Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, Некоторые тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций системы уравнений Дирака с периодическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 459–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:33:03

УДК 517.947.5

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ КВАДРАТОВ КОМПОНЕНТ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов

В этой работе получены некоторые тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций системы уравнений Дирака с гладким периодическим потенциалом.

Библиография: 7 названий.

В работах Х. П. Мак-Кина, Е. Трубовица [1] и П. Дейффа, Е. Трубовица [2] получено тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k}^2(x) = 1$$

для квадратов ортонормированных собственных функций $\varphi_{2k}(x)$, соответствующим собственным значениям λ_{2k} оператора Штурма–Лиувилля с периодическими и антипериодическими граничными условиями. Здесь ε_k зависит только от $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$, и является положительным, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} > 0$, и равно нулю, если $\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = 0$. Это тождество играет важную роль при сведении спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с конечнозонным потенциалом к задаче Неймана о движении точки на сфере единичного радиуса под действием квадратичного потенциала (А. П. Веселов [3], Ю. Мозер [4]). Отметим, что подобные тождества имеются и в работах [5], [6].

В настоящей работе получены некоторые тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций системы уравнений Дирака с гладким периодическим потенциалом.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве вектор-функций $L_2^2(\mathbb{R}^1)$ оператор Дирака

$$Ly = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $p(x), q(x)$ – действительные, гладкие функции на всей прямой с периодом π .

Введем решения $\theta(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)$ системы (1), удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0, \lambda) = (1, 0)^T, \varphi(0, \lambda) = (0, 1)^T$.

Спектр оператора L получается выкидыванием из всей прямой не более, чем счетного числа ограниченных непересекающихся интервалов (называемых *лакунами*) $(\lambda_{2n-1},$

λ_{2n}), $n \in \mathbb{Z}$. Концы лакун являются собственными значениями либо периодической, либо антипериодической задачи для системы (1) на отрезке $[0, \pi]$ и состоят из нулей целой функции $\Delta^2(\lambda) - 4$, где $\Delta(\lambda) = \theta_1(\pi, \lambda) + \varphi_2(\pi, \lambda)$. Кроме того, выполняется следующая асимптотика (см. [7]):

$$\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = n + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Пусть

$$\dots, y_{-2}(x), y_{-1}(x), y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots \quad (2)$$

— нормированные собственные вектор-функции (периодической и антипериодической задачи для системы (1) на отрезке $[0, \pi]$), соответствующие собственным значениям

$$\dots \leq \lambda_{-2} < \lambda_{-1} \leq \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots.$$

Основной результат этой работы содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Для функций (2) выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}^2(t) &= -p(t) + \frac{c}{2}, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}^2(t) &= p(t) + \frac{c}{2}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,2}^2(t) &= p(t) + \frac{c}{2}, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,2}^2(t) &= -p(t) + \frac{c}{2}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}(t) y_{2k-1,2}(t) &= q(t), & \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}(t) y_{2k,2}(t) &= -q(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-\Delta'(\lambda_{2k-1})}{f'(\lambda_{2k-1})}, & b_k &= \frac{\Delta'(\lambda_{2k})}{g'(\lambda_{2k})}, & c &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}), \\ f(\lambda) &= \pi(\lambda - \lambda_{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_{2k-1}}{k} \cdot \frac{\lambda - \lambda_{-2k-1}}{-k}, & (3) \\ g(\lambda) &= \pi(\lambda - \lambda_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_{2k}}{k} \cdot \frac{\lambda - \lambda_{-2k}}{-k}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и в дальнейшем в произведениях $\prod_{k=-\infty}^{\infty}$ и в суммах $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ частичные произведения и частичные суммы берутся симметричным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Введем решения $\theta(x, \lambda, t)$, $\varphi(x, \lambda, t)$ следующей системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x+t) & q(x+t) \\ q(x+t) & -p(x+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющие начальным условиям $\theta(0, \lambda, t) = (1, 0)^T$, $\varphi(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$, где t – действительный параметр.

