Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Мирзоев, Н. Н. Конечная, Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 312–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 08:46:19

Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами

К. А. Мирзоев, Н. Н. Конечная

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, негладкие коэффициенты, квазипроизводные, квазидифференциальные выражения, асимптотика решений, главный член асимптотики, произведение квазидифференциальных выражений.

DOI: 10.4213/mzm11203

1. Квазипроизводные и квазидифференциальные выражения. Пусть комплекснозначные функции f_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots, m$, $m > 1$, – элементы матрицы $F = (f_{jk})$ – определены, измеримы на интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b < +\infty$, и удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $f_{jk} = 0$ почти всюду на (a, b) при $2 \leq j + 1 < k \leq m$ и $f_{j,j+1} \neq 0$ почти всюду на (a, b) при $1 \leq j \leq m - 1$;
- 2) $f_{jk} \in \mathcal{L}_1(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in (a, b)$ и $1 \leq j, k \leq m$, т.е. функции f_{jk} локально интегрируемы по Лебегу ($f_{jk} \in \mathcal{L}_{loc}^1(a, b)$).

Определим *квазипроизводные* $y^{[j]}$, $0 \leq j \leq m - 1$, заданной функции y посредством матрицы F , полагая $y^{[0]} := y$ и

$$y^{[j]} := (f_{j,j+1})^{-1} \left[(y^{[j-1]})' - \sum_{k=1}^j f_{jk} y^{[k-1]} \right], \quad j = 1, 2, \dots, m - 1, \quad (1)$$

при условии, что $y^{[k-1]}$, $k = 1, 2, \dots, j$, уже определены и являются абсолютно непрерывными функциями на каждом компакте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ (пишем $y^{[k-1]} \in AC_{loc}(a, b)$). Определим также *квазидифференциальное выражение* τy посредством матрицы F , полагая

$$\tau y := i^m \left[(y^{[m-1]})' - \sum_{k=1}^m f_{mk} y^{[k-1]} \right]. \quad (2)$$

Область определения $\mathcal{D}(\tau)$ выражения τ – это множество всех комплекснозначных функций y , для которых существуют локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $y^{[j]}$ до $(m - 1)$ -го порядка включительно. Очевидно, что $\tau y \in \mathcal{L}_{loc}^1(a, b)$ для любого $y \in \mathcal{D}(\tau)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\tau y = \lambda y, \quad (3)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр. Это уравнение в определенном смысле равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}' = (F + \Lambda) \mathbf{y}, \quad (4)$$

где $\mathbf{y}$ – вектор-столбец $\mathbf{y} := \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[m-1]})$, а элементы числовой матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$ определяются равенствами $\lambda_{m1} := i^{-m} \lambda$ и $\lambda_{ij} := 0$ для всех остальных значений i и j .

Работа первого автора выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-11-00754). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-31136-мол а) и Регионального общественного фонда содействия отечественной науке.

DOI: 10.4213/mzm11203

Отметим, что условие 1) позволяет определить скалярное линейное квазидифференциальное выражение τu (порядка m) посредством матрицы F , а условие 2) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4), поставленной в произвольной точке промежутка (a, b) . Следовательно, при выполнении условий 1) и 2) теорема существования и единственности решения задачи Коши справедлива и для уравнения (3).

В литературе матрицы, удовлетворяющие условиям 1) и 2), называют матрицами *типа Шина–Зеттла* и класс этих матриц обозначают символом $Z_m(a, b)$ (см., например, [1; раздел 1, с. 8], или [2]). Определения квазипроизводных и квазидифференциального выражения, приведенные здесь, взяты из работ, цитированных выше.

В п. 2 настоящей работы, в предположении, что $a = 1$ и $b = +\infty$, определяется подкласс матриц из $Z_m[1, +\infty)$ и порожденные ими квазидифференциальные уравнения вида (3), исследуемые в данной работе. В п. 3 сформулирована теорема об асимптотике некоторой фундаментальной системы решений этого класса уравнений на бесконечности. В п. 4, следуя работе [2], мы определяем произведение двух квазидифференциальных выражений и обсуждаем метод, позволяющий получить асимптотические формулы для решений уравнений вида (3) в случае, когда левая часть этого уравнения представляется как произведение выражений из класса, определенного в п. 2.

