Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Арифметические распределения и секвенциальное продолжение бинарных отношений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 836–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:12:09

УДК 517.98

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

С. Я. Серовайский

С помощью некоторой итерационной процедуры определяется достаточно широкий класс арифметических распределений, на котором определены и непрерывны операции сложения, умножения и дифференцирования. Проводится согласование введенного умножения арифметических распределений с известными методами определения произведения обобщенных функций. Установленные результаты могут быть использованы для обоснования предельных переходов при исследовании нелинейных задач математической физики.

На основе формализации применяемой схемы описывается процедура построения некоторого продолжения бинарных отношений, названного секвенциальным продолжением, с плотного подмножества на все топологическое пространство. Эти результаты распространяются на операции первого порядка. Показывается, что секвенциальное продолжение операции дифференцирования с множества бесконечно дифференцируемых функций на пространство распределений с точностью до изоморфизма совпадает с обобщенным дифференцированием распределений.

Библиография: 26 названий.

Задачи о продолжении тех или иных структур возникают в различных разделах математики и имеют многочисленные приложения (см., например, [1]–[3]). Эта проблема имеет чрезвычайно важное значение в теории распределений, где не определена естественная операция умножения. С необходимостью перемножения объектов, названных впоследствии обобщенными функциями, впервые столкнулся П. Дирак при исследовании нелинейных задач квантовой электродинамики [4]. Чувствуя возникающие при этом принципиальные трудности, создатель фундамента теории обобщенных функций Л. Шварц отмечал, что аппарат распределений приспособлен исключительно для систем линейной природы [5]. Грандиозные успехи, достигнутые математической и теоретической физикой за счет использования теории обобщенных функций [5]–[8], и отсутствие естественного определения произведения распределений, а значит, принципиальные осложнения при интерпретации обобщенных решений нелинейных уравнений стали мощным стимулом развития теории умножения распределений.

Начиная с работ Я. Микусинского [8], эта проблема решается на основе секвенциального подхода. При этом каждое распределение представляется классом регулярных функций. Тогда умножение обобщенных функций может быть интерпретировано

как объект, соответствующий классу произведений регулярных функций, представляющих рассматриваемые распределения. При этом семейство представляющих функций обычно выбирается таким образом, чтобы оно обладало структурой алгебры. На нем задается некоторое отношение эквивалентности, характеризующее соответствующий идеал. В качестве класса объектов, интерпретируемых как обобщенные распределения, и выбирается получаемая при этом факторалгебра. Тем самым, замыкание множества распределений относительно операции умножения получается в процессе ее продолжения с множества представляющих регулярных функций. Среди исследований этого направления, различающихся лишь выбором соответствующего класса представлений и эквивалентности на нем, отметим работы Г. Тильмана [9], Г. Бремермана [10], В.К. Иванова [11], К. Келлера [12], Л. Берга [13], В.П. Маслова [14], Ж.П. Коломбо [15], [16], Ю.В. Егорова [17], В.М. Шелковича [18] и др. Получаемые в результате достаточно широкие и содержательные семейства обобщенных функций с успехом используются при интерпретации обобщенных решений широкого класса нелинейных задач математической физики [14], [16]–[19]. Однако, теория умножения распределений еще далека от завершения. Так, Егоров в своем обзоре [17] отмечает, что “несмотря на отдельные успехи, связанные с определением произведения для распределений из специальных классов, в общем случае эта задача неразрешима”.

Используемый способ расширения множества обобщенных функций является достаточно эффективным. Однако его несомненная простота и естественность с алгебраической точки зрения предопределили трудности топологической природы. В указанных работах, как правило, не определяется топология на расширенном множестве распределений, а если таковая и вводится, то без согласования с алгебраической структурой множества [17]. Это обстоятельство не позволяет воспользоваться получаемыми результатами для решения топологических задач, возникающих в теории нелинейных уравнений математической физики.

Наряду с достаточно успешно решаемыми на основе подобных результатов вопросами интерпретации их решений несомненный интерес представляет также проблема перехода к пределу в нелинейных членах при обосновании качественных и количественных методов исследования этих уравнений. В линейном случае наличие простейших априорных оценок позволяет без труда перейти к пределу и добиться желаемого результата. В нелинейных уравнениях проблема обоснования предельного перехода приводит к существенным и подчас непреодолимым трудностям, поскольку из слабой сходимости функций, вообще говоря, не следует сходимость соответствующих нелинейных выражений от них, в частности, их произведений. В ряде случаев желаемый результат удается получить с помощью специального аппарата – методов монотонности, компактности и т.п. (см., например, [20], [21]). Однако, для этого требуются либо весьма специфические свойства рассматриваемого оператора (метод монотонности), либо достаточно сильные априорные оценки (метод компактности), что далеко не всегда удается реализовать на практике.

Обоснование предельных переходов было бы естественно проводить на расширенном множестве распределений при условии, что на нем определена содержательная топология, согласованная с его алгебраической структурой. Действительно, имея какие-либо априорные оценки, мы получаем слабую сходимость последовательностей в соответствующих функциональных классах, а значит (как правило), и в топологии пространств

ства классических распределений. Если последнее непрерывно вложено в расширенное пространство распределений, на котором определена непрерывная операция умножения, то в результате получается сходимость произведений элементов рассматриваемых последовательностей. Учитывая, что в большинстве встречающихся на практике задач математической физики нелинейные члены характеризуются как раз произведениями неизвестных функций и их производных, обоснование предельных переходов в таких задачах можно было бы осуществить указанным способом. Таким образом, определение именно непрерывного умножения распределений представляется весьма актуальной задачей.

В настоящей работе предлагается итерационная процедура расширения множества распределений, на каждом шаге которой параллельно вводится алгебраическая и топологическая структура, что позволяет добиться их согласованности. В результате получается достаточно широкий класс арифметических распределений, на котором определены и непрерывны операции сложения, умножения и дифференцирования, вследствие чего установленные результаты могут быть использованы для анализа широкого класса нелинейных задач математической физики. Отдельные результаты в этом направлении были получены в работах автора [22], [23]. Показывается, что описанная техника может использоваться для построения продолжения бинарных отношений с плотного подмножества на все топологическое пространство.

1. Арифметические распределения. Рассмотрим множество $D(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций в области Ω с топологией индуктивного предела и сопряженное к нему пространство распределений $D'(\Omega)$. Учитывая плотность вложения пространства $D(\Omega)$ в $D'(\Omega)$, установим, что для любого распределения существует сходящаяся к нему в топологии $D'(\Omega)$ последовательность бесконечно дифференцируемых функций. Обозначим через Ψ множество всех сходящихся в смысле $D'(\Omega)$ последовательностей бесконечно дифференцируемых функций. Определим на нем отношение эквивалентности ψ , считая условие $\{x_k\}\psi\{y_k\}$ выполненным, если соответствующие пределы совпадают. Рассмотрим фактормножество $D_p = \Psi/\psi$, элементы которого будем называть *простыми распределениями* в области Ω .

Для любого $x \in D'(\Omega)$ определим класс эквивалентности $Ix = [\{x_k\}]_\psi$ по отношению ψ с представителем $\{x_k\}$ – последовательностью элементов из $D(\Omega)$, сходящейся к x . Значение Ix принадлежит множеству D_p и не зависит от выбора сходящейся к x последовательности. Тем самым, задан оператор $I: D'(\Omega) \rightarrow D_p$, который оказывается биекцией, причем соответствующий обратный оператор характеризуется соотношением

$$I^{-1}x = \lim x_k \quad \forall \{x_k\} \in X.$$

Оператор I будем называть *секвенциальным изоморфизмом* пространства $D'(\Omega)$ относительно множества $D(\Omega)$. Положим $Y_x = I(D(\Omega))$.

