Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Р. Бальзин, Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 291–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:31:31

Производные сечения, факторизационные алгебры и гипотеза Делиня

Э. Р. Бальзин

Ключевые слова: гомотопическая алгебра, модельные категории, модельные структуры Риди расслоения Гротендика, факторизационные алгебры, операторные категории, гипотеза Делиня.

DOI: 10.4213/mzm11202

Задача по описанию мультипликативной структуры кратных пространств петель активно [1] изучалась в семидесятые годы прошлого века. Решение этой задачи привело к возникновению двух формализмов: подхода операд [2], а также формализма Сигала [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Операдой* $\mathcal{O}$ в симметрической моноидальной категории [4] (далее СМК) $\mathcal{M}$ называется набор объектов $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, с действием симметрической группы Σ_n и заданными законами композиции $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k) \rightarrow \mathcal{O}(n+k-1)$, которые ассоциативны, совместимы с действием симметрических групп и обладают единицей (подробное определение дано в [5]). Структурой *$\mathcal{O}$ -алгебры* на объекте X называется семейство совместимых со структурой $\mathcal{O}$ отображений $\mathcal{O}(n) \otimes X^{\otimes n} \rightarrow X$.

ПРИМЕР 2. В категории **Тор** топологических пространств с декартовым умножением существует такая операда E_n , где $n \in [1, \infty]$, что всякое n -кратное пространство петель $\Omega^n Y$ является E_n -алгеброй.

Отметим, что алгебры над операдой имеет смысл рассматривать только с точностью до гомотопической эквивалентности. Обычная техника для этого – гомотопическая алгебра и модельные категории в смысле работы Квиллена [6]–[8]. Это же верно для операд; например, в качестве E_∞ -операды годится любая операда $\mathcal{O}$ такая, что всякое $\mathcal{O}(k)$ стягиваемо со свободным действием Σ_k . В качестве E_n -операды для конечного n можно взять такую, что $E_n(k)$ гомотопически эквивалентно пространству k различных точек в n -мерном диске.

Вместо **Тор** можно взять моноидальную категорию **DVect** $_k$ комплексов векторных пространств с тензорным произведением и рассмотреть в ней операды E_n , полученные взятием цепных комплексов от операд E_n из примера 2. Одно из утверждений, которое можно доказать в **DVect** $_k$ – известная

ТЕОРЕМА 3 (гипотеза Делиня [9]–[11]). Пусть A – dg-алгебра и $CH(A)$ – ее когомологический комплекс Хохшильда. Тогда на $CH(A)$ действует операда E_2 .

Доказательства этого утверждения нетривиальны, и их нетривиальность связана с выбором операды: квазиизоморфные операды, описывающие эквивалентные алгебраические структуры на когомологиях, могут сильно отличаться по своей сложности.

Опишем теперь подход Сигала. В [3] рассматриваются функторы $X: \Gamma \rightarrow \mathbf{Тор}$, где Γ – категория отмеченных конечных множеств, со специальными условиями. В формализме операд таким структурам соответствуют алгебры над операдой E_∞ . Функторы, подобные X , задают наборы диаграмм вида

$$A^n \leftarrow B(n) \rightarrow A \quad (1)$$

и специальное условие на X состоит в том, что левая стрелка в (1) является гомотопической эквивалентностью. Не обязательно при этом, что $B(n) \cong E_\infty(n) \times A^n$. Формализм Сигала не имеет проблем, связанных с выбором модели для операды E_∞ , и может быть обобщен на другие алгебраические структуры посредством замены Γ на другие операторные [12] категории. Однако, в существующем виде он применим только к СМК, произведение в которых

DOI: 10.4213/mzm11202

© Э. Р. Бальзин, 2016

декартово. Тензорное произведение комплексов не является декартовым, а потому подход Сигала к $\mathbf{DVect}_k$ требует модифицирования.

Например, это можно осуществить следующим образом. Произведение в категории $\mathbf{Cat}$ фалых категорий декартово, а потому формализм Сигала применим в этом случае.

Конструкция 4. Всякая СМК $\mathcal{M}$ отвечает функтору $F: \Gamma \rightarrow \mathbf{Cat}$ со значением $F(S) \cong \mathcal{M}^{S \setminus s}$, где $s \in S$ – отмеченная точка. Эквивалентное описание таких функторов [13] – формализм (оп)-расслоений Гротендика. В рамках этого языка СМК $\mathcal{M}$ отвечает функтор [14], [3] $p: \mathcal{M}^\otimes \rightarrow \Gamma$ такой, что слои $\mathcal{M}^\otimes(S) := p^{-1}(S) \cdot \mathcal{M}^{S \setminus s}$ и для каждого объекта X с $p(X) = S$ и отображения отмеченных множеств $f: S \rightarrow T$ существует универсальный морфизм $X \rightarrow f_! X$ в $\mathcal{M}^\otimes$, накрывающий f . Такой универсальный морфизм называется *декартовым*.