2. Построение специальной матрицы F . Пусть $m = 2n$. Определим матрицу F_{2n} ($=: F$), положив

$$F_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \dots & f_{n,n} & f_{n,n+1} & 0 & \dots & 0 \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & \dots & f_{n+1,n} & f_{n+1,n+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{2n-1,1} & f_{2n-1,2} & f_{2n-1,3} & \dots & f_{2n-1,n} & f_{2n-1,n+1} & 0 & \dots & 1 \\ f_{2n,1} & f_{2n,2} & f_{2n,3} & \dots & f_{2n,n} & f_{2n,n+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что элементы f_{jk} матрицы F_{2n} удовлетворяют условиям 1) и 2) п. 1, т.е. выполнено

УСЛОВИЕ (А). *Функции $f_{jk} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1[1, +\infty)$ при $n \leq j \leq 2n$, $1 \leq k \leq n+1$, и $f_{n,n+1} \neq 0$ п.в. на $[1, +\infty)$.*

Пусть, кроме того, выполнено

УСЛОВИЕ (В). *Существуют число $\nu \geq 0$, комплексные числа α_{jk} и комплекснозначные функции $\beta_{jk}(x)$ такие, что $\alpha_{n,n+1} \neq 0$ и при всех $x \geq 1$ элементы f_{jk} ($:= f_{jk}(x)$) имеют вид*

$$\begin{aligned} f_{n,n+1} &:= x^{-2n-\nu}(\alpha_{n,n+1} + \beta_{n,n+1}(x)), \\ f_{nj} &:= x^{-n+j-1}(\alpha_{nj} + \beta_{nj}(x)), & j = 1, \dots, n, \\ f_{n+k,n+1} &:= x^{-k}(\alpha_{n+k,n+1} + \beta_{n+k,n+1}(x)), & k = 1, \dots, n, \\ f_{n+k,j} &:= x^{n+\nu-k+j-1}(\alpha_{n+k,j} + \beta_{n+k,j}(x)), & k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Обозначим через $D := \text{dg}(d_1, d_2, \dots, d_{2n})$ диагональную матрицу с элементами

$$d_k(x) := x^{-k+1/2}, \quad d_{k+n}(x) := x^{n+\nu-k+1/2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В системе (4) (с $F = F_{2n}$) сделаем замену $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$. Неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x \frac{d\mathbf{Y}}{dx} = (A + B(x))\mathbf{Y}, \quad (5)$$

где $A = A_1 + A_2 + A_3$ – постоянная матрица, причем матрица A_1 имеет тот же вид, что и F_{2n} , с той лишь разницей, что f_{jk} в ней заменены на α_{jk} , A_2 – диагональная матрица

$$A_2 = \text{dg} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - n - \nu, \dots, -\frac{1}{2} - \nu \right),$$

и A_3 – матрица, равная Λ (см. (4)) при $\nu = 0$ и нулевой матрице при $\nu > 0$. Кроме того, в (5) ненулевые элементы $b_{jk}(x)$ матрицы-функции $B(x)$ такие, что $b_{jk}(x) = \beta_{jk}(x)$ при $n \leq j \leq 2n$, $1 \leq k \leq n + 1$, кроме элемента $b_{2n,1}(x)$, а

$$b_{2n,1}(x) = \begin{cases} \beta_{2n,1}(x), & \text{если } \nu = 0, \\ \beta_{2n,1}(x) + \frac{(-1)^n \lambda}{x^\nu}, & \text{если } \nu > 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $m = 2n + 1$. Определим матрицу $F_{2n+1}(= F)$, положив

$$F_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n,n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & \dots & f_{n+1,n} & f_{n+1,n+1} & f_{n+1,n+2} & 0 & \dots & 0 \\ f_{n+2,1} & f_{n+2,2} & f_{n+2,3} & \dots & f_{n+2,n} & f_{n+2,n+1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{2n,1} & f_{2n,2} & f_{2n,3} & \dots & f_{2n,n} & f_{2n,n+1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_{2n+1,1} & f_{2n+1,2} & f_{2n+1,3} & \dots & f_{2n+1,n} & f_{2n+1,n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае условия (A) и (B) приобретают следующий вид.

