Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Гайфулин, Экстремальные значения континуантов,
Матем. заметки, 2016, том 100, выпуск 2, 308–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:48:13

Экстремальные значения континуантов

Д. Р. Гайфулин

Ключевые слова: континуанты, цепные дроби.

DOI: 10.4213/mzm11204

1. Введение. Задачи на поиски экстремумов континуантов по различным множествам встречаются в ряде теоретико-числовых задачах. Примером может служить исследование производной функции Минковского $\varphi(x)$ и ее обобщений, начатое в [1] и развитое в работах [2], [3]. Большой класс задач, посвященный поиску экстремумов континуантов, рассмотрен в [4]. В данной статье дается окончательный ответ на одну из задач, поставленных в [4], а также решается ряд новых задач о максимумах и минимумах континуантов.

Для конечной последовательности натуральных чисел (возможно, нулевой длины) $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ континуант $\langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$ индуктивно определяется следующими соотношениями: $\langle \cdot \rangle = 0$, $\langle a_1 \rangle = a_1$,

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{t+1} \rangle = a_{t+1} \langle a_2, \dots, a_t \rangle + \langle a_1, a_2, \dots, a_{t-1} \rangle. \quad (1)$$

Для конечной цепной дроби

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_t] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_t}}$$

выполнено соотношение (см., например, [5])

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_t] = \frac{\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_t \rangle}{\langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle}. \quad (2)$$

2. Обозначения и параметры. Все последовательности, рассматриваемые в данной статье, если не указано иное, по умолчанию состоят из натуральных чисел. Элементы континуантов мы часто будем называть *неполными частными*. Как правило, неполные частные будут обозначаться маленькими буквами $a, b, c, d, \dots$. Большими буквами $A, B, C, D, \dots$ мы будем обозначать конечные последовательности натуральных чисел. Для произвольных конечных последовательностей $A_1, A_2, \dots, A_n$ через $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ обозначим последовательность, которую образуют все записанные друг за другом элементы $A_1, A_2, \dots, A_n$. Обозначим последовательность $\underbrace{(a, a, \dots, a)}_{n \text{ чисел}}$ через $a^{(n)}$. При нулевом n положим

эту последовательность пустой. Аналогично определим

$$A^{(n)} = \underbrace{(A, A, \dots, A)}_{n \text{ раз подряд}}.$$

Для непустой последовательности натуральных чисел $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ обозначим

$$A_- = (a_2, \dots, a_t), \quad A^- = (a_1, a_2, \dots, a_{t-1}), \quad A_-^- = (a_2, a_3, \dots, a_{t-1}).$$

Через $\vec{A}$ обозначим последовательность элементов A в исходном порядке, а через $\overleftarrow{A}$ – в обратном. Нетрудно показать, что $\langle \vec{A} \rangle = \langle \overleftarrow{A} \rangle$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (грант № 14-11-00433).

DOI: 10.4213/mzm11204

Общеизвестно, что

$$\langle A, B \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A^- \rangle \langle B_- \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle (1 + [0; \overleftarrow{A}][0; \overrightarrow{B}]). \quad (3)$$

Для $m \in \mathbb{N}_0$ положим $m_- = [m/2]$, $m_+ = m - m_-$. Для $x \in \mathbb{Z}$, $n, z \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ определим также

$$T_z^n(m, x) = \underbrace{\langle 1, n, 1, n, \dots, 1, n, n^{(x)} \rangle}_{m_+ \text{ пар чисел}}, \underbrace{\langle z, n, 1, n, 1, \dots, n, 1 \rangle}_{m_- \text{ пар чисел}}. \quad (4)$$

Для натуральных n и S определим $U_n(S)$ как множество континуантов $\langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$ таких, что для всех i таких, что $1 \leq i \leq t$, выполнено $a_i \leq n$, а также $\sum_{i=1}^t a_i = S$.

В статье [4] была доказана следующая теорема о минимальном значении континуанта на множестве $U_n(S)$ ¹.

ЛЕММА 2.1 [4; теорема 7]. *При $n \geq 2$, $S \geq 2n + 2$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\min(U_n(S)) = \min_{1 \leq z \leq n} T_z^n(m, x), \quad (5)$$

где

$$0 \leq x \leq n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}, \quad m = \frac{S - nx - 1}{n+1}, \quad m(z) > 0,$$

т.е. для нахождения минимума требуется найти оптимальное значение z .

