытых множествах. В частности, учитывая результат работы [10, теорема 2], оценка (6) несправедлива в любом классе $\Phi(L)$, где $\Phi(u) = o(u \log^+ \log^+ u)$ при $u \rightarrow \infty$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Отметим, что при доказательстве мы будем рассматривать и оценивать не частичную сумму $S_{n,m}(x, y; f)$, т.е. оператор

$$S_*(x, y; f) = \sup_{n, m > 0} |S_{n,m}(x, y; f)|,$$

а оператор

$$J_*(x, y; f_1) = \sup_{n, m > 0} |J_{n,m}(x, y; f_1)|, \quad (7)$$

где

$$J_{n,m}(x, y; f_1) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f_1(u, v) \frac{\sin n(u-x)}{u-x} \frac{\sin m(v-y)}{v-y} du dv \quad (8)$$

– собственный интеграл Фурье функции

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } (x, y) \in T^2, \\ 0 & \text{вне } T^2. \end{cases}$$

Мы можем себе это позволить, так как в [8] установлено, что для любой функции $f \in L(\log^+ L)^2(T^2)$ и любого $\delta > 0$ существует постоянная $C_\delta > 0$ такая, что

$$\|R_*(x, y; f)\|_{L_1(T_\delta^2)} \leq C_\delta \iint_{T^2} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C_\delta,$$

где $T_\delta^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi + \delta \leq x_j \leq \pi - \delta, j = 1, 2\}$,

$$R_*(x, y; f) = \sup_{n, m > 0} |R_{n, m}(x, y; f)| = \sup_{n, m > 0} |S_{[n], [m]}(x, y; f) - J_{n, m}(x, y; f_1)|,$$

$n, m \in \mathbb{R}^1$, $[n]$ – целая часть n (см. [8, теорема 3]).

Итак, рассмотрим $J_*(x, y; f_1)$. В силу определения функции f , а следовательно, и f_1 можем записать $J_{n, m}(x, y; f_1)$ в виде

$$J_{n, m}(x, y; f_1) = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \tilde{D}_n(u - x) \tilde{D}_m(v - y) du dv,$$

где $\tilde{D}_l(z) = (\sin lz)/z$ – упрощенное ядро Дирихле. Полагая $P = T^2 \setminus Q$ и учитывая (7), (8), имеем

$$\begin{aligned} J(f_1) &= \iint_P \sup_{n, m > 0} \left| \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f_1(u, v) \tilde{D}_n(u - x) \tilde{D}_m(v - y) du dv \right| dx dy \\ &= \iint_P J_*(x, y; f_1) dx dy = \iint_{P_1 + \dots + P_8} J_*(x, y; f_1) dx dy = \sum_{k=1}^8 \mathfrak{J}_k(f_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где $P_1, \dots, P_8$ определяются следующим образом. Так как квадрат (4) образован прямыми, делящими T^2 на девять частей, включая сам квадрат Q , то это означает, что множество $P = T^2 \setminus Q$ состоит из восьми прямоугольников. Занумеруем эти прямоугольники по часовой стрелке, начиная с левого нижнего прямоугольника. Таким образом, учитывая (4), имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= [-\pi, a] \times [-\pi, b], \quad P_2 = [-\pi, a] \times [b, b + q], \quad P_3 = [-\pi, a] \times [b + q, \pi], \\ P_4 &= [a, a + q] \times [b + q, \pi], \quad P_5 = [a + q, \pi] \times [b + q, \pi], \\ P_6 &= [a + q, \pi] \times [b, b + q], \quad P_7 = [a + q, \pi] \times [-\pi, b], \quad P_8 = [a, a + q] \times [-\pi, b]. \end{aligned}$$

Оценим интегралы $\mathfrak{J}_k(f_1)$, $k = 1, \dots, 8$. Интегралы $\mathfrak{J}_1(f_1)$, $\mathfrak{J}_3(f_1)$, $\mathfrak{J}_5(f_1)$, $\mathfrak{J}_7(f_1)$ оцениваются одинаково; в свою очередь, получение оценок для $\mathfrak{J}_2(f_1)$, $\mathfrak{J}_6(f_1)$, $\mathfrak{J}_4(f_1)$, $\mathfrak{J}_8(f_1)$ также совпадает. Оценим по одному интегралу из каждой группы.

ЛЕММА 1. Пусть $k = 1, 3, 5, 7$. Тогда

$$\mathfrak{J}_k(f_1) \leq C \iint_Q |f(u, v)| (\log^+ |f(u, v)|)^2 du dv + C, \quad (10)$$

где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для $k = 1$. Для остальных k доказательство аналогично. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(f_1) &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{P_1} \sup_{n, m > 0} \left| \iint_Q f_1(u, v) \tilde{D}_n(u - x) \tilde{D}_m(v - y) du dv \right| dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^a \int_{-\pi}^b \int_a^{a+q} \int_b^{b+q} \frac{|f_1(u, v)|}{|u - x| \cdot |v - y|} du dv dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{a+\pi} \int_0^{b+\pi} \int_0^q \int_0^q \frac{|f_1(u + a, v + b)|}{(u + x)(v + y)} du dv dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^A \int_0^A \int_0^A \int_0^A \frac{|f_1(u + a, v + b)|}{(u + x)(v + y)} du dv dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^A \int_0^A \frac{1}{u + x} \int_0^A \int_0^A \frac{|f_1(u + a, v + b)|}{v + y} du dv dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

(мы сделали замену переменных $u' = u - a, v' = v - b, x' = a - x, y' = b - y$ и положили $A = \max\{a + \pi, b + \pi, q\}$).