УСЛОВИЕ (A). Функции $f_{n,n+1}, f_{n+1,n+2}, f_{jk} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1[1, +\infty)$ при $n + 1 \leq j \leq 2n + 1$, $1 \leq k \leq n + 1$, и $f_{n,n+1} \neq 0$, $f_{n+1,n+2} \neq 0$ п.в. на $[1, +\infty)$.

УСЛОВИЕ (B). Существуют число $\nu \geq 0$, комплексные числа α_{jk} и комплекснозначные функции $\beta_{jk}(x)$ такие, что $\alpha_{j,j+1} \neq 0$ при $j = n, n + 1$ и при всех $x \geq 1$ элементы f_{jk} имеют вид

$$\begin{aligned} f_{n,n+1} &:= x^{-n-\nu/2-1/2}(\alpha_{n,n+1} + \beta_{n,n+1}(x)), \\ f_{n+1,n+2} &:= x^{-n-\nu/2-1/2}(\alpha_{n+1,n+2} + \beta_{n+1,n+2}(x)), \\ f_{n+1,n+1} &:= x^{-1}(\alpha_{n+1,n+1} + \beta_{n+1,n+1}(x)), \\ f_{n+1,j} &:= x^{\nu/2+j-3/2}(\alpha_{n+1,j} + \beta_{n+1,j}(x)), & j = 1, \dots, n, \\ f_{n+1+j,n+1} &:= x^{\nu/2+n-j-1/2}(\alpha_{n+1+j,n+1} + \beta_{n+1+j,n+1}(x)), & j = 1, \dots, n, \\ f_{n+1+j,k} &:= x^{\nu+n-j+k-1}(\alpha_{n+1+j,k} + \beta_{n+1+j,k}(x)), & j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Кроме того, теперь элементы d_k матрицы D в замене $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$ определим равенствами

$$d_k := x^{-k+1/2}, \quad d_{n+1+k} := x^{\nu+n-k+1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad d_{n+1} := x^{\nu/2}.$$

Такой заменой система (4) (с $F = F_{2n+1}$) также преобразуется к системе вида (5), где опять $A = A_1 + A_2 + A_3$, причем матрицы A_1 и A_3 составляются так же, как и в случае $m = 2n$, с заменой F_{2n} на F_{2n+1} , а матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \text{dg} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - n - \nu, \dots, -\frac{1}{2} - \nu \right).$$

Кроме того, в (5) ненулевые элементы $b_{jk}(x)$ в $B(x)$ такие, что $b_{j,j+1}(x) = \beta_{j,j+1}(x)$ при $j = n, n+1$, $b_{jk}(x) = \beta_{jk}(x)$ при $n+1 \leq j \leq 2n+1$, $1 \leq k \leq n+1$, кроме элемента $b_{2n+1,1}(x)$, а

$$b_{2n+1,1}(x) = \begin{cases} \beta_{2n+1,1}(x), & \text{если } \nu = 0, \\ \beta_{2n+1,1}(x) + \frac{i(-1)^{n+1}\lambda}{x^\nu}, & \text{если } \nu > 0. \end{cases}$$

Условие (C), сформулированное ниже, одинаково и для случая $m = 2n$, и для случая $m = 2n+1$. Пусть $r+1$ – это кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности, и пусть выполнено

УСЛОВИЕ (C). Матрицы A и $B(x)$ таковы, что

$$\int_1^\infty \frac{(\ln x)^r}{x} \|B(x)\| dx < \infty, \quad (6)$$

где $\|B(x)\|$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы $B(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Матрицы F_{2n} и F_{2n+1} подобраны так, что любое дифференциальное выражение вида

$$\tau y = \sum_{k=0}^{[m/2]} (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} [(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)}], \quad (7)$$

где $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее a , с достаточно гладкими коэффициентами порождается матрицами такого вида (см. [1; приложение А, с. 119–124]). Более того, если всюду производные понимать в смысле теории распределений, то любое дифференциальное выражение вида (7) с локально интегрируемыми коэффициентами (см. [3], [4]) и также довольно широкий класс выражений вида (7) с коэффициентами-распределениями (подробности см. [5]) вписываются в рассматриваемый класс квазидифференциальных выражений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определение квазипроизводных и квазидифференциального выражения по формулам (1) и (2) посредством матриц F_{2n} и F_{2n+1} позволяет утверждать, что $y^{[j]} = y^{(j)}$ при $0 \leq j \leq n$, т.е. элементы этих матриц, отличные от единицы, участвуют только в определении $y^{[j]}$ при $n+1 \leq j \leq m-1$ и τy .