Для произвольного натурального числа m зададим класс последовательностей

$$\Pi_m = \left\{ \{x_k\} \subset D(\Omega) \mid \exists \{x_k^i\} \in \Psi, i = 1, \dots, m : x_k = \prod_{i=1}^m x_k^i \quad \forall k \right\}.$$

Очевидно, $\Pi_1 = \Psi$, однако при $m > 1$ Ψ является собственным подмножеством Π_m . Действительно, пусть $\{d_k\}$ есть некоторая последовательность из $D(\Omega)$, сходящаяся в

топологии $D'(\Omega)$ к δ -функции δ , сосредоточенной в некоторой точке области Ω . Тогда последовательность квадратов $\{(d_k)^2\}$ не сходится в пространстве $D'(\Omega)$ (это и является проявлением неопределенности естественного квадрата от δ -функции [8]), а значит, не является элементом множества Ψ . Однако, $(d_k)^2$ представляет собой произведение двух (совпадающих) элементов, каждый из которых образует сходящуюся на $D'(\Omega)$ последовательность. Таким образом, справедливо включение $\{(d_k)^2\} \in \Pi_2$.

Введем на Π_m эквивалентность π_m , считая условие $\{x_k\}\pi_m\{y_k\}$ выполненным, если существуют последовательности $\{x_k^i\}, \{y_k^i\}$ из Ψ такие, что справедливы соотношения

$$x_k = \prod_{i=1}^m x_k^i, \quad y_k = \prod_{i=1}^m y_k^i \quad \forall k: \quad \{x_k^i\}\psi\{y_k^i\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим через Π объединение семейства $\{\Pi_m\}$. Определим $X_m = \Pi_m/\pi_m$. Множеством D^n натуральных распределений на Ω назовем объединение семейства $\{X_m\}$.

Для любого $x \in D^n$ существует номер m такой, что $x \in X_m$. Тогда найдется последовательность $\{x_k\} \in \Pi_m$ такая, что справедливо равенство $x = [\{x_k\}]_m$, правая часть которого представляет собой класс эквивалентности по отношению π_m с представителем $\{x_k\}$. Множество D^n существенно шире, чем D_p . Так, δ -функцию с точностью до изоморфизма можно считать простым распределением. В то же время в классе $D'(\Omega)$ (а значит, и в D_p) не имеет смысла степень от δ -функции. Однако, под δ^n можно понимать класс эквивалентности $[(d_k)^n]_n$, т.е. натуральное распределение.

Определим оператор $A_{m,n}: X_m \times X_n \rightarrow X_{m+n}$ с помощью равенства

$$A_{m,n}(x, y) = [\{x_k, y_k\}]_{m+n} \quad \forall \{x_k\} \in x \in X_m, \{y_k\} \in y \in X_n.$$

Задавая на множестве D^n умножение следующим образом:

$$x \cdot y = A_{m,n}(x, y) \quad \forall x \in X_m, y \in X_n,$$

закключаем, что произведение любых натуральных распределений является элементом из D^n . Каждое натуральное распределение представимо в виде произведения простых распределений подобно тому, как любое натуральное число разлагается в произведение простых чисел, чем и объясняется принятая терминология. Так, элемент δ^n действительно является n -кратным произведением на себя простого распределения δ . Однако, в отличие от чисел здесь естественно нарушаются утверждения основной теоремы арифметики, т.е. подобное разложение не единственно.

На множестве натуральных распределений не определена сумма элементов. Замыкая его относительно операции сложения, приходим к более широкому классу объектов. Для любого номера n рассмотрим семейство

$$\Sigma_n = \left\{ \{x_k\} \subset D(\Omega) \mid \exists \{x_k^i\} \in \Pi, i = 1, \dots, n: \quad x_k = \sum_{j=1}^n x_k^j \quad \forall k \right\}.$$

Очевидно, $\Sigma_1 = \Pi$, однако при $n > 1$ Π является собственным Σ_n . В частности, для полинома

$$p_n(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, n,$$

последовательность $\{p_n(d_k)\}$ принадлежит классу Σ_{n+1} , но не Π .

Элементы $\{x_k\}, \{y_k\}$ на Σ_n будем считать *эквивалентными* в смысле отношения σ_n , если существуют номера m_j и последовательности $\{x_k^j\}, \{y_k^j\}$ из Π_{m_j} , $j = 1, \dots, n$, такие, что справедливы соотношения

$$x_k = \sum_{j=1}^n x_k^j, \quad y_k = \sum_{j=1}^n y_k^j \quad \forall k: \quad \{x_k^j\} \pi_{m_j} \{y_k^j\} \quad \forall j.$$

Введем фактормножество $Y_n = \Sigma_n / \sigma_n$. Множеством D^i *целых распределений* на Ω назовем объединение семейства $\{Y_n\}$. Элементы множеств D_p , D^n и D^i будем называть также *арифметическими распределениями*. Подобные классы были определены в [22], [23] на основе более громоздкой схемы и без анализа их структуры.

Для любого $x \in D^i$ существует номер n такой, что $x \in Y_n$, а значит, найдется последовательность $\{x_k\}$ из семейства Σ_n такая, что справедливо равенство $x = [\{x_k\}]^n$, в правой части которого находится класс эквивалентности по отношению σ_n с представителем $\{x_k\}$. Нетривиальным примером целого распределения служит объект

$$p_n(\delta) = [\{p_n(d_k)\}]^{n+1}.$$

Зададим операторы $B_{m,n}: Y_m \times Y_n \rightarrow Y_{m+n}$, $C_{m,n}: Y_m \times Y_n \rightarrow Y_{mn}$:

$$B_{m,n}(x, y) = [\{x_k + y_k\}]^{m+n}, \quad C_{m,n}(x, y) = [\{x_k y_k\}]^{mn}.$$

Определим сложение и умножение в классе целых распределений:

$$x + y = B_{m,n}(x, y), \quad x \cdot y = C_{m,n}(x, y) \quad \forall x \in Y_m, y \in Y_n.$$

Множество D^i замкнуто относительно этих операций. Любое целое распределение разлагается в сумму натуральных распределений. В частности, справедливо равенство

$$p_n(\delta) = \sum_{j=0}^n a_j \delta^j,$$

т.е. мы действительно имеем дело с полиномом от δ -функции.

Если ∂ – оператор дифференцирования (произвольного порядка) на $D'(\Omega)$ по какому-либо аргументу, то дифференцирование на D_p характеризуется соотношением

$$\partial x = I(\partial I^{-1}x) \quad \forall x \in D_p.$$

Любое натуральное распределение x представимо в виде произведения некоторого числа простых распределений $x^1, \dots, x^m$. Тогда его производная определяется по формуле

$$\partial x = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m x^i \cdot \partial x^j$$

и является целым распределением. Произвольное целое распределение является суммой натуральных распределений. Его производную можно определить как сумму производных соответствующих натуральных распределений. Таким образом, дифференцирование оказывается линейным оператором на множестве D^i . Определив естественным образом умножение на скаляр на множестве целых распределений, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Множество целых распределений D^i обладает структурой дифференциальной коммутативно-ассоциативной алгебры.*

2. Арифметические распределения. Согласованный вариант. К настоящему времени существует значительное количество способов определения умножения и алгебры на множестве распределений (см., например, [8]–[18]), что само по себе является лучшим свидетельством отсутствия достаточно удовлетворительной теории изучаемых явлений. На принципиальные трудности, возникающие в процессе перемножения распределений, обратил внимание еще Шварц, который показал, что на достаточно широком множестве обобщенных функций умножение, согласующееся с естественным умножением функций, не может быть ассоциативным [24]. Отсюда следует, что при определении произведения обобщенных функций неминуемо придется отказаться от того или иного “естественного” свойства произведения. В связи с этим имеются существенные различия в определении умножения распределений. В ряде случаев принципиально отказываются от свойств ассоциативности [8]–[10], [15]–[17]. Ассоциативность может быть достигнута либо при отсутствии согласования с умножением на мультипликаторы [10], либо с потерей коммутативности [12], [13], либо за счет отказа от однозначности произведения [10], [11] (однозначность умножения отсутствует также и в [17]), либо при рассмотрении не всех распределений, а лишь некоторых классов [18].