Обозначим через $\text{Alg}(\mathcal{M})$ категорию коммутативных алгебр в $\mathcal{M}$, а через $\text{Sect}(\Gamma, \mathcal{M}^\otimes)$ – категорию сечений функтора $p: \mathcal{M}^\otimes \rightarrow \Gamma$.

Конструкция 5. Всякой алгебре $A \in \text{Alg}(\mathcal{M})$ соответствует сечение $s(A) \in \text{Sect}(\Gamma, \mathcal{M}^\otimes)$, которое сопоставляет множеству T значение $(A, \dots, A) \in \mathcal{M}^\otimes(T)$. Соответствующий функтор $s: \text{Alg}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Sect}(\Gamma, \mathcal{M}^\otimes)$ строго полон, а его образ легко охарактеризовать [14].

К сожалению, в гомотопическом контексте этот подход все равно не работает. А именно, если $\mathcal{M}$, помимо моноидальной, имеет также и модельную структуру (как, например, $\mathbf{DVect}_k$ с проективной модельной структурой [8]), то коммутативные алгебры обязательно являются правильным объектом для рассмотрения и не совпадают, даже с точностью до квазиизоморфизма, с $\mathbb{E}_\infty$ -алгебрами. Таким образом, для применения подхода Сигала в гомотопической алгебре необходимо более широкое понятие, чем сечение расслоения Гротендика.

Обобщая ситуацию, введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Модельное оп-расслоение* $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ – оп-расслоение, слои которого – модельные категории, а функторы перехода сохраняют слабые эквивалентности и фибрации.

Следуя [15], [16] определим производные сечения этого опрасслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Симплициальной заменой* $\mathbb{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется категория $(\int N\mathcal{C})^{op}$, двойственная к категории элементов [17] нерва $\mathcal{C}$. Объектом $\mathbb{C}$ является, таким образом, набор $c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$ композируемых морфизмов в $\mathcal{C}$ произвольной длины.

В [15] показано, как из оп-расслоения $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ получить расслоение $q: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что

$$\mathbf{E}(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n) \cong \mathcal{E}(c_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Категория *производных предсечений* $\text{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ модельного оп-расслоения $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ есть категория $\text{Sect}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$ сечений расслоения $q: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}$.

Неформально, производное предсечение X строит по каждому морфизму $f: c \rightarrow c'$ диаграмму в $\mathcal{E}(c')$ вида

$$f_! X(c) \longleftarrow X(f) \longrightarrow X(c'), \quad (2)$$

где $X(c) \rightarrow f_! X(c)$ – декартов морфизм в $\mathcal{E}$, накрывающий f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Категория *производных сечений* $\text{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ – полная подкатегория $\text{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, состоящая из таких X , что левые стрелки в диаграммах типа (2) – слабые эквивалентности (точное определение дано в [15]).

Таким образом, производное сечение модельного оп-расслоения $p: \mathcal{M}^\otimes \rightarrow \Gamma$ задает набор диаграмм

$$A^{\otimes S} \longleftarrow B(S) \longrightarrow A, \quad (3)$$

в которых левая стрелка является слабой эквивалентностью. Это соответствует обычному формализму Сигала (1).

ТЕОРЕМА 10. В вышеописанной ситуации на категории предсечений $\text{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ существует модельная структура.

Модельная структура теоремы 10 строится аналогично модельным структурам Риди [8], что представляет независимый интерес. Кроме того, она позволяет эффективно работать с категориями производных сечений. В частности, можно доказать следующий результат.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 11. Обозначим через $\text{Ho PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ локализацию [6], [8] категории $\text{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ вдоль слабых эквивалентностей, и через $\text{Ho DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ – соответствующую подкатегорию производных сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ называется *резольвентой*, если для каждой последовательности стрелок $c_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} c_n$ в $\mathcal{C}$ категория

$$\mathcal{D}(c_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} c_n) = \{d_0 \rightarrow \dots \rightarrow d_n \mid F(d_{i-1} \rightarrow d_i) = f_i\}$$

имеет стягиваемый нерв.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Если вдобавок $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ – оп-расслоение, то введенное понятие резольвенты совпадает с описанным нами ранее в [15], [16]. В этом случае функтор $\mathcal{D}(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n) \rightarrow \mathcal{D}(c_0)$ допускает сопряженный, и по известной теореме Квиллена [18] это дает гомотопическую эквивалентность нервов $\mathcal{D}(c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n)$ и $\mathcal{D}(c_0)$.