3. Главный член асимптотики решений. Можно показать, что число $r+1$ (см. п. 2) совпадает с максимальной размерностью жордановой клетки в канонической форме матрицы A . Заметив это, применим к системе, полученной из (5) заменой $x = e^t$, теорему, доказанную в [6] (см. также [7; гл. III, с. 120, задача 35]), в результате получим для нее главный член асимптотики некоторой фундаментальной системы решений при $t \rightarrow +\infty$. Сделав обратную замену, заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть элементы матрицы F удовлетворяют условиям (A)–(C). Предположим, что $z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_{q+j}$ – все различные характеристические корни матрицы A , причем $z_1, z_2, \dots, z_q$ – однократные корни, при $1 \leq p \leq j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p . Тогда уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_k(x) = c_k x^{z_k - 1/2} (1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

и при $k = q, q + r_1, \dots, q + r_1 + \dots + r_{j-1}$

$$y_{k+i}(x) = c_{k+i} x^{z_{q+p-1/2}} (\ln x)^{i-1} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, r_p, \quad \text{если } k = q + r_1 + \dots + r_{p-1},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_m$ – произвольные ненулевые постоянные.

В дальнейшем характеристический многочлен матрицы A будем обозначать символом $\mathfrak{F}(z, \nu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $y(x)$ – произвольное решение уравнения (3), асимптотическое поведение которого определяется теоремой 1. Изложенный подход позволяет получить главный член асимптотики на бесконечности для всех $y^{[j]}(x)$, где $0 \leq j \leq m-1$. В частности, если учесть замечание 2, получаем, что асимптотические формулы из теоремы 1 можно дифференцировать до n -го порядка включительно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В асимптотических формулах из теоремы 1 не участвует матрица-функция $B(x)$ явно; достаточно лишь, чтобы она удовлетворяла условию (C). Предположим теперь, что элементы $f_{jk}(x)$ матрицы F (равной F_{2n} или F_{2n+1}) подобраны так, что соответствующее дифференциальное выражение τy представляется в виде (7), и при этом $B(x)$ – нулевая матрица (см. замечание 1). В этой ситуации более подробный анализ выражения τy показывает, что для случая $m = 2n$ если коэффициенты p_k , $k = 0, 1, \dots, n$, и q_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, удовлетворяют условию (B), то существуют комплексные числа a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, и b_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, такие, что корни многочлена $\mathfrak{F}(z, \nu)$ совпадают (при $\nu > 0$) с корнями многочлена

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{2n}(z, \nu) = & a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \\ & + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) \left\{ b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $m = 2n+1$, т.е. существует многочлен $\mathfrak{F}_{2n+1}(z, \nu)$ вида

$$\mathfrak{F}_{2n+1}(z, \nu) = \mathfrak{F}_{2n}(z, \nu) + 2i \left(z + \frac{\nu}{2} \right) b_n \prod_{j=0}^{n-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j \right)^2 \right]$$

такой, что собственные значения матрицы A совпадают (при $\nu > 0$) с корнями этого многочлена (о многочленах $\mathfrak{F}_{2n}$ и $\mathfrak{F}_{2n+1}$ подробнее см. [4]).

4. Случай произведения квазидифференциальных выражений. В этом пункте квазипроизводные $y^{[j]}$, квазидифференциальное выражение τy , матрицы D , A , $B(x)$ и многочлены $\mathfrak{F}(z, \nu)$ (см. пп. 2 и 3) будем снабжать нижним индексом F , подчеркивая этим, что они строятся по матрице F . Следуя работе [2], сначала определим произведение двух квазидифференциальных выражений. Пусть матрицы $F \in Z_m(a, b)$, $G \in Z_l(a, b)$, $m, l > 1$, и

$$H = \begin{pmatrix} G & M \\ O_{m \times l} & F \end{pmatrix},$$

где M – матрица размерности $l \times m$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1, а $O_{m \times l}$ – нулевая матрица размерности $m \times l$. Очевидно, что $H \in Z_{m+l}(a, b)$. Известно (см., например, [2]), что

$$\mathcal{D}(\tau_H) = \mathcal{D}(\tau_F \tau_G) = \{y \mid y \in \mathcal{D}(\tau_G), \tau_G y \in \mathcal{D}(\tau_F)\},$$