Введенное выше умножение распределений обладает рядом замечательных свойств: определено на всем множестве обобщенных функций (и даже на существенно более широком классе целых распределений), однозначно, коммутативно и ассоциативно. Однако, наличие последнего свойства в соответствии с тезисом Шварца неминуемо приводит к несогласованности (в ряде случаев) с естественным умножением функций, а также с умножениями типа Микусинского [8], для которых подобное согласование имеется (см. также [10], [15]–[17]). Покажем, что при незначительной модификации приведенных выше результатов можно добиться указанного согласования, что естественно сопровождается отказом от ассоциативности.

В описанной выше схеме произведение двух простых (а с точностью до изоморфизма – и классических) распределений заведомо является натуральным, но не простым, подобно тому, как произведение простых чисел никогда не дает простое число, а принадлежит более широкому классу натуральных чисел. Микусинский предложил достаточно естественный (согласующийся с обычным умножением) способ определения произведения распределений, который в некоторых случаях давал обычную обобщенную функцию [8]. В частности, если $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ – последовательности бесконечно дифференцируемых функций, сходящиеся в топологии $D'(\Omega)$ к некоторым распределениям x и y соответственно, и существует предел (в той же топологии) последовательности произведений $\{x_k y_k\}$, то этот предел можно считать результатом произведения рассматриваемых распределений. Отталкиваясь от этой идеи Микусинского, под произведением двух распределений понимают некоторый объект, определяемый как произведение соответствующих представлений и, вообще говоря, не являющийся классической обобщенной функцией, но в виде исключения (в частности, когда произведение Микусинского имеет смысл) оказывающийся таковой. При этом разные авторы отдавали предпочтение какому-либо своему типу представления. Так, Микусинский рассматривал свертки с δ -функциями [8], Г. Бремерман и Л. Дюран [10], Г. Тильман [9], В. К. Иванов [11] – ана-

литические представления Коши, Л. Берг [13] – аналитические представления Пуассона, В.П. Маслов [14] и В.М. Шелкович [18] – асимптотические разложения, Ж.П. Коломбо – аналитические функционалы с умеренным ростом производных [15], [16], [19].

Проведем согласование множества арифметических распределений и умножения на нем с известными результатами. Для любых простых распределений x, y определим $x \cdot y = I(I^{-1}x \cdot I^{-1}y)$, если произведение классических распределений в скобках, понимаемое, например, в смысле Микусинского, существует. При этом будем говорить, что выполнено отношение $x\mu y$, в противном случае – что справедливо отношение $x\nu y$.

Для всех $x, y \in X_1$ существуют последовательности $\{x_k\}, \{y_k\}$ из Ψ такие, что $x = [\{x_k\}]_1, y = [\{y_k\}]_1$. Определим в качестве $A_{11}(x, y)$ величину $[\{x_k y_k\}]_1$ при условии $x\mu y$ и $[\{x_k y_k\}]_2$ в противном случае. Обозначая через X_2 множество всех значений $A_{11}(x, y)$ при $x, y \in X_1$, получаем оператор $A_{11}: X_1 \times X_1 \rightarrow X_2$ такой, что $A_{11}(x, y) = A_{11}(y, x)$. Для любого $x \in X_2$ справедливо вложение $x \subset \Pi_2$.

Для любых $x \in X_1, y \in X_2$ существуют простые распределения y_1, y_2 и последовательности $\{x_k\}, \{y_k^i\}$ из Ψ такие, что $y = A_{11}(y_1, y_2), x = [\{\xi_k\}]_1, y_i = [\{y_k^i\}]_1, i = 1, 2$. При $y_1\mu y_2$ в качестве $A_{12}(x, y)$ выберем значение $A_{11}(x, y)$. В случае $y_1\nu y_2$ под $A_{12}(x, y)$ будем понимать величину $A_{11}(A_{11}(x, y_i), y_j)$ при $x\mu y_i, x\nu y_j$ для $i \neq j$; класс $[\{x_k y_k^1 y_k^2\}]_3$ при $x\nu y_j, j = 1, 2$, и объединение $A_{11}(A_{11}(x, y_1), y_2) \cup A_{11}(A_{11}(x, y_2), y_1)$ при $x\mu y_i, i = 1, 2$. Обозначая через X_3 множество всех $A_{12}(x, y)$ при $x \in X_1, y \in X_2$, получаем отображение $A_{12}: X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$. Оператор $A_{21}: X_2 \times X_1 \rightarrow X_3$ характеризуется равенством $A_{21}(y, x) = A_{12}(x, y)$. Для любого $x \in X_3$ справедливо вложение $x \subset \Pi_3$.

При $x \in X_1, y \in X_3$ найдутся величины $y_1 \in X_1, y_2 \in X_2$ такие, что $y = A_{12}(y_1, y_2)$. В качестве $A_{13}(x, y)$ выберем значение $A_{11}(x, y)$ при $y \in X_1$ и $A_{12}(x, y)$ при $y \in X_2 \setminus X_1$. В случае $y \in X_3 \setminus X_2$ под $A_{13}(x, y)$ будем понимать величину $A_{12}(A_{11}(x, y_1), y_2)$ при $A_{11}(x, y_1) \in X_1$ и $A_{12}(x, y_2) \notin X_2; A_{12}(y_1, A_{12}(x, y_2))$, если оба последних соотношения не выполняются; объединение этих значений, если $A_{11}(x, y_1) \in X_1$ и $A_{12}(x, y_2) \in X_2$; класс $[\{x_k y_k\}]_4$, если два последних включения не имеют места, где $x = [\{x_k\}]_1, y = [\{y_k\}]_3$. Обозначая через X_4^{13} совокупность всех $A_{13}(x, y)$, получаем оператор $A_{13}: X_1 \times X_3 \rightarrow X_4^{13}$. Аналогично вводятся множество $X_4^{31} = X_4^{13}$ и отображение $A_{31}: X_3 \times X_1 \rightarrow X_4^{31}$. Пользуясь описанной процедурой, определим множество X_4^{22} и оператор $A_{22}: X_2 \times X_2 \rightarrow X_4^{22}$. В качестве X_4 выбираем объединение X_4^{22} и X_4^{13} . Любой его элемент является подмножеством Π_4 .

На шаге r при $r > 3$ определяются множества X_r^{mn} с $r = m + n$ и операторы $A_{mn}: X_m \times X_n \rightarrow X_r^{mn}$. Под X_r понимается объединение семейства $\{X_r^{mn}\}$ по соответствующим значениям m и n . Любой элемент X_r является подмножеством Π_r . Объединение семейства $\{X_r\}$ будем обозначать через D_n и вновь называть *множеством натуральных распределений*.