Если дан функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, то по модельному оп-расслоению $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ можно индуцировать (посредством взятия обратного образа) модельное оп-расслоение $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ над $\mathcal{D}$. На предсечениях возникает функтор $\mathbb{F}^*: \text{PSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{PSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$, он ограничивается на гомотопические категории производных сечений и дает функтор

$$\text{h}\mathbb{F}^*: \text{Ho DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ho DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}).$$

ТЕОРЕМА 14. Пусть $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ – резольвента в смысле определения 12. Тогда существует функтор $\text{h}\mathbb{F}_!: \text{Ho DSect}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ho DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, который сопряжен $\text{h}\mathbb{F}^*$ слева на гомотопических категориях. Кроме того, $\text{h}\mathbb{F}^*$ строго полон, а композиция $\text{h}\mathbb{F}_! \text{h}\mathbb{F}^*$ изоморфна тождественному функтору.

В качестве приложения этого результата мы предлагаем доказательство гипотезы Делина в формализме Сигала. Для этого определим следующие категории В и Т. Предварительно заметим, что всякий морфизм отмеченных множеств $f: T \rightarrow U$ индуцирует морфизм $\bar{f}: T' \rightarrow U \setminus u$, где $U \setminus u$ – подмножество всех неотмеченных точек U и $T' = f^{-1}(U \setminus u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Объект категории В – инъективное пунктированное отображение $i_T: (T, t) \hookrightarrow (S^2, s)$ отмеченного конечного множества T в двумерную сферу S^2 с фиксированной точкой s . Ограничение на подмножество $T' \subset T$, не содержащее отмеченную точку, естественно индуцирует инъективное отображение $j_{T'}: T' \rightarrow D^2$ в двумерный диск. Морфизм между двумя объектами i_T, j_U , состоит из морфизма $f: T \rightarrow U$ отмеченных множеств, который индуцирует $\bar{f}: T' \rightarrow U \setminus u$, и пути между $j_{T'}$ и $j_{U \setminus u}$ в стратифицированном фундаментальном группоиде [19] $\Pi_1^{\text{strat}}(\text{Conf}(D^2, |T'|))$ пространства $\text{Conf}(D^2, |T'|)$ конфигураций $|T'|$ точек на двумерном диске.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Пусть $\mathcal{M}$ – СМК, тогда естественный функтор $\text{В} \rightarrow \Gamma$ индуцирует оп-расслоение $\mathcal{M}^{\otimes} \rightarrow \text{В}$. Производные сечения этого оп-расслоения естественным образом отвечают факторизационным алгебрам в смысле [20]. С точностью до квазиизоморфизма, они также соответствуют $\mathbb{E}_2$ -алгебрам в смысле [9]–[11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Объектами категории Т являются планарные деревья с корнем, вершинами, отмеченными конечным множеством S , и стабильными неотмеченными вершинами [21]. Морфизмы между деревьями даны отображением конечных множеств, стягиванием ребер и стабилизациями.

Существует также категория $\tilde{T}$, объекты которой такие же, как в T , вложенные при этом в диск. Корни всех деревьев при этом переходят в фиксированную точку на границе. Естественный функтор $\tilde{T} \rightarrow T$ является эквивалентностью категорий, а забывание дерева (остаются отмеченные вершины) индуцирует функтор $\tilde{T} \rightarrow B$. Обращение эквивалентности задает функтор $F: T \rightarrow B$.

ТЕОРЕМА 18 ([21], см. также [22]). *Функтор $F: T \rightarrow B$ является резольвентой в смысле определения 12.*

Обозначим через $\mathbf{DVect}_k^\otimes \rightarrow T$ оп-расслоение, индуцированное с $\mathbf{DVect}_k^\otimes \rightarrow \Gamma$ по функтору $T \rightarrow B \rightarrow \Gamma$. Пусть дана dg k -алгебра A , и обозначим также A^{op} dg -алгебру с обратным умножением, а за A^* – двойственное k -векторное пространство к A . Тогда можно определить [23] T -сечение этого оп-расслоения, которое соответствует кохомологическому комплексу $CH(A, A)$ Хохшильда алгебры A , следующим образом.