и для $y \in \mathcal{D}(\tau_H)$ квазипроизводные $y_H^{[j]}$, $0 \leq j \leq m+l-1$, определяются формулами (1) по матрице H , а $\tau_H y$ – формулой (2), и справедливо равенство $\tau_H y = \tau_F(\tau_G y)$. В случае, когда $\tau = \tau_H$, уравнение (3), как обычно, равносильно системе (4), т.е.

$$y' = (H + \Lambda)y, \quad (8)$$

где теперь y уже неизвестный вектор-столбец с $m+l$ компонентами, а $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – постоянная матрица, все элементы которой равны нулю, кроме $\lambda_{m+l,1} := i^{-m-l}\lambda$.

Пусть матрицы $G \in Z_l[1, +\infty)$ и $F \in Z_m[1, +\infty)$ имеют такую же структуру, что и матрица F из п. 2. Пусть далее $\nu_1, \nu_2 > 0$ – некоторые постоянные, и элементы g_{jk} и f_{jk} матриц G и F определяются равенствами, аналогичными равенствам из условия (B) п. 2 с параметрами ν_1 и ν_2 соответственно. Определим диагональную матрицу

$$D_H := \begin{pmatrix} D_G & O_{l \times m} \\ O_{m \times l} & x^{\nu_1} D_F \end{pmatrix}$$

и систему (8) преобразуем к виду (5) заменой $y = D_H Y$, где числовая матрица A и матрица-функция $B(x)$ определяются равенствами

$$A_H = \begin{pmatrix} \tilde{A}_G & M \\ O_{m \times l} & \tilde{A}_F \end{pmatrix}, \quad B_H(x) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_G(x) & O_{l \times m} \\ S(x) & \tilde{B}_F(x) \end{pmatrix},$$

где матрицы $\tilde{A}_G$, $\tilde{A}_F$ и матрицы-функции $\tilde{B}_G$, $\tilde{B}_F$ определяются процедурой, примененной в п. 2 (см. уравнение (5)), а $S(x)$ – матрица размерности $m \times l$, все элементы которой также равны нулю, кроме элемента $i^{-m-l}\lambda/x^{\nu_1+\nu_2}$ в левом нижнем углу.

Пусть теперь $r+1$ – максимальная размерность жордановой клетки в канонической форме матрицы A_H , и пусть число r и матрица $B(x) (= B_H(x))$ удовлетворяют условию (C) (см. (6)). Тогда так же, как и в п. 3, можно применить теорему из [6] и получить аналог теоремы 1 уже для произведения $\tau_F \tau_G$. Можно показать, что при этом характеристический многочлен $\mathfrak{F}_H(z, \nu_1, \nu_2)$ матрицы A_H определяется равенством

$$\mathfrak{F}_H(z, \nu_1, \nu_2) = \mathfrak{F}_G(z, \nu_1) \mathfrak{F}_F(z + \nu_1, \nu_2),$$

а число $r+1$ – это кратность корня наибольшей кратности произведения этих многочленов.

Отметим, что в этом пункте условия $\nu_1, \nu_2 > 0$ были нужны для краткости изложения – их можно заменить условиями $\nu_1, \nu_2 \geq 0$. Кроме того, результаты этого пункта можно обобщить на случай произведения конечного числа квазидифференциальных выражений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. N. Everitt, L. Marcus, *Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators*, Math. Surveys Monogr., **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1999. [2] W. N. Everitt, *Lecture Notes for the Fourth International Symposium on Differential Equations and Differential Geometry*, Beijing, 1986, 1–28. [3] К. А. Мирзоев, ДАН, **380**:5 (2001), 591–595. [4] К. А. Мирзоев, И. Н. Долгих, Матем. сб., **197**:4 (2006), 53–74. [5] К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов, Матем. заметки, **99**:5 (2016), 788–793. [6] S. Faedo, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **26** (1947), 207–215. [7] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

К. А. Мирзоев

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило

25.08.2015

Исправленный вариант

03.03.2016

Н. Н. Конечная

Северный (Арктический) федеральный университет

имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск

E-mail: mermaid5979@yandex.ru