Обозначим через J_m вложение множества X_m в D_n . Тогда оператор $K = J_1 I$ будет вложением из $D'(\Omega)$ в D_n . Для любых натуральных распределений x, y найдутся номера m, n и $x' \in X_m, y' \in X_n$ такие, что справедливы равенства $x = J_m x', y = J_n y'$. Определим умножение

$$x \cdot y = J_{m+n} A_{mn}(x', y').$$

Очевидно, множество натуральных распределений замкнуто относительно умноже-

ния. При этом если существует произведение классических распределений по Микусинскому, то оно с точностью до изоморфизма совпадает с произведением соответствующих простых распределений. Если воспользоваться аналитическим представлением Коши распределений, а вместо последовательностей рассматривать направленности, сходящиеся в смысле Мура–Смита в топологии $D'(\Omega)$ (вместо этого можно воспользоваться теорией фильтров), то введенное умножение сводится (с точностью до изоморфизма) к умножению Бремермана–Дюрана [10], а класс простых распределений будет соответствовать гиперраспределениям Иванова [11]. Выбирая другие типы представлений обобщенных функций и соответствующие им способы перемножения (например, в смысле Коломбо [15], [16], [19]), можно согласовать с ними умножение получаемых в результате классов натуральных распределений. Неминуемым следствием подобного согласования оказывается следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Умножение на D_n неассоциативно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с примером Шварца [24] определим распределения $\xi = \xi(t) = 1/t$, $\eta = \eta(t) = t$, $\zeta = \zeta(t) = \delta(t)$ есть δ -функция, сосредоточенная в нуле. Обозначая $x = K\xi$, $y = K\eta$, $z = K\zeta$, имеем

$$(x \cdot y) \cdot z = K(\xi \cdot \eta) \cdot z = Ke \cdot K\zeta = K(e \cdot \delta) = K\delta = z,$$

$$x \cdot (y \cdot z) = x \cdot K(\eta, \zeta) = K\left(\frac{1}{t}\right) \cdot Ko = K\left(\frac{1}{t} \cdot o\right) = Ko = o,$$

где через o и e обозначены функции, тождественно равные 0 и 1. Теорема доказана.

Повторяя описанные выше рассуждения с заменой множества D^n на D_n , приходим к новому классу целых распределений D_i , на котором определены сложение и неассоциативное умножение, согласующееся с тем или иным известным способом перемножения распределений, а также дифференцирование произвольного порядка по любому аргументу. Тем самым, любой элемент класса D_i с точностью до изоморфизма совпадает с некоторым объектом из соответствующего расширения множества распределений (например, с обобщенной функцией Коломбо). При этом справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Множество целых распределений D_i обладает структурой дифференциальной коммутативной неассоциативной алгебры.*

3. Топология арифметических распределений. Выше были определены классы арифметических распределений, в которых умножение либо ассоциативно, но не согласуется с известными результатами в этой области (множество D^i), либо обладает свойством согласованности, но в отсутствии ассоциативности (множество D_i). При практическом использовании первого класса объектов может возникнуть ощущение, что мы имеем дело с неестественной операцией умножения, хотя, как отмечалось ранее, подобными свойствами обладают и некоторые другие схемы перемножения распределений, а в ряде случаев считается оправданным даже отсутствие однозначности произведения. Во втором случае подобные сомнения отпадают, а к неассоциативности умножения обобщенных функций со времен Микусинского принято относиться достаточно спокойно. Однако, возникает естественный вопрос: зачем нужны предлагаемые выше

конструкции, коль скоро аналогичные результаты были установлены ранее Коломбо, Егоровым и другими авторами, причем более простым способом?

Достаточно естественный с алгебраической точки зрения способ расширения множества обобщенных функций (определение алгебры представлений, выбор идеала на ней, переход к соответствующей факторалгебре) оказывается слишком “быстрым” и не позволяет ввести на получаемом расширении содержательную топологию, согласованную с алгебраическими операциями. В известных работах топология на соответствующих расширениях, как правило, вообще не вводится, а если и вводится, то без согласования с алгебраической структурой множества. В связи с этим вполне естественным представляется утверждение Егорова о том, что подобная топология “до сих пор не использовалась практически” [17]. Описанный выше более “медленный” с алгебраической точки зрения итерационный способ расширения множества обобщенных функций оказывается достаточно эффективным для введения требуемой топологии. На каждом шаге описанного процесса определяется своя топология, причем она оказывается сильнейшей из всех, в смысле которых введенные на данный момент операции будут непрерывными.

В качестве топологии на множестве $X_1 = D_p$ выбираем образ топологии $D'(\Omega)$ при действии оператора I . Тогда пространства D_p и $D'(\Omega)$ гомеоморфны. Для определения топологической структуры в классе натуральных распределений рассмотрим сначала множество X_2 . Зададим на $(X_1)^2$ топологию произведения, а на X_2 финальную топологию относительно пары $((X_2)^2, A_{1,1})$. Введем топологию на X_r , $r \geq 2$, в предположении, что все топологические пространства X_m при $m < r$ уже определены. В частности, задана топология на любых множествах X_m и X_n при $m + n = r$. Определим на $X_m \times X_n$ топологию произведения, а на X_r финальную топологию относительно пары $(X_m \times X_n, A_{m,n})$. Множество X_r с этой топологией обозначим через $X_r^{m,n}$. Его топология является сильнейшей среди тех, для которых оператор $A_{m,n}$ оказывается непрерывным [25]. Под топологическим пространством X_r будем понимать данное множество с топологией, являющейся нижней гранью семейства топологий $\{X_r^{m,n}\}$ [25] по всем значениям m и n , удовлетворяющим равенству $m + n = r$. Тогда для любых m и n при $m + n = r$ оператор $A_{m,n}: X_m \times X_n \rightarrow X_{m+n}$ непрерывен. Наконец, под топологическим пространством D_n (или D^n , если под множествами X_m и операторами $A_{m,n}$ понимаются соответствующие выражения из п. 1) будем понимать топологическую сумму семейства $\{X_r\}$ [25].

Топология в классе целых распределений определяется аналогично. В качестве топологии на Y_2 выбирается финальная топология относительно пары $((Y_2)^2, B_{1,1})$. Зададим топологию на множестве Y_r , $r \geq 2$, в предположении, что топологии Y_m и Y_n при $m + n = r$ определены. В качестве топологии $Y_r^{m,n}$ на Y_r выбирается финальная топология в смысле пары $(Y_m \times Y_n, B_{m,n})$. Под топологическим пространством Y_r будем понимать это множество, наделенное топологией нижней грани семейства топологий $\{Y_r^{m,n}\}$, $m + n = r$. Тогда для любых m, n таких, что $m + n = r$, оператор $B_{m,n}: Y_m \times Y_n \rightarrow Y_r$ является непрерывным. Зададим на D_i топологию суммы семейства $\{Y_r\}$. Топологическое пространство D^i вводится аналогично.

Установим некоторые свойства полученных топологических пространств.

ТЕОРЕМА 4. *Операция умножения на D_n непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x, y \in D_n$ существуют номера m и n такие, что справедливы включения $x \in X_m, y \in X_n$. Тогда их произведение принадлежит пространству X_r , где $m + n = r$, причем $x \cdot y = A_{m,n}(x, y)$. Для любой окрестности U точки $x \cdot y$ в силу непрерывности оператора $A_{m,n}$ существует окрестность V пары (x, y) на $X_m \times X_n$ такая, что справедливо вложение $A_{m,n}V \subset U$. Пользуясь определением топологии произведения [25], установим равенство $V = V_1 \times V_2$, где V_1 и V_2 – окрестности точек x и y соответственно в X_m и X_n . Учитывая непрерывность канонического вложения этих пространств в D_n , заключаем, что V_1 и V_2 являются окрестностями точек x и y в топологии D_n . Согласно определению операции умножения на D_n справедливо равенство

$$A_{m,n}(V_1 \times V_2) = V_1 \cdot V_2 = \{\xi \cdot \eta \mid \xi \in V_1, \eta \in V_2\}.$$

Итак, для любой окрестности U произведения $x \cdot y$ существуют окрестности V_1 и V_2 точек x и y такие, что имеет место вложение $V_1 \cdot V_2 \subset U$, откуда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Вложение D_p в D_n непрерывно, а Y_X плотно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство D_n является топологической суммой семейства $\{X_r\}$. Каноническое вложение X_1 и D_n непрерывно. Тогда непрерывность вложения D_p в D_n следует из равенства $X_1 = D_p$.

