Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Солдатенков, О достаточных условиях сходимости последовательных приближений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 854–859

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 05:33:10

УДК 517.9

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

И. А. Солдатенков

Получены достаточные условия сходимости последовательных приближений к решению операторного уравнения. Продемонстрировано использование полученных условий применительно к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Излагаемый ниже материал касается условий сходимости последовательных приближений u_n (простых итераций)

$$u_{n+1} = \hat{R}u_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

к решению $u \in U$ уравнения

$$u = \hat{R}u, \quad (2)$$

где $\hat{R}$ – оператор, отображающий пространство U в себя, $u_0 \in U$. Дадим обзор некоторых результатов по данному вопросу.

Классическим является принцип Банаха неподвижной точки [1], [2], утверждающий, что последовательность (1) сходится к единственному решению $u \in U$ уравнения (2) при любом $u_0 \in U$, если только U – полное метрическое пространство, а $\hat{R}$ является сжимающим в U , т.е. для любых $u^{(1)}, u^{(2)}$ из U :

$$\rho(\hat{R}u^{(1)}, \hat{R}u^{(2)}) \leq q\rho(u^{(1)}, u^{(2)}), \quad q \in [0, 1), \quad (3)$$

где ρ – символ метрики в U .

Требование сжимаемости оператора $\hat{R}$ на всем пространстве U , присутствующее в принципе неподвижной точки, может быть ослаблено. В теоремах из [3], [4] вводится некоторое подмножество пространства U , на котором выполняется (3) и формулируется правило выбора начального приближения u_0 , порождающего сходящуюся к решению уравнения (2) последовательность (1).

Другое обобщение [3] классического принципа неподвижной точки допускает нелинейную зависимость определенного вида правой части неравенства (3) от $\rho(u^{(1)}, u^{(2)})$.

Описываемое ниже условие сходимости последовательных приближений также допускает нелинейность в правой части (3) и предлагает достаточно конструктивное правило выбора начального приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00901.

2. Основные утверждения. Далее будем считать, что U – банахово пространство, причем $\rho(u^{(1)}, u^{(2)}) = \|u^{(1)} - u^{(2)}\|$. Имеет место

ЛЕММА А. Пусть, исходя из некоторого u_0 , построена бесконечная последовательность $\{u_n\}$ вида (1) такая, что для любых ее элементов u_n, u_{n+1} выполняется неравенство

$$\|\hat{R}u_{n+1} - \hat{R}u_n\| \leq q(\|u_n\|, \|u_{n+1} - u_n\|) \|u_{n+1} - u_n\|, \quad (4)$$

где $q(X, Y)$ – некоторая функция. Тогда последовательность $\{u_n\}$ является фундаментальной, если

- а) $q(X, Y)$ возрастает по $X \geq 0$ и $Y \geq 0$;
- б) найдутся $\lambda \in [0, 1)$ и $h \geq \|u_1 - u_0\|$ такие, что

$$q\left(\|u_0\| + \frac{h}{1-\lambda}, h\right) = \lambda. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta_n = \|u_{n+1} - u_n\|$. Используя метод математической индукции, установим, что для любого натурального i справедливо неравенство

$$\delta_i \leq \lambda \delta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

при этом ввиду $\delta_0 \leq h$, $\lambda \in [0, 1)$ будут выполняться и неравенства

$$\delta_i \leq \lambda^i \delta_0 \leq \lambda^i h \leq h, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

При $i = 1$, основываясь на определении (1) последовательности $\{u_n\}$, неравенстве (4) и условиях а), б) леммы А, можно записать

$$\delta_1 = \|\hat{R}u_1 - \hat{R}u_0\| \leq q(\|u_0\|, \delta_0) \delta_0 \leq q\left(\|u_0\| + \frac{h}{1-\lambda}, h\right) \delta_0 = \lambda \delta_0, \quad (8)$$

т.е. имеем (6) для $i = 1$.

Предположим теперь, что неравенство (6) и, следовательно, (7) справедливы для $i = 1, \dots, n$. Покажем, что тогда (6) выполняется при $i = n + 1$.

Запишем аналогично (8):

$$\delta_{n+1} = \|\hat{R}u_{n+1} - \hat{R}u_n\| \leq q(\|u_n\|, \delta_n) \delta_n, \quad (9)$$

причем в силу справедливости неравенств (6) и (7) при $i = 1, \dots, n$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \|u_n\| &= \|u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - \dots - u_0 + u_0\| \leq \|u_0\| + \delta_0 + \dots + \delta_{n-1} \\ &\leq \|u_0\| + \lambda^0 h + \dots + \lambda^{n-1} h \leq \|u_0\| + \frac{h}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, а также неравенство (7) при $i = n$ и условия а), б), неравенство (9) можно продолжить

$$\delta_{n+1} \leq q \left(\|u_0\| + \frac{h}{1-\lambda}, h \right) \delta_n = \lambda \delta_n,$$

тем самым установив справедливость (6) при $i = n + 1$.