Далее, рассмотрим оператор

$$(G\varphi)(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t + z} dt, \quad z \in \mathbb{R}_0^1, \quad (12)$$

для функций $\varphi(t) \in L \log^+ L(\mathbb{R}_0^1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\varphi(t) \in L \log^+ L(\mathbb{R}_0^1)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |(G\varphi)(z)| dz \leq C \int_0^\infty |\varphi(t)| \log^+ |\varphi(t)| dt + C, \quad (13)$$

где константа C не зависит от функции φ , а оператор $G\varphi$ определен в (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующая теорема С. Яно [11] (см. также [12, с. 179–180], распространенная Ф. Сориа [13] на линейные операторы, действующие из $L_r(X)$ в $L_r(X)$, $1 < r < \infty$, с мерой $\mu X = \infty$).

ТЕОРЕМА Г. Пусть оператор $h = G\varphi$ имеет сильный тип (r, r) для каждого r , $1 < r < \infty$, так что

$$\|h\|_{L_r(\mathbb{R}_0^1)} \leq B_r \|\varphi\|_{L_r(\mathbb{R}_0^1)}, \quad 1 < r < \infty. \quad (14)$$

Тогда если

$$B_r = O\left(\frac{1}{r-1}\right), \quad r \rightarrow 1, \quad (15)$$

то $G\varphi$ однозначно определен для любой функции $\varphi \in L \log^+ L(\mathbb{R}_0^1)$ и

$$\int_0^\infty |h| dx \leq C \int_0^\infty |\varphi| \log^+ |\varphi| dx + C,$$

где константа C не зависит от φ .

Учитывая, что для оператора G из (12) справедливо неравенство Гильберта–Шура–Харди (см. [14, с. 318–319])

$$\|G\varphi\|_{L_r(\mathbb{R}_0^1)} \leq B_r \|\varphi\|_{L_r(\mathbb{R}_0^1)}, \quad 1 < r < \infty,$$

где константа B_r имеет следующую асимптотику (по r):

$$B_r = \int_0^\infty (y+1)^{-1} y^{-1/r} dy = \frac{\pi}{\sin \pi(1-1/r)} = O\left(\frac{1}{r-1}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 1,$$

получаем (см. теорему Г, оценки (14) и (15)) оценку (13). Предложение доказано.

Далее, применяя в (11) предложение сначала к функции

$$\varphi_1(v) = \varphi_1(v; \cdot) = \begin{cases} |f_1(u_0 + a, v + b)|, & v \in [0, A], \\ 0, & v \in (A, \infty), \end{cases}$$

а затем к функции

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(u; \cdot) = \begin{cases} |f_1(u + a, v_0 + b)| \log^+ |f_1(u + a, v_0 + b)|, & u \in [0, A], \\ 0, & u \in (A, \infty), \end{cases}$$

можем оценить $\mathfrak{J}_1(f_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(f_1) &\leq C \int_0^A \int_0^A \frac{1}{u+x} \left(\int_0^A |f_1(u+a, v+b)| \log^+ |f_1(u+a, v+b)| dv + C \right) du dx \\ &= C \int_0^A \int_0^A \int_0^A \frac{|f_1(u+a, v+b)| \log^+ |f_1(u+a, v+b)|}{u+x} du dx dv + C \\ &\leq C \int_0^A \left(\int_0^A |f_1(u+a, v+b)| \log^+ |f_1(u+a, v+b)| \right. \\ &\quad \left. \times \log^+ (|f_1(u+a, v+b)| \log^+ |f_1(u+a, v+b)|) du + C \right) dv + C \\ &\leq C \int_0^A \int_0^A |f_1(u+a, v+b)| (\log^+ |f_1(u+a, v+b)|)^2 du dv + C \\ &= C \iint_Q |f_1(u, v)| (\log^+ |f_1(u, v)|)^2 du dv + C. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $k = 2, 4, 6, 8$. Тогда

$$\mathfrak{J}_k(f_1) \leq C \iint_Q |f(u, v)| (\log^+ |f(u, v)|)^3 du dv + C, \quad (16)$$

где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для $k = 2$. Для остальных k доказательство аналогично. Очевидно, что

$$\mathfrak{J}_2(f_1) = \frac{1}{\pi} \iint_{P_2} \sup_{n, m > 0} \left| \frac{1}{\pi} \iint_Q f_1(u, v) \tilde{D}_n(u - x) \tilde{D}_m(v - y) du dv \right| dx dy.$$