Для любой точки $x \in D_n$ существует номер m такой, что $x \in X_m$. Тогда найдутся простые распределения $x^1, \dots, x^m$, образующие мультипликативное разложение x . Оператор $A: (D_p)^m \rightarrow X_m$, характеризуемый равенством $A(x^1, \dots, x^m) = x$, непрерывен. Следовательно, для любой окрестности U точки x существуют окрестности $U_1, \dots, U_m$ точек $x^1, \dots, x^m$ соответственно такие, что $U_1 \cdot \dots \cdot U_m \subset U$.

Множество $D(\Omega)$ плотно в $D'(\Omega)$, гомеоморфном D_p . Тогда вложение $Y_X = I(D(\Omega))$ в D_p плотно. Следовательно, пересечение $U_i \cap Y_X$ для любого $i = 1, \dots, m$ непусто. В результате получаем соотношение

$$\prod_{i=1}^m U_i \cap Y_X \neq \emptyset.$$

Тогда пересечение $(U_1 \cdot \dots \cdot U_m) \cap Y_X$ также непусто. Учитывая вложение произведения множеств $\{U_i\}$ в U , заключаем, что $U \cap Y_X \neq \emptyset$. Таким образом, произвольная окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством Y_X , т.е. является его точкой прикосновения. Отсюда в силу произвольности выбора точки $x \in D_n$ следуют утверждения теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Операции сложения, умножения и дифференцирования непрерывны на D_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность сложения на D_i доказывается так же, как непрерывность умножения на D_p . Для любых $x, y \in D_i$ существуют номера m и n такие, что $x \in Y_m, y \in Y_n$. Тогда найдутся натуральные распределения $x^1, \dots, x^m; y^1, \dots, y^n$,

суммы которых составляют x и y . Пользуясь определением произведения на множестве D_i , устанавливаем равенство

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x^i \cdot y^j.$$

Таким образом, произведение на множестве D_i сводится к сумме произведений натуральных распределений. Учитывая непрерывность умножения на D_n и сложения на D_i , заключаем, что операция умножения непрерывна на D_i . Непрерывность дифференцирования на D_i является следствием аналогичного свойства на D_p и непрерывности операций сложения и умножения. Теорема доказана.

По аналогии с теоремой 4 доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Вложение D_p в D_i непрерывно, а Y_X плотно.*

Естественно, топологические пространства D^n и D^i обладают аналогичными свойствами. На основе полученных результатов приходим к заключению.

ТЕОРЕМА 8. *Множество целых распределений D^i (соответственно D_i) обладает структурой топологической дифференциальной коммутативной ассоциативной (соответственно неассоциативной) алгебры.*

Итак, построены классы целых распределений, существенно более широкие, чем классическое пространство распределений, замкнутые относительно операций сложения, умножения и дифференцирования, на которых введена топология, согласованная с алгебраической структурой множества. Полученные результаты могут быть использованы для анализа широкого класса нелинейных бесконечномерных систем. В частности, для многих важных с практической точки зрения задач математической физики нелинейные члены характеризуются операцией умножения (произведение неизвестных функций, функции на производную и т.п., см., например, [20]). Если для такой системы получены даже весьма слабые априорные оценки решения (лишь бы было непрерывное вложение соответствующего функционального класса в пространство распределений), то, пользуясь непрерывностью операций на множествах арифметических распределений, можно обосновать предельный переход и установить желаемый результат. Получаемое решение оказывается не просто арифметическим распределением, но и принадлежит тому функциональному классу, на котором были получены априорные оценки решения, т.е. оказывается вполне регулярным объектом. Однако, даже доказательство разрешимости задачи на множествах арифметических распределений нельзя считать неудовлетворительным результатом, поскольку объекты такой природы могут быть сколь угодно точно аппроксимированы достаточно регулярными функциями. Вспомним также, что решения широкого класса дифференциальных уравнений могут быть интерпретированы как обобщенные распределения [14]–[19].

4. Бинарные отношения. Выше был предложен итерационный процесс, позволяющий осуществить расширение множества обобщенных функций так, чтобы на нем были определены и непрерывны естественные операции. При этом практически нигде не

использовалась собственно природа распределений. В связи с этим возникает предположение, что описанную процедуру можно формализовать и применить для непрерывного продолжения структур общего вида. Мы ограничимся рассмотрением лишь бинарных отношений.

Рассмотрим отдельное топологическое пространство X с топологией τ и подмножеством Y , на котором определено бинарное отношение ρ . Предположим, что множество Y секвенциально плотно в X в том смысле, что для любой точки x из X существует последовательность из Y , сходящаяся к x . Определим семейство Ψ всех сходящихся последовательностей из Y и отношение эквивалентности ψ на нем, считая условие $\{x_k\}\psi\{y_k\}$ выполненным, если соответствующие пределы совпадают. Рассмотрим фактормножество $X_Y = \Psi/\psi$. Для любого $x \in X$ определим класс эквивалентности $Ix = [\{x_k\}]_\psi$ по отношению ψ с представителем $\{x_k\}$ – последовательностью элементов из Y , сходящейся к x . Тем самым, задана биекция $I: X \rightarrow X_Y$, которую назовем секвенциальным изоморфизмом пространства X относительно множества Y . Положим $Y_X = I(Y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тройку $(X_\rho, \rho_\tau, \tau_\rho)$ назовем *секвенциальным продолжением* тройки (Y, ρ, τ) , если выполнены следующие условия:

- 1) X_Y – подмножество X_ρ ;
- 2) ρ_τ – оператор на X_ρ ;
- 3) множество $\rho_\tau(Y_X)$ равномощно $\rho(Y)$;
- 4) τ_ρ – топология на X_ρ ;
- 5) топология, индуцированная τ_ρ на X_Y , гомеоморфна τ ;
- 6) отображение ρ_τ непрерывно в смысле τ_ρ .

Положим $\Psi_1 = \Psi$, $\psi_1 = \psi$, $X_1 = X_Y$. Пусть $\beta(Y)$ есть булеан множества Y . Определим оператор $\rho^1: Y \rightarrow \beta(Y)$, полагая $\rho^1(y) = \rho(y)$ для всех $y \in Y$, где $\rho(y)$ – образ отношения ρ в точке y , являющийся подмножеством Y , а значит, элементом $\beta(Y)$. Для любого множества x из Y семейство $\rho^1(x)$ является подмножеством $\beta(Y)$. В частности, для последовательности $\{x_k\}$ элементов множества можно определить выражение $\rho^1(\{x_k\}) = \rho(\{x_k\}) = \{\rho(x_k)\}$, являющееся подмножеством $\beta(Y)$.

