Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Коняев, О структуре решения сингулярно возмущенных начально краевых задач с неограниченным спектром предельного оператора, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 831–835

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:00:50

УДК 517.977

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНО КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Ю. А. Коняев

Рассмотрены сингулярно возмущенные начально краевые задачи для некоторых классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси с неограниченным спектром предельного оператора, приведен новый вариант доказательства существования единственного и ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения, для которого с помощью метода расщепления построено равномерное на всей полуоси асимптотическое разложение с описанием всех сингулярностей (отражающих структуру соответствующих пограничных слоев) в замкнутой аналитической форме, включая критический случай, когда точки спектра предельного оператора могут касаться мнимой оси, что дополняет известные ранее результаты.

Библиография: 7 названий.

Изучен класс сингулярно возмущенных начально краевых задач на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с неограниченным спектром предельного ($\varepsilon = 0$) оператора для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В отличие от известного [1], [2] приведен новый вариант доказательства существования единственного и ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения, с помощью метода расщепления [3], [4] построено его асимптотическое разложение, равномерное на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, с описанием структуры всех пограничных слоев в замкнутой аналитической форме, включая критический случай, что является развитием идей работ [3]–[7].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ на полуоси $\mathbb{R}^+$ сингулярно возмущенную задачу

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = \rho(t)A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad \sum_{k=1}^n F_k x(t_k, \varepsilon) = \alpha, \quad (1)$$

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

где $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$ – достаточно гладкая и неограниченная при $t \rightarrow +\infty$ функция, ряды

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k \quad \text{и} \quad f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \varepsilon^k$$

сходятся на полуоси $\mathbb{R}^+$ абсолютно и равномерно по некоторой норме при $|\varepsilon| < \varepsilon^0 < 1$. Задачи вида (1) мы будем называть *начально краевыми*, так как при $t \in [0, 1]$ это обычная многоточечная краевая задача (см., например, [3]), а при $t \geq 1$ указанная задача

имеет много общего с задачей Коши, рассмотренной в [6]. Следуя методу расщепления [4], для произвольной квадратичной матрицы A введем обозначения

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A},$$

которые нам потребуются для дальнейшего изложения.

ТЕОРЕМА. Пусть для задачи (1)

- 1) функции $A_k(t), f_k(t)$ ($k \geq 0$) равномерно ограничены на полуси $\mathbb{R}^+$ с нужным количеством производных, т.е.

$$\|f_k^{(p)}(t)\| \leq C_{kp}, \quad \|A_k^{(p)}(t)\| \leq C_{kp}, \quad p = 0, \dots, N+1, \quad k \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- 2) спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} |\lambda_{0j}(t)| &\geq \sigma_0 > 0, & \sigma_{jk}(t) &\equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t), \\ |\sigma_{jk}(t)| &\geq \sigma > 0, & j &\neq k, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \text{Re } \lambda_{0j}(t) &\leq 0, & j &= 1, \dots, n, \quad t \geq t_j, \\ \text{Re } \lambda_{0j}(t) &\geq 0, & t &\in [0, t_j], \quad j = 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \text{Re } \int_{t_j}^t \lambda_{0j}(s) ds &< 0, & t &\in \mathbb{R}^+ \setminus \{t_j\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда при условии

$$\begin{aligned} \det T &\neq 0, \\ T &= (T_{11}, \dots, T_{nn}), \quad T_k = (T_{1k}, \dots, T_{nk}) = F_k S_0(t_k), \quad k = 1, \dots, n, \\ S_0^{-1}(t) A_0(t) S_0(t) &= \Lambda_0(t) = \text{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

и достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственное и ограниченное на полуси $\mathbb{R}^+$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (1), представимое в виде

$$x(t, \varepsilon) = S_0(t) \left(E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_k(t) \varepsilon^k \right) \Phi_{(N)}(t, \varepsilon) C + \sum_{k=0}^N w_k(t) \varepsilon^k, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{(N)}(t, \varepsilon) &= \text{diag}\{e^{\beta_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\beta_n(t, \varepsilon)}\}, \\ \beta_j(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_j}^t \rho(s) \sum_{k=0}^N \lambda_{kj}(s) \varepsilon^k ds, \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \Lambda_{(N)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \Lambda_k(t) \varepsilon^k, \quad \Lambda_k(t) = \text{diag}\{\lambda_{k1}(t), \dots, \lambda_{kn}(t)\}, \quad k = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

при этом функции $\Lambda_k(t), \overline{\overline{H}}_k(t)$ и $w_k(t)$ ($k = 0, \dots, N$) однозначно определяются в ходе доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование сдвига $x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) + w_{(N)}(t, \varepsilon)$, где векторная функция

$$w_{(N)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N w_k(t) \varepsilon^k$$

единственным образом определяется при ее непосредственной подстановке в систему (1) (без учета краевых условий), позволяет для функции $y(t, \varepsilon)$ получить почти однородную краевую задачу

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \rho(t) A(t, \varepsilon) y + \varepsilon^{N+1} g(t, \varepsilon), \quad \sum_{k=1}^N F_k y(t_k, \varepsilon) = \beta(\varepsilon),$$

которая после невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon|$ замены

$$y = S_0(t) \left(E + \sum_{k=0}^N \overline{H}_k(t) \varepsilon^k \right) z = S_0(t) H_{(N)}(t, \varepsilon) z \quad (4)$$

преобразуется к задаче с почти диагональной матрицей

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \rho(t) Q(t, \varepsilon) z + \varepsilon^{N+1} b(t, \varepsilon), \quad \sum_{k=1}^N T_k(\varepsilon) z(t_k, \varepsilon) = \beta(\varepsilon), \quad (5)$$