Для f натуральных чисел $h_1 < h_2 < \dots < h_f$ и для их кратностей $p_1, p_2, \dots, p_f \geq 1$ определим множество

$$W_f = W_f(\bar{h}, \bar{p}) = \{(a_1, a_2, \dots, a_t) : a_i \in \{h_1, h_2, \dots, h_f\}, \#\{i : a_i = h_j\} = p_j\},$$

где t равно $p_1 + p_2 + \dots + p_f$.

Обозначим множество последовательностей вида $(a, b_1, a, b_2, a, \dots, a, b_n, a)$ длины $2n+1$, в которых на нечетных местах все элементы равны a , а последовательность $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, образуемая элементами, стоящими на четных местах, принадлежит множеству $W_f(\bar{h}, \bar{p})$ через $W_f^a(\bar{h}, \bar{p})$. Для $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_f)$ целочисленные коэффициенты p_i^l, p_i^r определяются по следующим правилам:

- 1) $p_f^r = [p_f/2]$, $p_f^l = p_f - p_f^r$;
- 2) при $i < f$ выполнено $p_i^r = p_i^l = p_i/2$, если p_i четно;
- 3) если p_i нечетно и для всех $j > i$ верно, что p_j четно, то $p_i^r = [p_i/2]$, $p_i^l = p_i - p_i^r$;
- 4) если p_i нечетно и j – минимальное число большее i такое, что $p_j^l \neq p_j^r$, то p_i^l и p_i^r определяются из соотношения $(p_j^l - p_j^r)(p_i^l - p_i^r) = -1$.

Определим также параметры

$$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \quad \mu_n = \frac{n + 2 + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}. \quad (6)$$

Положим $c_0 \approx 0.203188$ – единственное решение уравнения

$$xe^{2(1-x)} = 1$$

на отрезке $x \in [0, 1/2]$.

¹В статье было доказано более сильное утверждение, но нам будет достаточно сформулированной более простой и слабой формы.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$, $S \geq (n+1)^2$ и $S = (n+1)t + z_0$, $0 \leq z_0 \leq n$, x находится из соотношения

$$0 \leq x \leq n, \quad x \equiv 1 - S \pmod{n+1}.$$

Тогда минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ имеет следующий вид:

- если $z_0 > n/2$, то

$$\min(U_n(S)) = T_n^n(m, x); \quad (7)$$

- если $z_0 \leq n/2$, то минимум равен одному из двух континуантов:

$$\min(U_n(S)) = T_n^n(m, x) \quad \text{или} \quad \min(U_n(S)) = T_{z_0}^n(m, 0). \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют такие положительные константы C_1, C_2 , что при $z_0 > c_0 n + C_1$ $\min(U_n(S))$ равен $T_n^n(m, x)$, а при $z_0 < c_0 n - C_2$ он равен $T_{z_0}^n(m, 0)$. Значения $T_n^n(m, x)$ и $T_{z_0}^n(m, 0)$ можно вычислить асимптотически. Они равны

$$T_n(m, x) = \frac{\mu_n^{m-n+z_0+2}}{(\mu_n + 1)^2} \frac{\lambda_n^{n+3-z_0}}{\lambda_n^2 + 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad T_{z_0}(m, 0) = \frac{\mu_n^{m+2}}{(\mu_n + 1)^2} \left(z_0 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Минимальный континуант на множестве $W_f^a(\bar{h}, \bar{p})$ может быть найден по формуле

$$\min(W_f^a(\bar{h}, \bar{p})) = \langle (a, h_f)^{(p_f^l)}, (a, h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \dots, (a, h_1)^{(p_1^l)}, \dots, (h_{f-1}, a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f, a)^{(p_f^r)} \rangle. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 3. Максимальный континуант на множестве $W_f^a(\bar{h}, \bar{p})$ при условии $p_{f-i} = r_{i+1}$ для любого i такого, что $0 \leq i \leq f-1$, может быть найден по формуле

$$\begin{aligned} \max(W_f^a(\bar{h}, \bar{p})) \\ = \langle (a, h_1, a, h_f)^{(p_f^l)}, (a, h_2, a, h_{f-1})^{(p_{f-1}^l)}, \dots, (h_{f-1}, a, h_2, a)^{(p_{f-1}^r)}, (h_f, a, h_1, a)^{(p_f^r)} \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

4. Набросок доказательства. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что если произвольный континуант из множества $U_n(S)$ не имеет вид $T_n^n(m, x)$ или $T_{z_0}^n(m, 0)$, где $z_0 \leq n/2$, то для данного континуанта существует преобразование, переводящее его в меньший континуант. Лемма 2.1 показывает, что минимальный континуант лежит в множестве (5). Верна следующая техническая лемма.