Существует опрасслоение $\mathbf{Bimod}_A^\otimes \rightarrow T$, слой которого над деревом $t \in T$ есть

$$\mathbf{Bimod}_A^\otimes(t) = \prod_v A^{\otimes \text{in}(v)} \otimes A^{\text{op}}\text{-}\mathbf{Bimod},$$

то есть произведение, взятое по всем вершинам v , кроме корня, категорий $A^{\otimes \text{in}(v)} \otimes A^{\text{op}}$ -бимодулей, где $\text{in}(v)$ обозначает число ребер, входящих в v . Существует функтор

$$L: A^{\otimes n} \otimes A^{\text{op}}\text{-}\mathbf{Bimod} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Bimod} \quad \text{со значением} \quad L(M) = M \otimes_{A^{\otimes n} \otimes A^{\text{op}}} A^{\otimes n}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Для функтора L существует правый сопряженный*

$$R: A\text{-}\mathbf{Bimod} \rightarrow A^{\otimes n} \otimes A^{\text{op}}\text{-}\mathbf{Bimod}, \quad R(N) = A^{*\otimes n} \otimes N,$$

который точен и, более того,

$$HH^*(A^{\otimes n} \otimes A^{\text{op}}, R(M)) = HH^*(A, M).$$

Функтор L можно продолжить до отображения оп-расслоений

$$L: \mathbf{Bimod}_A^\otimes \rightarrow A\text{-}\mathbf{Bimod} \times T,$$

где $A\text{-}\mathbf{Bimod} \times T \rightarrow T$ есть постоянное оп-расслоение.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ и $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ – два модельных оп-расслоения и $G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ – функтор, коммутирующий с проекциями в $\mathcal{C}$, так что послоино $G(c): \mathcal{E}(c) \rightarrow \mathcal{F}(c)$ является левым квиленовым функтором с правым сопряженным $H(c)$. Тогда естественно индуцированный функтор $G: \mathbf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{DSect}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ имеет правый сопряженный hH на гомотопических категориях.*

Таким образом, из сечения $A: T \rightarrow A\text{-}\mathbf{Bimod} \times T$, $A(t) = (A, t)$, мы получаем сечение $R(A): T \rightarrow \mathbf{Bimod}_A^\otimes$. Сопоставление

$$M \in \mathbf{Bimod}_A^\otimes(t) \cong A^{\otimes \text{out}(t)} \otimes A^{\text{op}}\text{-}\mathbf{Bimod} \mapsto CH(A^{\otimes \text{out}(t)} \otimes A^{\text{op}}, M)$$

задает морфизм T -оп-расслоений $CH: \mathbf{Bimod}_A^\otimes \rightarrow \mathbf{DVect}_k^\otimes$, и нужное нам сечение получается как $CH(R(A))$. Применение теорем 14 и 18 к полученному T -сечению дает нам производное B -сечение, которое описывает кохомологический комплекс Хохшильда как $\mathbb{E}_2$ -алгебру в сигаловом формализме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. F. Adams, *Infinite Loop Spaces*, Ann. of Math. Stud., **90**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1978. [2] J. P. May, *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lectures Notes in Math., **271**, Springer-Verlag, Berlin, 1972. [3] G. Segal, *Categories and Cohomology Theories*, Topology, **13**, 1974. [4] S. Mac Lane, *Categories for The Working Mathematician*, Graduate Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998. [5] T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **298**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. [6] D. Quillen, *Higher K-Theories*, Lecture Notes in Math., **341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 85–147. [7] W. G. Dwyer, Ph. S. Hirschhorn, D. M. Kan, J. H. Smith, *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*, Math. Surveys Monogr., **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. [8] M. Hovey, *Model Categories*, Math. Surveys Monogr., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. [9] J. E. McClure, J. H. Smith, *Recent Progress in Homotopy Theory*, Contemp. Math., **293**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 153–193. [10] Dmitry E. Tamarkin, *Another Proof of M. Kontsevich Formality Theorem*, 1998, arXiv: math.QA/9803025. [11] K. Costello, *Adv. Math.*, **210**:1 (2007), 165–214. [12] C. Barwick, *From Operator Categories to Topological Operads*, 2013, arXiv: 1302.5756. [13] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971. [14] J. Lurie, *Higher Algebra*, 2016, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>. [15] E. Balzin, *Derived Sections of Grothendieck Fibrations and the Problems of Homotopical Algebra*, 2015, arXiv: 1410.3387. [16] Э. Бальзин, *УМН*, **69**:5 (419) (2014), 159–160. [17] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1972. [18] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., **43**, Springer-Verlag, Berlin, 1967. [19] T. Woolf, *The Fundamental Category of a Stratified Space*, 2013, arXiv: 0811.2580. [20] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **51**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. [21] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Homological Mirror Symmetry*, Lecture Notes in Phys., **757**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 1–67. [22] D. Kaledin, *Homological Methods in Non-commutative Geometry*, Lecture Notes, University of Tokyo, Tokyo, 2008. [23] D. Kaledin, *Non-Commutative Geometry from the Homological Point of View*, Lecture Notes, KIAS, Seoul, 2009.

Э. Р. Бальзин

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва;

Laboratoire de Mathématiques

Jean Alexandre Dieudonné,

Université de Nice Sophia Antipolis, Франция

E-mail: eduard.r.balzin@gmail.com,erbalzin@edu.hse.ru, balzin@unice.fr

Поступило

25.02.2016