Изучим при $|\lambda| \rightarrow \infty$ асимптотику следующих функций:

$$\frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)}, \quad \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)}, \quad \frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)},$$

$$\frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)}, \quad \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)}, \quad \frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)}.$$

Используя разложение

$$\varphi_1(\pi, \lambda, t) = \pi(\lambda - \zeta_0(t)) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda - \zeta_k(t)}{k},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= \sqrt{\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_{2k}}{\lambda - \lambda_{2k-1}}} \cdot \sqrt{\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \zeta_k(t)}{\lambda - \lambda_{2k-1}} \cdot \frac{\lambda - \zeta_k(t)}{\lambda - \lambda_{2k}}} \\ &= \sqrt{\exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k}}{\lambda - \lambda_{2k-1}} \right) \right\}} \\ &\times \sqrt{\exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_{2k-1}} + \frac{\lambda_{2k} - \xi_k(t)}{\lambda - \lambda_{2k}} + \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_k(t)(\lambda_{2k} - \xi_k(t)))}{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})} \right] \right\}} \\ &= \sqrt{\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k}) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right\}} \\ &\times \sqrt{\exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right\}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание обозначения (3) и формулу следов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(t) \right) = p(t),$$

из (4) находим, что

$$\frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = 1 + \frac{1}{\lambda} \left(p(t) - \frac{c}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

На основании равенства

$$\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t) = \varphi_1(\pi, \lambda, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_k(t)) - 4}}{\left(\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\xi_k} \right) \cdot (\lambda - \xi_k(t))},$$

где $\sigma_k(t) = \text{sign}\{\theta_1(\pi, \xi_k(t), t) - \varphi_2(\pi, \xi_k(t), t)\}$, и формулы следов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_k(t)) - 4}}{\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda, t)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\xi_k}} = q(t),$$

учитывая асимптотику (5), выводим

$$\frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} q(t) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Аналогично получаются следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left(-p(t) - \frac{c}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \\ \frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left(p(t) + \frac{c}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \\ \frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= \frac{1}{\lambda} q(t) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \\ \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left(-p(t) + \frac{c}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя полученные асимптотики и теорему Миттаг–Леффлера, выводим следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k-1}}, \\ \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\theta_2(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k-1}}, \\ \frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{f(\lambda)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1(\pi, \lambda_{2k-1}, t) - \varphi_2(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k-1}}, \\ \frac{\varphi_1(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k}}, \\ \frac{-\theta_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\theta_2(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k}}, \\ \frac{\theta_1(\pi, \lambda, t) - \varphi_2(\pi, \lambda, t)}{g(\lambda)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1(\pi, \lambda_{2k}, t) - \varphi_2(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_{2k}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнивая коэффициенты при $1/\lambda$ в равенствах (5)–(8), получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} &= p(t) - \frac{c}{2}, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\theta_2(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} &= q(t), \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1(\pi, \lambda_{2k-1}, t) - \varphi_2(\pi, \lambda_{2k-1}, t)}{f'(\lambda_{2k-1})} &= -p(t) - \frac{c}{2}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_1(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} &= p(t) + \frac{c}{2}, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\theta_2(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} &= q(t), \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_1(\pi, \lambda_{2k}, t) - \varphi_2(\pi, \lambda_{2k}, t)}{g'(\lambda_{2k})} &= -p(t) + \frac{c}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из равенств (9) и следующей леммы выводим утверждение теоремы.

ЛЕММА. *Выполняются следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \varphi_1(\pi, \lambda_n, t) &= \Delta'(\lambda_n) y_{n,1}^2(t), & \theta_2(\pi, \lambda_n, t) &= -\Delta'(\lambda_n) y_{n,2}^2(t), \\ \theta_1(\pi, \lambda_n, t) &= \frac{1}{2} \Delta(\lambda_n) - \Delta'(\lambda_n) y_{n,1}(t) y_{n,2}(t), \\ \varphi_2(\pi, \lambda_n, t) &= \frac{1}{2} \Delta(\lambda_n) + \Delta'(\lambda_n) y_{n,1}(t) y_{n,2}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое из равенств (10). Случай, когда λ_n двукратен очевиден. Будем считать, что λ_n не является двукратным. Из равенств

$$\begin{aligned} \theta(t + \pi, \lambda) &= \theta_1(\pi, \lambda) \theta(t, \lambda) + \theta_2(\pi, \lambda) \varphi(t, \lambda), \\ \varphi(t + \pi, \lambda) &= \varphi_1(\pi, \lambda) \theta(t, \lambda) + \varphi_2(\pi, \lambda) \varphi(t, \lambda), \\ \varphi(x, \lambda, t) &= \theta_1(\pi, \lambda) \varphi(x + t, \lambda) - \varphi_1(t, \lambda) \theta(x + t, \lambda) \end{aligned}$$

выводим тождество

$$\varphi_1(\pi, \lambda, t) = \varphi_1(\pi, \lambda) \theta_1^2(t, \lambda) + [\varphi_2(\pi, \lambda) - \theta_1(\pi, \lambda)] \theta_1(t, \lambda) \varphi_1(t, \lambda) - \theta_2(\pi, \lambda) \varphi_1^2(t, \lambda). \quad (11)$$