Таким образом, неравенства (6) и, следовательно, (7) имеют место при любом $i \geq 1$. Основываясь на данном результате, возьмем произвольные натуральные N , $n > N$, $m > n$ и запишем по аналогии с [1], [2] неравенства

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &= \|u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - \dots + u_{n+1} - u_n\| \leq \delta_{m-1} + \dots + \delta_n \\ &\leq \lambda^{m-1}h + \dots + \lambda^n h \leq \frac{\lambda^n h}{1-\lambda} \leq \frac{\lambda^N h}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

правая часть которых стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$, а это по определению означает, что $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность. Лемма доказана.

Лемма А позволяет доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА А. Пусть оператор $\hat{R}$ отображает банахово пространство U в себя и для любых элементов $u^{(1)}, u^{(2)}$ из U выполнено

$$\|\hat{R}u^{(2)} - \hat{R}u^{(1)}\| \leq q(\|u^{(1)}\|, \|u^{(2)} - u^{(1)}\|) \|u^{(2)} - u^{(1)}\|. \quad (10)$$

Тогда если при некотором $u_0 \in U$ условия а) и б) леммы А выполняются, то в U существует решение уравнения (2), к которому сходятся последовательные приближения (1) при выбранном u_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях теоремы для $u_0 \in U$ может быть построена последовательность $\{u_n\}$ вида (1), удовлетворяющая условиям леммы А и, поэтому, являющаяся фундаментальной. Последнее по определению полного пространства означает существование предела последовательности $\{u_n\}$:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in U, \quad (11)$$

который является решением уравнения (2). Действительно, в силу (10) выполняется неравенство

$$\|u_{n+1} - \hat{R}u\| = \|\hat{R}u_n - \hat{R}u\| \leq q(\|u\|, \|u_n - u\|) \|u_n - u\|,$$

правая часть которого стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, поскольку имеет место (11) и функция $q(X, Y)$ убывает при $Y \rightarrow 0$. Таким образом, с учетом (11) можно записать

$$\hat{R}u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = u.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае $q(X, Y) = \text{const}$ равенство (5) дает $q = \lambda \in [0, 1]$, в результате чего условие (10) теоремы А совпадает с определением (3) сжимающего оператора. Последнее означает эквивалентность принципа неподвижной точки и теоремы А при $q(X, Y) = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неравенство (10), в отличие от (3) при $q \in [0, 1] [1]$, не обеспечивает единственности решения уравнения (2). Для того чтобы единственность имела место, достаточно наложить на функцию $q(X, Y)$ дополнительное ограничение: $q(X, Y) \in [0, 1]$ при $X \geq 0, Y \geq 0$.

Действительно, в этом случае если $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ – решения (2), то по аналогии с [1], [2] можно записать неравенство

$$\|u^{(2)} - u^{(1)}\| = \|\hat{R}u^{(2)} - \hat{R}u^{(1)}\| \leq q(\|u^{(1)}\|, \|u^{(2)} - u^{(1)}\|) \|u^{(2)} - u^{(1)}\|,$$

которое выполняется только при $\|u^{(2)} - u^{(1)}\| = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функция $q(X, Y)$ определяется неравенством (10) и, очевидно, не является единственной.

3. ПРИМЕР 1. В качестве тривиального примера использования теоремы А рассмотрим числовое уравнение

$$u = E(u) \equiv \hat{R}u, \quad u \in (-\infty, \infty). \quad (12)$$

Здесь в качестве пространства U выступает множество действительных чисел с нормой $\|u\| = |u|$, которое, как известно, является полным. Очевидно, что оператор $\hat{R}$ вида (12) отображает пространство U в себя.

Пусть $E'(t) \in C(-\infty, \infty)$, а также существует возрастающая по $t \geq 0$ функция $E'_+(t)$ такая, что

$$E'_+(t) \geq \max\{|E'(-t)|, |E'(t)|\}. \quad (13)$$

При этих условиях для оператора (12) можно получить оценку типа (10) с функцией

$$q(X, Y) = E'_+(X + Y), \quad (14)$$

которая в силу определения (13) является возрастающей по $X \geq 0$ и $Y \geq 0$.

Таким образом, условия теоремы А для уравнения (12) оказываются выполненными, и это уравнение имеет решение, к которому сходятся приближения (1), если только соответствующее начальное приближение u_0 удовлетворяет равенству (5), имеющему согласно (14) вид

$$E'_+\left(|u_0| + \frac{2 - \lambda}{1 - \lambda}h\right) = \lambda, \quad \lambda \in [0, 1), \quad (15)$$

где $h \geq |\hat{R}u_0 - u_0|$.