Зададим оператор $\rho^2: \beta(Y) \rightarrow \beta^2(Y)$, где $\beta^2(Y) = \beta[\beta(Y)]$, полагая $\rho^2(x) = \rho^1(x)$ для всех $x \in \beta(Y)$. Имеем включение $\rho^2(\{x_k\}) \in \beta^2(Y)$. Учитывая вложение $\Psi_1 \subset \beta(Y)$, устанавливаем, что $\rho^2(\Psi_1) \subset \beta^2(Y)$. Определим семейство

$$\Psi_2 = \rho^2(\Psi_1) = \{\rho^2(\{x_k\}) \mid \{x_k\} \in \Psi_1\} = \{\{\rho(x_k)\} \mid \{x_k\} \in \Psi_1\}.$$

Введем на нем эквивалентность ψ_2 , считая условие $x\psi_2x'$ выполненным, если существуют элементы $y \in (\rho^2)^{-1}(x)$, $y' \in (\rho^2)^{-1}(x')$ такие, что справедливо соотношение $y\psi_1y'$. Зададим фактормножество $X_2 = \Psi_2/\psi_2$ и оператор $\rho_1: X_1 \rightarrow X_2$ следующим образом:

$$\rho_1(x) = [\rho^2(y)]_2 \quad \forall y \in x \in X_1.$$

Продолжая описанный процесс, для произвольного номера m введем оператор $\rho^m: \beta^{m-1}(Y) \rightarrow \beta^m(Y)$, полагая $\rho^m(x) = \rho^{m-1}(x)$ для всех $x \in \beta^{m-1}(Y)$. Учитывая вложение $\Psi_{m-1} \subset \beta^{m-1}(Y)$, устанавливаем, что $\rho^m(\Psi_{m-1}) \subset \beta^m(Y)$. Рассмотрим семейство

$$\Psi_m = \rho^{m-1}(\Psi_{m-1}) = \{\rho^{m-1}(x) \mid x \in \Psi_{m-1}\}$$

и отношение эквивалентности ψ_m на нем, считая условие $x\psi_mx'$ выполненным, если существуют элементы $y \in (\rho^m)^{-1}(x)$, $y' \in (\rho^m)^{-1}(x')$ такие, что справедливо соотношение $y\psi_{m-1}y'$. Определим фактормножество $X_m = \Psi_m/\psi_m$ и оператор $\rho_{m-1}: X_{m-1} \rightarrow X_m$ из условия

$$\rho_{m-1}(x) = [\rho^m(y)]_m \quad \forall y \in x \in X_{m-1}.$$

Рассмотрим объединение X_ρ семейства $\{X_m\}$. Для любого элемента x из X_ρ найдется номер m такой, что справедливо включение $x \in X_m$. Определим оператор $\rho_\tau: X_\rho \rightarrow X_\rho$, полагая $\rho_\tau(x) = \rho_m(x)$ для любого $x \in X_m$ и произвольного m . Итак, построены расширение X_ρ множества X_Y и оператор ρ_τ на X_ρ . Тем самым, выполняются условия 1), 2) определения 1.

Для любого элемента y из образа $\rho(Y)$ существует элемент $x \in Y$ такой, что $y = \rho(x)$. Тогда выражение

$$\bar{y} = \rho_\tau(Ix) = [\{\rho(x)\}]_2,$$

где $\{\rho(x)\}$ – стационарная последовательность с элементом $\rho(x)$, принадлежит множеству $\rho_\tau(Y_X)$. Предположим, что существует объект x' , отличный от x , такой, что $y = \rho(x')$. Справедливы равенства

$$\bar{y}' = \rho_\tau(Ix') = [\{\rho(x')\}]_2 = [\{\rho(x)\}]_2 = \bar{y},$$

т.е. соответствующие элементы множества $\rho_X(Y_X)$ совпадают. Тогда любой объект из $\rho(Y)$ однозначно определяет элемент множества $\rho_\tau(Y_X)$.

С другой стороны, для любого $\bar{y} \in \rho_\tau(Y_X)$ найдется элемент $\bar{x} \in Y_X$ такой, что $\bar{y} = \rho(\bar{x})$. Определяя $x = I^{-1}\bar{x}$, найдем $y = \rho(x)$ из множества $\rho(Y)$. Пусть существует другой элемент $\bar{x}' \in Y_X$, удовлетворяющий равенству $\bar{y} = \sigma(\bar{x}')$. Полагая $y' = \rho(x')$, где $x' = I^{-1}\bar{x}'$, устанавливаем соотношения

$$\rho_\tau(\bar{x}) = [\{\rho(x)\}]_2 = [\{y\}]_2 = \rho_\tau(\bar{x}') = [\{\rho(x')\}]_2 = [\{y'\}]_2.$$

Таким образом, стационарные последовательности $\{y\}$ и $\{y'\}$ эквивалентны в смысле отношения ψ_2 , что возможно исключительно при $y = y'$. Итак, любой элемент из $\rho_X(Y_X)$ однозначно определяет элемент множества $\rho(Y)$. Следовательно, множества $\rho(Y)$ и $\rho_\tau(Y_X)$ равномощны.

Введем топологию на множестве X_ρ . Обозначим через τ_1 топологию на X_1 , перенесенную из X с помощью биекции I , т.е. $\tau_1 = I\tau$. Тогда пространства (X_1, τ_1) и (X, τ) гомеоморфны. Обозначим через τ_2 финальную топологию на X_2 , перенесенную из (X_1, τ_1) с помощью оператора ρ_1 . Тогда отображение $\rho_1: (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ непрерывно. Для произвольного номера m , обозначая через τ_m финальную топологию на X_m , перенесенную из (X_{m-1}, τ_{m-1}) с помощью оператора ρ_{m-1} , установим непрерывность отображения $\rho_{m-1}: (X_{m-1}, \tau_{m-1}) \rightarrow (X_m, \tau_m)$. Пусть τ_ρ есть топология на X_ρ , соответствующая топологической сумме пространств $\{(X_m, \tau_m)\}$. Тогда ρ_τ – непрерывный оператор на (X_ρ, τ_ρ) . При этом топология, индуцированная τ_ρ на X_Y , есть τ_1 , которая гомеоморфна τ . Итак, выполняются свойства 4)–6) определения 1. Таким образом, доказано утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Тройка $(X_\rho, \rho_\tau, \tau_\rho)$ – секвенциальное продолжение (X, ρ, τ) .*

Установим дополнительный результат.

ТЕОРЕМА 10. *Множество $\Sigma_x = \bigcup_m (\rho_\tau)^m(Y_X)$ плотно в X_ρ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор $I: X \rightarrow X_Y$ – гомеоморфизм, а Y плотно в X , то множество Y_X плотно в $X_Y = X_1$, а значит, справедливо равенство $\overline{Y}_X = X_1$. В силу непрерывности ρ_1 имеем вложение

$$\rho_1(\overline{Y}_X) \subset \overline{\rho_1(Y_X)}.$$

Оператор ρ_1 является сюръекцией, т.е. $\rho_1(X_1) = X_2$. В результате получаем $X_2 \subset \overline{\rho_1(Y_X)}$. Откуда следует, что $X_2 = \overline{\rho_1(Y_X)}$, т.е. множество $\rho_1(Y_X)$ плотно в X_2 . Учитывая, что сужение оператора ρ_τ на X_1 совпадает с ρ_1 , заключаем, что $\rho_\tau(Y_X)$ плотно в X_2 . Пусть множество $\rho_\tau^{m-1}(Y_X)$ плотно в X_m . Оператор $\rho_1: X_m \rightarrow X_{m+1}$ – непрерывная сюръекция. Тогда

$$X_{m+1} = \rho_m(X_m) \subset \rho_m(\overline{\rho_\tau^{m-1}(Y_\tau)}) \subset \overline{\rho_m(\rho_\tau^{m-1}(Y_X))} \subset X_{m+1}.$$

Отсюда следует плотность вложения в X_{m+1} множества

$$\rho_\tau^m(Y_X) = \rho_m(\rho_\tau^{m-1}(Y_X)).$$

Пусть U есть непустое открытое множество из пространства X_ρ . Тогда существует номер m такой, что имеет место включение $U \in \tau_m$. В силу плотности вложения множества $\rho_\tau^{m-1}(Y_X)$ в X_m имеем $\rho_\tau^{m-1}(Y_X) \cap U \neq \emptyset$, откуда следует неравенство $\Sigma_X \cap U \neq \emptyset$. Учитывая произвольность окрестности U , устанавливаем, что Σ_X плотно в X_ρ . Теорема доказана.