Пусть $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ – решения Флоке для системы (1). Для них имеются следующие хорошо известные представления:

$$\psi_{\pm}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + \frac{\varphi_2(\pi, \lambda) - \theta_1(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2\varphi_1(\pi, \lambda)} \varphi(x, \lambda).$$

Введем обозначение

$$\psi(x, \lambda_n) = \psi_{\pm}(x, \lambda_n) = \theta(x, \lambda_n) + \frac{\varphi_2(\pi, \lambda_n) - \theta_1(\pi, \lambda_n)}{2\varphi_1(\pi, \lambda_n)} \varphi(x, \lambda_n). \quad (12)$$

Из формулы

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) = \varphi_1(\pi, \lambda) \int_0^\pi \left\{ \left[\theta_1(x, \lambda) + \frac{\varphi_2(\pi, \lambda) - \theta_1(\pi, \lambda)}{2\varphi_1(\pi, \lambda)} \varphi_1(t, \lambda) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\theta_2(x, \lambda) + \frac{\varphi_2(\pi, \lambda) - \theta_1(\pi, \lambda)}{2\varphi_1(\pi, \lambda)} \varphi_2(t, \lambda) \right]^2 \right\} dt \\ - \frac{\Delta^2(\lambda) - 4}{4\varphi_1(\pi, \lambda)} \int_0^\pi [\varphi_1(t, \lambda) + \varphi_2^2(t, \lambda)] dt \end{aligned}$$

находим

$$\Delta'(\lambda_n) = \varphi_1(\pi, \lambda_n) \int_0^\pi [\psi_1^2(t, \lambda_n) + \psi_2^2(t, \lambda_n)] dt.$$

На основании простоты собственного значения λ_n выводим равенство

$$\psi(t, \lambda_n) = \pm \sqrt{\frac{\Delta'(\lambda_n)}{\varphi_1(\pi, \lambda_n)}} \cdot y_n(t).$$

Отсюда имеем

$$\varphi_1(\pi, \lambda_n) \psi_1^2(t, \lambda_n) = \Delta'(\lambda_n) y_{n,1}^2(t). \quad (13)$$

Используя (11), (12) и тождество

$$[\theta_1(\pi, \lambda) - \varphi_2(\pi, \lambda)]^2 = \Delta^2(\lambda) - 4 - 4\varphi_1(\pi, \lambda)\theta_2(\pi, \lambda),$$

преобразуем левую часть равенства (13):

$$\begin{aligned} \varphi_1(\pi, \lambda_n) \psi_1^2(t, \lambda_n) &= \frac{1}{4\varphi_1(\pi, \lambda_n)} \{ 2\varphi_1(\pi, \lambda_n)\theta_1(t, \lambda_n) + [\varphi_2(\pi, \lambda_n) - \theta_1(\pi, \lambda_n)]\varphi_1(t, \lambda_n) \}^2 \\ &= \frac{1}{4\varphi_1(\pi, \lambda_n)} \{ 4\varphi_1^2(\pi, \lambda_n)\theta_1^2(t, \lambda_n) \\ &\quad + 4\varphi_1(\pi, \lambda_n)[\varphi_2(\pi, \lambda_n) - \theta_1(\pi, \lambda_n)] \cdot \theta_1(t, \lambda_n)\varphi_1(t, \lambda_n) \\ &\quad - 4\varphi_1(\pi, \lambda_n)\theta_2(\pi, \lambda_n)\varphi_1^2(t, \lambda_n) \} \\ &= \varphi_1(\pi, \lambda_n)\theta_1^2(t, \lambda_n) + [\varphi_2(\pi, \lambda_n) - \theta_1(\pi, \lambda_n)]\theta_1(t, \lambda_n)\varphi_1(t, \lambda_n) - \theta_2(\pi, \lambda_n)\varphi_1^2(t, \lambda_n) \\ &= \varphi_1(\pi, \lambda_n, t). \end{aligned}$$

Учитывая (13), выводим первое тождество леммы; остальные равенства доказываются аналогично. Лемма доказана.

Отметим, что в случаях $p(x) \equiv q(x) \equiv 0$ и $p(x) \equiv m, m > 0, q(x) \equiv 0$ полученные тождества принимают вид числовых равенств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McKean H. P., Trubowitz E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
- [2] Deift P., Trubowitz E. An identity among squares of eigenfunctions // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 713–717.
- [3] Веселов А. П. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 48–50.
- [4] Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1981. Т. 36. № 5 (221). С. 109–151.
- [5] Савин А. В. Тожество для квадратов собственных функций бесконечнозонного оператора Штурма–Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1984. № 6. С. 83–85.
- [6] Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. матем. ж. 2001. № 3–4. С. 48–55.
- [7] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Ургенчский государственный университет, Узбекистан
E-mail: ahasanov2002@mail.ru

Поступило
23.05.2003