Так если $E(t) = kt^2 + b$, то, полагая $E'_+(t) = 2k|t|$, $u_0 = 0$, $h = |b|$, получим из (15) следующее уравнение:

$$2k|b|\left(\frac{2 - \lambda}{1 - \lambda}\right) = \lambda,$$

которое имеет решение $\lambda \in [0, 1)$, если

$$2k|b| \in [0, 3 - \sqrt{8}]. \quad (16)$$

Соотношение (16) является достаточным условием существования решения уравнения (12) с квадратичной правой частью, к которому сходятся приближения (1) при $u_0 = 0$.

Заметим, что путем непосредственного решения квадратного уравнения $u = ku^2 + b$ можно получить необходимое и достаточное условие существования действительных корней этого уравнения в виде неравенства $2kb \leq 1/2$, которому, в частности, удовлетворяет соотношение (16).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим решение уравнения типа Гаммерштейна [5]

$$u(x) = - \int_a^b K(x, y) E(u(y)) dy + f(x) \equiv (\hat{R}u)(x) \quad (17)$$

в банаховом пространстве $U = C[a, b]$ с нормой

$$\|u\| = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

Будем считать, что $E(t) \in C^1(-\infty, \infty)$, $f(x) \in C[a, b]$, тогда как ядро $K(x, y)$ является непрерывным на $\Pi = [a, b] \times [a, b]$ кроме, быть может, множества точек, образующих непрерывную линию $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, на которой $K(x, y)$ может принимать бесконечные значения. Кроме того, будем предполагать, что

$$\int_a^b |K(x, y)| dy \Rightarrow \sigma(x), \quad x \in [a, b],$$

т.е. имеет место равномерная по $x \in [a, b]$ сходимостъ интеграла от $|K(x, y)|$ к некоторой функции $\sigma(x)$, являющейся, как нетрудно установить, непрерывной на $[a, b]$ [6].

Несложные выкладки показывают, что при наложенных выше ограничениях на функции $E(t)$, $f(x)$ и $K(x, y)$ оператор вида (17) отображает пространство $U = C[a, b]$ в себя [6].

В целях использования теоремы А наложим на функцию $E(t)$ дополнительное ограничение, а именно: предположим, что существует возрастающая по $t \geq 0$ функция $E'_+(t)$, определяемая неравенством (13). Теперь нетрудно получить оценку

$$|E(u^{(2)}(x)) - E(u^{(1)}(x))| \leq E'_+(\|u^{(1)}\| + \|u^{(2)} - u^{(1)}\|) |u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)|,$$

которая в свою очередь позволяет записать неравенство типа (10) с функцией

$$q(X, Y) = \sigma_m E'_+(X + Y), \quad (18)$$

где

$$\sigma_m = \max_{x \in [a, b]} \sigma(x),$$

причем в силу (13) такая функция является возрастающей по $X \geq 0$ и $Y \geq 0$.

В результате условия теоремы А для уравнения (17) оказываются выполненными, и это уравнение имеет решение, к которому сходятся приближения (1), если только соответствующее начальное приближение $u_0(x)$ удовлетворяет равенству (5), имеющему согласно (18) вид

$$\sigma_m E'_+ \left(\|u_0\| + \frac{2-\lambda}{1-\lambda} h \right) = \lambda, \quad (19)$$

где $h \geq \|\hat{R}u_0 - u_0\|$, $\lambda \in [0, 1)$.

Так если $E(t) = |t|^\gamma$, $\gamma \geq 1$, то, полагая $E'_+(t) = \gamma|t|^{\gamma-1}$, $u_0(x) \equiv 0$, $h = \|f\|$, получим из (19) следующее уравнение для $\lambda \in [0, 1)$:

$$B \left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda} \right)^{\gamma-1} = \lambda, \quad (20)$$

причем $B = \sigma_m \gamma \|f\|^{\gamma-1}$.

Несложный анализ показывает, что уравнение (20) имеет решение $\lambda \in [0, 1)$, если

$$B \in (0, B_*(\gamma)], \quad (21)$$

где

$$B_*(\gamma) = z \left(\frac{1-z}{2-z} \right)^{\gamma-1}, \quad z = \frac{1}{2}(\gamma + 2 - \sqrt{(\gamma + 2)^2 - 8}).$$

Таким образом, если выполняется условие (21), то последовательные приближения (1) при $u_0(x) \equiv 0$ сходятся к решению уравнения (17) со степенной функцией $E(t)$ указанного выше вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [2] Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Изд. МГУ, 1986.
- [3] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
- [4] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966.
- [5] Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960.
- [6] Солдатенков И. А. О некоторых достаточных условиях сходимости последовательных приближений. Препринт ИПМ РАН № 580. М.: ИПМ РАН, 1997.

Институт проблем механики РАН
E-mail: soldat@arstel.ru

Поступило
23.07.98