ЛЕММА 4.1. Для произвольных A и C при $t \geq 0$, $n \geq 3$ и $1 \leq z \leq n-1$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle A, 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1, C \rangle &< \langle A, 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1, C \rangle \quad \text{при} \quad z \leq \frac{n}{2}, \\ \langle A, 1, n, 1, n^{(m+1)}, z, n, 1, C \rangle &> \langle A, 1, n^{(m+2)}, z+1, n, 1, C \rangle \quad \text{при} \quad z > \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует, что для любого континуанта $\langle M \rangle$ из (5) преобразование, переводящее его в меньший, существует при $n/2 < z < n$, а также при $1 < z \leq n/2$ и $x > 0$. Это и означает, что минимум достигается только в континуантах вида $T_n^n(m, x)$ или $T_{z_0}^n(m, 0)$, где $z_0 \leq n/2$. Что и требовалось доказать. Утверждение о “разделяющей” константе c_0 доказывается из сравнения асимптотических формул (9).

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогичными рассуждениями. Рассмотрим произвольный континуант из множества $W_f^a(\bar{h}, \bar{p})$ и докажем, что если он не равен (10) (в случае максимума – (11)), то для него существует преобразование, переводящее его в меньший

(большой) континуант. В качестве таких преобразований мы будем использовать замены вида

$$\langle A, \vec{B}, C \rangle \rightarrow \langle A, \overleftarrow{B}, C \rangle. \quad (13)$$

Такие преобразования удобны тем, что для них верна следующая лемма.

ЛЕММА 4.2 [6]. *Неравенство*

$$\langle A, \vec{B}, C \rangle > \langle A, \overleftarrow{B}, C \rangle$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$([0; \overleftarrow{A}] - [0; \vec{C}])([0; \vec{B}] - [0; \overleftarrow{B}]) > 0.$$

Применение данной леммы требует сравнивать цепные дроби, но в случае множества $W_f^a(\vec{h}, \vec{p})$ задача упрощается тем, что при рассмотрении замены

$$\begin{aligned} & \langle \underbrace{a, h_{i_1}, a, \dots, a}_{A}, \underbrace{h_{i_k}, a, \dots, a}_{\vec{B}}, \underbrace{h_{i_l}, a, \dots, a}_{C}, h_{i_n}, a \rangle \\ & \rightarrow \langle \underbrace{a, h_{i_1}, a, \dots, a}_{A}, \underbrace{h_{i_k}, a, \dots, a}_{\vec{B}}, \underbrace{h_{i_l}, a, \dots, a}_{C}, h_{i_n}, a \rangle \end{aligned}$$

при $h_{i_k} \neq h_{i_l}$ достаточно сравнить цепные дроби $[0; \overleftarrow{A}]$ и $[0; \vec{C}]$. Но в этих цепных дробях все неполные частные нечетного индекса равны a , поэтому из двух дробей $[0; \overleftarrow{A}]$ и $[0; \vec{C}]$ больше та, в которой первое отличающееся неполное частное больше. Если же одна из этих дробей является подходящей дробью к другой, то больше более короткая цепная дробь. Это приводит нас к следующему принципу, применение которого позволяет доказать теоремы 2 и 3. Его можно неформально сформулировать следующим образом.

Для увеличения континуанта из множества $W_f^a(\vec{h}, \vec{p})$ необходимо добиваться, чтобы большие неполные частные стояли рядом с меньшими неполными частными. Для уменьшения континуанта из данного множества необходимо, напротив, ставить большие неполные частные рядом с большими, а меньшие рядом с меньшими.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Душистова, Н. Г. Мощевитин, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:6 (2010), 33–44.
 [2] A. A. Dushistova, I. D. Kan, N. G. Moshchevitin, *J. Math. Anal. Appl.*, **401**:2 (2013), 774–794.
 [3] Д. Р. Гайфулин, *Алгебра и анализ*, **27**:1 (2015), 74–124. [4] И. Д. Кан, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:6 (2010), 95–108. [5] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998. [6] И. Д. Кан, *Дискрет. матем.*, **12**:3 (2000), 72–75.

Д. Р. Гайфулин

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

E-mail: gamak.57.msk@gmail.com

Поступило

21.01.2016