Если множество Y не секвенциально плотно, а только плотно в топологическом пространстве X , то для любой точки x из X существует фильтр F из Y , сходящийся к x . Обозначим через Ψ множество всех сходящихся фильтров из Y . Определим на нем отношение эквивалентности ψ , считая условие $F\psi F'$ выполненным, если указанные фильтры имеют один и тот же предел. При этом фактормножество $X_Y = \Psi/\psi$ равномощно X , т.е. существует биекция $I: X \rightarrow X_Y$. Теперь можно повторить приведенные ранее рассуждения и построить секвенциальное продолжение бинарного отношения при соответствующей корректировке технических выкладок.

В качестве приложения полученных результатов определим секвенциальное продолжение операции первого порядка. Рассмотрим отдельное топологическое пространство (X, τ) и плотное подмножество Y . Пусть множества Ψ, X_Y, Y_X , отношение ψ и оператор I определяются указанным выше способом. Предположим, что на Y задана операция первого порядка, характеризуемая оператором $A: Y \rightarrow Y$. Будем считать, что топологическая и алгебраическая структура на Y согласованы, т.е. оператор A непрерывен в топологии, индуцированной на Y топологией τ . График этого оператора является бинарным отношением на Y . Поэтому для продолжения операции можно применить описанную методику. При этом, пользуясь свойствами рассматриваемого отношения, можно существенно упростить проводимые рассуждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тройку (X_A, A_τ, τ_A) назовем *секвенциальным продолжением* тройки (Y, A, τ) , если выполнены условия:

- 1) X_Y – подмножество X_A ;
- 2) A_τ – оператор на X_A ;
- 3) $A_\tau(Y_X)$ равномошно $A(Y)$;
- 4) τ_A – топология на X_A ;
- 5) топология, индуцированная τ_A на X_Y , гомеоморфна τ ;
- 6) A_τ непрерывен в смысле τ_A .

Положим $\Psi_1 = \Psi$, $\psi_1 = \psi$. Определим семейство $\Psi_2 = A(\Psi_1)$ и эквивалентность ψ_2 на нем, считая условие $M\psi_2M'$ выполненным, если существуют фильтры F, F' из Ψ_1 такие, что имеют место соотношения $M = A(F)$, $M' = A(F')$, $F\psi_1F'$. Для любого номера m рассмотрим семейство $\Psi_{m+1} = A(\Psi_m)$ и эквивалентность ψ_{m+1} на нем, причем условие $M\psi_{m+1}M'$ предполагает существование величин F, F' из Ψ_m таких, что выполняются соотношения $M = A(F)$, $M' = A(F')$, $F\psi_mF'$. Определим фактормножества $X_m = \Psi_m/\psi_m$, $m = 1, 2, \dots$, и оператор $A_m: X_m \rightarrow X_{m+1}$ с помощью равенства

$$A_mx = [\{A(F)\}]_{m+1} \quad \forall x = [\{F\}]_m \in X_m.$$

Обозначим через X_A объединение семейства $\{X_m\}$. Для любого элемента x из X_A существует номер m такой, что $x \in X_m$. На множестве X_A определим оператор A_τ , полагая $A_\tau x = A_mx$ для всех $x \in X_m$.

Для любого $y \in A(Y)$ существует элемент x из Y такой, что имеет место равенство $y = Ax$. Определим значение

$$\bar{y} = A_\tau(Ix) = A_1(Ix) = [A(F)]_2,$$

где F – произвольный фильтр из Y , сходящийся к точке x . Учитывая непрерывность оператора A , заключаем, что $A(F)$ есть фильтр из Y , сходящийся к Ax . Таким образом, значение $\bar{y} \in A_\tau(Y_X)$ однозначно определяется элементом y . С другой стороны, для любого элемента $\bar{y} \in A_\tau(Y_X)$ существует значение $x \in Y_X$ такое, что $\bar{y} = A_\tau\bar{x}$. Тогда можно определить точку $x = I^{-1}(\bar{x})$ и $y = Ax$ из множества Y . Предположим, что найдется другое значение $x' \in Y_X$, удовлетворяющее условию $\bar{y} = A_\tau\bar{x}'$. Ему соответствует $y' = Ax'$, где $x' = I^{-1}(\bar{x}')$. При этом выполняются соотношения

$$A_\tau(\bar{x}) = [A(F)]_2 = A_\tau(\bar{x}') = [A(F')]_2,$$

где F, F' – произвольные фильтры, сходящиеся соответственно к точкам x, x' . В качестве таковых выбираем элементарные фильтры, ассоциированные со стационарными последовательностями, определяемыми этими точками [25]. Последние равенства возможны исключительно при выполнении условия $Ax = Ax'$, а значит, $y = y'$. Таким образом, между множествами $A_\tau(Y_X)$ и $A(Y)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. они равномошны.

Определив на X_2 образ относительно оператора A_1 топологии из X_1 , получаем сильнейшую топологию, относительно которой оператор $A_1: X_1 \rightarrow X_2$ непрерывен. Аналогично на множестве X_{m+1} вводится образ относительно A_m топологии X_m . Тогда оператор A_m непрерывен. Понимая под топологическим пространством X_A топологическую сумму семейства $\{X_m\}$, устанавливаем, что оператор A_τ непрерывен в топологии X_A . Таким образом, справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 11. *Тройка (X_A, A_τ, τ_A) – секвенциальное продолжение (Y, A, τ) .*

Аналог теоремы 10 в данном случае принимает достаточно простой вид.

ТЕОРЕМА 12. *Множество Y_X плотно в X_A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки x из Y_X справедливо равенство

$$A_\tau(x) = [A(F)]_\psi,$$

где F – произвольный фильтр, сходящийся к точке $I^{-1}x$. Тогда $A(F)$ является фильтром на Y , сходящимся к элементу $A(I^{-1}x)$, а значит, принадлежит классу Ψ . Справедливо включение $A_\tau(x) \in X_Y$. Найдем значение

$$I^{-1}(A_\tau(x)) = I^{-1}([A(F)]_\psi) = \lim A(F) = A(I^{-1}x).$$

Таким образом, $I^{-1}(A_\tau(x)) \in Y$, откуда следует, что $A_\tau(x) \in Y_X$ для любого элемента x из Y_X . Значит, A_τ есть оператор на Y_X .

В силу плотности вложения множества Y в X вложение Y_X плотно в X_1 . Пусть Y_X плотно вложено в пространство X_m . Для любой точки x из X_{m+1} существует y из X_m , удовлетворяющий равенству $x = A_my$. Учитывая непрерывность оператора A_m , устанавливаем, что для любой окрестности U точки x существует окрестность V точки y такая, что имеет место вложение $A_m(V) \subset U$. В силу плотности вложения множества Y_X в X_m справедливо соотношение $V \cap Y_X \neq \emptyset$, а значит, существует некоторая точка $z \in V \cap Y_X$. Из условия $z \in V$ следует, что $A_m(z) \in A_m(V)$. С другой стороны, из включения $z \in Y_X$, поскольку A_τ является оператором на Y_X , получаем, что $A_m(z) \in Y_X$. Таким образом, $A_m(z) \in A_m(V) \cap Y_X$, и множество $A_m(V) \cap Y_X$ непусто. Отсюда следует соотношение $U \cap Y_X \neq \emptyset$. Учитывая произвольность окрестности U и точки x , заключаем, что вложение Y_X в X_{m+1} плотно. Таким образом, множество Y_X плотно вложено в любое из пространств X_m , а значит, и в X_A . Теорема доказана.