где

$$Q(t, \varepsilon) = \Lambda_{(N)}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} G(t, \varepsilon), \quad \|G(t, \varepsilon)\| \leq c, \quad \|b(t, \varepsilon)\| \leq c, \\ T_k(\varepsilon) = F_k S_0(t_k) H_{(N)}(t_k, \varepsilon) = T_k + O(\varepsilon),$$

при этом матрицы $H_{(N)}(t, \varepsilon)$ и $Q(t, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$\varepsilon \frac{dH_{(N)}}{dt} = \rho(t) (B(t, \varepsilon) H_{(N)}(t, \varepsilon) - H_{(N)}(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon)), \quad (6)$$

где

$$B(t, \varepsilon) = S_0^{-1}(t) (A(t, \varepsilon) S_0(t) - \varepsilon \rho^{-1}(t) \dot{S}_0(t)) = \Lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k.$$

Равенство (6) позволяет записать простые алгебраические матричные уравнения (аргументы опущены):

$$\Lambda_0 \overline{H}_k - \overline{H}_k \Lambda_0 = \Lambda_k - P_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad P_1 = B_1, \\ P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j \overline{H}_{k-j} - \overline{H}_{k-j} \Lambda_j) - \rho^{-1}(t) \frac{d\overline{H}_{k-1}}{dt} = \{p_{jq}(t)\}, \quad k = 2, \dots, N,$$

для последовательного и однозначного определения “диагональных” матриц $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональных” матриц $\overline{H}_k(t) = \{h_{jq}(t)\}$ ($h_{jq}(t) = -p_{jq}(t) \sigma_{jq}^{-1}(t)$, $k = 1, \dots, N$).

Задача (5) эквивалентна [3] специальному интегральному уравнению

$$z = \Phi_{(N)}(t, \varepsilon)C + \varepsilon^N \sum_{k=1}^n \Phi_k(t, \varepsilon) \int_{t_k}^t \Phi^{-1}(s, \varepsilon) (\rho(s)G(s, \varepsilon)z + b(s, \varepsilon)) ds, \quad (7)$$

где

$$\Phi_1(t, \varepsilon) = \text{diag}\{e^{\beta_1(t, \varepsilon)}, 0, \dots, 0\}, \quad \dots, \quad \Phi_n(t, \varepsilon) = \text{diag}\{0, \dots, 0, e^{\beta_n(t, \varepsilon)}\},$$

$$\Phi_{(N)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \Phi_k(t, \varepsilon).$$

В условиях теоремы на любом фиксированном отрезке $[0, t_1]$ ($t_1 > 0$) уравнение (7) и эквивалентная ему задача (5) имеют единственное и ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ решение, при этом справедливы неравенства

$$\|z\| \leq C_0 + \varepsilon^{N+1} \left(C_1 \max_{[0, t_1]} \|z(t, \varepsilon)\| + C_2 \right),$$

$$\max_{[0, t_1]} \|z(t, \varepsilon)\| \leq \frac{C_0 + \varepsilon^{N+1} C_2}{1 - \varepsilon^{N+1} C_1} \leq C, \quad \max_{\mathbb{R}^+} \|z(t, \varepsilon)\| \leq C,$$

что и доказывает существование единственного и ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения уравнения (7) и эквивалентной ему задачи (1) на всей полуоси $\mathbb{R}^+$ (так как постоянные C_0 , C_1 и C_2 не зависят от t_1).

Представим решение задачи (5) в виде $z(t, \varepsilon) = q(t, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1}v(t, \varepsilon)$, где $q(t, \varepsilon) = \Phi_{(N)}(t, \varepsilon)C$, а векторная функция $v(t, \varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = \rho(t)Q(t, \varepsilon)v + b_1(t, \varepsilon), \quad \sum_{k=1}^n F_k v(t_k, \varepsilon) = \gamma(\varepsilon),$$

аналогичной задаче (1) и имеющей поэтому единственное и ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$ решение. Этот факт и доказывает справедливость асимптотического представления (3) решения задачи (1) (при этом вектор C однозначно определяется краевыми условиями с учетом неравенства (2)), что и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сингулярно возмущенные начально краевые задачи вида (1) имеют смысл, в отличие от аналогичной регулярной задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad \sum_{k=1}^n F_k x(t_k) = \alpha, \quad t \in [0, +\infty),$$

только при вполне определенной зависимости спектра $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ от расположения точек t_k ($k = 1, \dots, n$), в которых заданы краевые условия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задача (1) устойчива относительно расположения точек t_k ($k = 1, \dots, n$) в том смысле, что в условиях теоремы малые колебания этих точек (порядка $O(\varepsilon)$) не ведут к большим вариациям ее решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичный результат имеет место и при наличии тождественно кратных точек спектра матрицы $A_0(t)$, что может привести (с учетом результатов работы [4]) к появлению дробных степеней малого параметра ε в разложении (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
- [2] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [3] Коняев Ю. А. Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 57–61.
- [4] Коняев Ю. А. Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 133–144.
- [5] Коняев Ю. А. Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 11. С. 1999–2003.
- [6] Коняев Ю. А., Фёдоров Ю. С. Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 111–117.
- [7] Коняев Ю. А. Сингулярно возмущенные нелинейные краевые задачи при наличии тождественных и нетождественных резонансов // Вестн. МЭИ. 1995. № 6. С. 73–78.

Университет Дружбы народов

Поступило
20.05.98