Учитывая вид множества P_2 , можем оценить $\mathfrak{J}_2(f_1)$ следующим образом:

$$\mathfrak{J}_2(f_1) \leq \frac{1}{\pi} \int_b^{b+q} \int_{-\pi}^a \sup_{m > 0} \int_a^{a+q} \left| \frac{1}{\pi} \int_b^{b+q} f_1(u, v) \tilde{D}_m(v - y) dv \right| \frac{du}{|u - x|} dx dy.$$

Следовательно, полагая

$$J_*[F_u(y)] = \sup_{m > 0} |J_m[F_u(y)]|,$$

где

$$J_m[F_u(y)] = \frac{1}{\pi} \int_b^{b+q} f_1(u, v) \tilde{D}_m(v - y) dv, \quad (17)$$

можем записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2(f_1) &\leq \frac{1}{\pi} \int_b^{b+q} \int_{-\pi}^a \int_a^{a+q} \frac{J_*[F_u(y)]}{|u - x|} du dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_b^{b+q} \int_0^{a+\pi} \int_0^q \frac{J_*[F_{u+a}(y)]}{u + x} du dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_0^A \frac{1}{u + x} \int_0^A J_*[F_{u+a}(y)] dy du dx \end{aligned}$$

(мы сделали замену переменных $u' = u - a$, $x' = x - a$ и положили $A = \max\{b + q, a + \pi, q\}$).

Учитывая результат П. Шелина [15] и равномерную равносходимость разложений в одномерный ряд и интеграл Фурье (см. [12, с. 362–363]), получаем (см. также [8])

$$\left\| \sup_{m > 0} |J_m(x; \varphi)| \right\|_{L_1(T^1)} \leq C \int_{T^1} |\varphi| (\log^+ |\varphi|)^2 dx + C, \quad (18)$$

где $J_m(x; \varphi)$ – собственный интеграл Фурье, определенный формулой (8) для одномерного случая $T^1 = [-\pi, \pi]$.

Далее, в силу (18) и (17) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2(f_1) &\leq C \int_0^A \int_0^A \frac{1}{u+x} \left(\int_0^A |f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^2 dv + C \right) du dx \\ &= C \int_0^A \int_0^A \int_0^A \frac{|f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^2}{u+x} dv du dx + C \\ &= C \int_0^A \int_0^A \int_0^A \frac{|f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^2}{u+x} du dx dv + C. \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя в (19) предложение к функции

$$\varphi_3(u) = \varphi_3(u; \cdot) = \begin{cases} |f_1(u+a, v_0+b)| (\log^+ |f_1(u+a, v_0+b)|)^2, & u \in [0, A], \\ 0, & u \in (A, \infty), \end{cases}$$

оценим $\mathfrak{J}_2(f_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2(f_1) &\leq C \int_0^A \left(\int_0^A |f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^2 \right. \\ &\quad \times \log^+ (|f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^2) du + C \Big) dv + C \\ &\leq C \int_0^A \int_0^A |f_1(u+a, v)| (\log^+ |f_1(u+a, v)|)^3 du dv + C \\ &= C \iint_Q |f_1(u, v)| (\log^+ |f_1(u, v)|)^3 du dv + C. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, лемма 1 (оценка (10)), лемма 2 (оценка (16)) и формула (9) доказывают оценку (6). Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. Л. Блошанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Блошанский И. Л. Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153–168.
- [2] Блошанский И. Л. Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 1. С. 11–13.
- [3] Блошанская С. К., Блошанский И. Л., Рослова Т. Ю. Обобщенная локализация в классах Орлича // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докл. 9-й Саратовской зимней школы, 1989. Саратов, 1997. С. 26.
- [4] Bloshanskii I. L. Generalized localization and convergence tests for double trigonometric Fourier series of functions from L_p , $p > 1$ // Anal. Math. 1981. V. 7. № 1. P. 3–36.

- [5] Блошанский И. Л. Автореферат дисс. . . . д. ф.-м. н. М.: МИАН, 1991.
- [6] Блошанский И. Л. Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1 , равных нулю на заданном множестве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 675–707.
- [7] Блошанский И. Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243–282.
- [8] Блошанский И. Л., Иванова О. К., Рослова Т. Ю. Обобщенная локализация и равносходимость разложений в двойной тригонометрический ряд и интеграл Фурье функций из $L(\ln^+ L)^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 437–441.
- [9] Рослова Т. Ю. О справедливости обобщенной локализации для двойных тригонометрических рядов Фурье функций из $L \log^+ L \log^+ \log^+ L$ // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 6. С. 744–745.
- [10] Блошанская С. К., Блошанский И. Л., Рослова Т. Ю. Обобщенная локализация для двойных тригонометрических рядов Фурье и рядов Фурье–Уолша функций из $L \log^+ L \times \log^+ \log^+ L$ // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 5. С. 21–46.
- [11] Yano S. Notes on Fourier analysis (XXIX): An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. P. 296–305.
- [12] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [13] Soria F. Note on differentiation of integrals and the halo conjecture // Studia. Math. 1985. V. 81. P. 29–36.
- [14] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [15] Sjolín P. Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Ark. Mat. 1971. V. 9. № 1. P. 65–90.

Московский государственный технологический университет “Станкин”

Поступило

25.06.98

Исправленный вариант

24.11.98