Очевидно, любая структура на множестве X может быть перенесена на X_Y с помощью биекции I [26]. В связи с этим можно отождествить эти множества и считать, что оператор A_τ (точнее, его сужение A_1) является (с точностью до изоморфизма) непрерывным продолжением оператора A на X .

В качестве приложения определим дифференцирование распределений. На множестве $D(\Omega)$ рассмотрим дифференциальный оператор ∂ произвольного порядка. Обозначим через ∂' оператор обобщенного дифференцирования, соответствующий ∂ , а через I секвенциальный изоморфизм $D'(\Omega)$ относительно $D(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 13. *Тройка $(I(D'(\Omega)), I\partial'I^{-1}, I\tau)$ является секвенциальным продолжением тройки $(D(\Omega), \partial, \tau)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим, как и раньше, множество Ψ и эквивалентность ψ на нем. Введем обозначения $\Psi_1 = \Psi$, $\psi_1 = \psi$, $X_1 = \Psi_1/\psi_1$. Для произвольного номера t определим семейство

$$\Psi_{m+1} = \{\{y_k\} \subset D(\Omega) \mid \exists \{x_k\} \in \Psi_m : y_k = \partial x_k \quad \forall k\}.$$

Условие $\{y_k\}\psi_{m+1}\{y'_k\}$ на нем предполагает существование последовательностей $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ таких, что выполняются соотношения

$$\{x_k\}\psi_m\{x'_k\}, \quad y_k = \partial x_k, \quad y'_k = \partial x'_k \quad \forall k.$$

Положим $X_{m+1} = \Psi_{m+1}/\psi_{m+1}$. Пусть X_D есть объединение семейства $\{X_m\}$.

Для любой последовательности $\{y_k\} \in \Psi_2$ существует последовательность $\{x_k\} \in \Psi_1$, сходящаяся к некоторой точке x , такая, что $y_k = \partial x_k$ для всех k . В силу непрерывности обобщенного дифференцирования имеет место сходимост $\partial' x_k \rightarrow \partial' x$ в $D'(\Omega)$. Учитывая совпадение классического и обобщенного дифференцирования на $D(\Omega)$, получаем $y_k \rightarrow \partial' x$ в $D'(\Omega)$. Тогда справедливо включение $\{x_k\} \in \Psi$, а значит, $\Psi_2 \subset \Psi_1$. Аналогичным образом для любого номера m устанавливаем вложение $\Psi_{m+1} \subset \Psi_m$.

При $\{y_k\}\psi_2\{y'_k\}$ на Ψ_2 существуют последовательности $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ из $D(\Omega)$, сходящиеся к одной и той же точке $x \in D'(\Omega)$, такие, что

$$y_k = \partial x_k, \quad y'_k = \partial x'_k \quad \forall k.$$

Учитывая непрерывность обобщенного дифференцирования, получаем сходимост $y_k \rightarrow \partial' x$ и $y'_k \rightarrow \partial' x$ в $D'(\Omega)$, откуда следует $\{y_k\}\psi_1\{y'_k\}$. Аналогично из условия $\{y_k\}\psi_{m+1}\{y'_k\}$ на Ψ_{m+1} следует $\{y_k\}\psi_m\{y'_k\}$ для любого m . Тогда $X_{m+1} \subset X_m$ и множество X_D совпадает с X_1 , т.е. с $I(D'(\Omega))$.

Найдем значение

$$\partial_\tau x = [\{\partial x_k\}]\psi_m \quad \forall \{x_k\} \in x \in X_1.$$

Для любой последовательности $\{x_k\}$ из класса $x \in X_1$ имеем сходимост $x_k \rightarrow I^{-1}x$ в $D'(\Omega)$, а значит, $\partial x_k \rightarrow \partial' I^{-1}x$ в $D'(\Omega)$. Отсюда следует, что $\partial_\tau = I\partial' I^{-1}$. В силу равенства $X_D = I(D'(\Omega))$ топология на нем совпадает с образом в смысле I топологии на $D'(\Omega)$, т.е. с $I\tau$. Теорема доказана.

Итак, секвенциальное продолжение операции дифференцирования с $D(\Omega)$ на $D'(\Omega)$ с точностью до изоморфизма совпадает с обобщенным дифференцированием распределений. Полученные результаты показывают, что дифференцирование обобщенных функций может быть получено без перехода к сопряженному пространству. Это достаточно важно, поскольку известные обобщенные распределения, как правило, не могут быть интерпретированы как линейные непрерывные функционалы над каким-либо содержательным функциональным классом (см., например, [15]–[17], а также определенные выше арифметические распределения). На основании проведенного анализа можно заключить, что дифференцирование как на множестве распределений, так и на его расширениях можно определить чисто алгебраическими средствами.

Нетрудно убедиться, что приведенный ранее несогласованный вариант множества арифметических распределений соответствует секвенциальному продолжению операций второго порядка, которое вводится по аналогии с определением 2. Имеется возможность формализовать и согласованный вариант определения класса арифметических распределений, но естественно с усложнением описанной процедуры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скорняков Л. А. (ред.) Общая алгебра. Т. 1, 2. М.: Наука, 1990, 1991.
- [2] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
- [3] Арнаутков В. И., Водичар М. И., Михалёв А. В. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев, 1981.
- [4] Dirac P. A. Theory of emission and absorption of radiation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1927. V. 114. P. 243–262.
- [5] Schwartz L. Theorie des distributions. V. 1, 2. Paris: Hermann, 1950.
- [5] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.
- [7] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [8] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.
- [9] Tillmann H. G. Darstellung der schwartzschen distributionen durch analytische funktionen // Math. Z. 1961. V. 77. № 2. P. 106–124.
- [10] Бреммерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
- [11] Иванов В. К. Гиперраспределения и умножения распределений Шварца // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1045–1048.
- [12] Keller K. On the Multiplication of Distribution. I. Preprint. Aachen: Techn. Hochschule, 1975.
- [13] Berg L. Representations for distributions algebras // Z. Angew. Math. Mech. 1976. V. 56. № 5. P. 177–181.
- [14] Маслов В. П. Распространение ударных волн в изоэнтропическом газе // Итоги науки и техн. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 199–271.
- [15] Colombeau J. F. A multiplication of distributions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 94. № 1. P. 96–115.
- [16] Colombeau J. F. New generalised functions and multiplication of distributions. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [17] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
- [18] Шелкович В. М. Одна алгебра распределений и обобщенные решения нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1995. Т. 342. № 5. С. 600–602.
- [19] Rosinger E. E. Generalized solutions of nonlinear partial differential equations. Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland, 1987.
- [20] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [21] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [22] Серовайский С. Я. Введение в арифметическую теорию распределений // Докл. АН Республики Казахстан. 1996. № 5. С. 7–13.
- [23] Серовайский С. Я. Арифметическая теория распределений и одна нерешенная задача Ж.-Л. Лионса // Изв. АН Республики Казахстан. Сер. физ. -матем. 1996. № 3. С. 38–44.
- [24] Schwartz L. Sur l'impossibilite de la multiplication des distributions // C. R. Acad. Sci. Paris. 1954. V. 239. № 15. P. 847–848.
- [25] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
- [26] Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.