Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Солодов, Интегралы Хенстока и Мак-Шейна для банаховозначных функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 860–870

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:13:12

УДК 517

ИНТЕГРАЛЫ ХЕНСТОКА И МАК-ШЕЙНА ДЛЯ БАНАХОВОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Солодов

В работе решается вопрос об эквивалентности HL -интеграла интегралу Хенстока в банаховых пространствах. Именно, доказывается, что справедливость леммы Сакса–Хенстока в банаховом пространстве равносильна его конечномерности.

Библиография: 11 названий.

В этой работе рассматриваются интегралы Хенстока и Мак-Шейна для функций, определенных на отрезке прямой и принимающих значения в банаховом пространстве. Эти интегралы, определяемые с помощью обобщенных сумм Римана, в действительном случае эквивалентны соответственно узкому интегралу Данжуа и интегралу Лебега (см. [1] и [2]). Значительная часть важных свойств этих интегралов, включая указанную эквивалентность, выводится из так называемой леммы Сакса–Хенстока (см. теорему 1.4). Однако, как показано в [3], эта лемма может не выполняться для банаховозначных функций. При этом в качестве примера для пространства значений в [3] берется пространство континуальной размерности. Возникает вопрос: для каких пространств лемма Сакса–Хенстока выполняется. Ввиду важности леммы Сакса–Хенстока С. С. Као в [3] определил HL -интеграл, являющийся сужением интеграла Хенстока, в котором выполнение условия этой леммы включено в определение.

В данной работе полностью решается вопрос о том, для каких банаховых пространств лемма Сакса–Хенстока выполняется для интеграла Хенстока. Другими словами, для каких пространств HL -интеграл эквивалентен интегралу Хенстока. А именно, здесь доказывается, что справедливость леммы Сакса–Хенстока в банаховом пространстве равносильна его конечномерности (см. теорему 3.1).

1. Основные определения и предварительные результаты. Пусть X – банахово пространство, $\mathbb{R}$ – действительная прямая, $[a, b]$ – отрезок на прямой, $\mathcal{J}$ – совокупность всех отрезков, содержащихся в $[a, b]$. *Разбиением* T отрезка $[a, b]$ назовем набор пар $(\xi_k, \Delta_k) \in [a, b] \times \mathcal{J}$, $k = 1, \dots, n$, обладающий следующими свойствами:

- а) отрезки Δ_i и Δ_j не перекрываются, если $i \neq j$;
- б) $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = [a, b]$.

Если не требовать выполнения свойства б), то такой набор будем называть *подразбиением*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96073.

Напомним определения интегралов Хенстока и Мак-Шейна (см. [4], [5]). Пусть $\delta(\xi)$ – положительная функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Разбиение (подразбиение) T отрезка $[a, b]$ называется δ -согласованным по Хенстоку, если каждая пара $(\xi, \Delta) \in T$ удовлетворяет условию

$$\xi \in \Delta \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Разбиение (подразбиение) T отрезка $[a, b]$ называется δ -согласованным по Мак-Шейну, если каждая пара $(\xi, \Delta) \in T$ удовлетворяет условию

$$\Delta \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Хенстоку* на отрезке $[a, b]$, если существует $I \in X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Хенстоку разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_T f(\xi_k) |\Delta_k| - I \right\| < \varepsilon. \quad (1)$$

Вектор I называется *интегралом Хенстока* функции f по отрезку $[a, b]$ и записывается в виде

$$I = (H) \int_a^b f \, dx.$$

Здесь $|P|$ обозначает меру множества P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну* на отрезке $[a, b]$, если существует $I \in X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Мак-Шейну разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство (1). Вектор I называется *интегралом Мак-Шейна* функции f по отрезку $[a, b]$ и записывается в виде

$$I = (M) \int_a^b f \, dx.$$

Следующие две теоремы представляют собой основные свойства интегралов Хенстока и Мак-Шейна. Их доказательство совершенно аналогично действительному случаю (см. [6]).

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Если функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) и на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

2) Пусть $c \in [a, b]$. Если функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Если функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Мак-Шейну на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и по Хенстоку на отрезке $[a, b]$, при этом интегралы совпадают.

Теорема 1.1 позволяет ввести понятие первообразной для функции, интегрируемой по Хенстоку. В силу теоремы 1.2 оно будет включать в себя понятие первообразной для функции, интегрируемой по Мак-Шейну.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется *первообразной* для интегрируемой на $[a, b]$ по Хенстоку функции $f: [a, b] \rightarrow X$, если

$$F(t) = \int_a^t f dx$$

для всех $t \in [a, b]$.

Из теоремы 1.1 легко вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) с первообразной $F: [a, b] \rightarrow X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Хенстоку (Мак-Шейну) разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_T (f(\xi_k) |\Delta_k| - F(\Delta_k)) \right\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $F(\Delta)$ обозначает приращение функции F на отрезке Δ .

Приведенное ниже утверждение показывает, что в лемме 1.1 разбиение может быть заменено на подразбиение.

ЛЕММА 1.2. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) с первообразной $F: [a, b] \rightarrow X$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ на $[a, b]$ такая, что для любого δ -согласованного по Хенстоку (Мак-Шейну) подразбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство (2).

Доказательство леммы 1.2 можно найти в [7]. С ее помощью, как и в действительном случае (см. [6, с. 18, 105]), легко получить свойство непрерывности первообразной.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) на отрезке $[a, b]$. Тогда ее первообразная $F: [a, b] \rightarrow X$ непрерывна.

Сформулируем теперь теорему, называемую леммой Сакса–Хенстока, справедливую в случае конечномерного пространства X .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть X – конечномерное банахово пространство. Если функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку (Мак-Шейну) и имеет первообразную $F: [a, b] \rightarrow X$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Хенстоку (Мак-Шейну) подразбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\sum_T \|f(\xi_k) |\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \varepsilon. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $X = \mathbb{R}$ подробно разобран в [6, с. 17, 104]. Идея доказательства состоит в том, что произвольное подразбиение T разбивается на два: T_+ и T_- . Они определяются следующим образом: $(\xi, \Delta) \in T_+$, если $f(\xi)|\Delta| - F(\Delta) \geq 0$, $(\xi, \Delta) \in T_-$, если $f(\xi)|\Delta| - F(\Delta) < 0$. Теперь теорема доказывается с помощью леммы 1.2.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Тогда $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, где все f_i — интегрируемые по Хенстоку (Мак-Шейну) функции, принимающие действительные значения и имеющие первообразные F_i . Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пользуясь справедливостью леммы Сакса–Хенстока для случая $X = \mathbb{R}$, выберем положительную функцию $\delta(\xi)$ так, чтобы для любого δ -согласованного по Хенстоку (Мак-Шейну) подразбиения T отрезка $[a, b]$ и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнялись неравенства

$$\sum_T |f_i(\xi_k)|\Delta_k - F_i(\Delta_k)| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. Выбирая в качестве нормы сумму модулей координат, получим

$$\begin{aligned} \sum_T \|f(\xi_k)|\Delta_k| - F(\Delta_k)\| &= \sum_T \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\xi_k)|\Delta_k - F_i(\Delta_k)| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_T |f_i(\xi_k)|\Delta_k - F_i(\Delta_k)| \right) < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана (подробнее см. [3]).

2. HL -интеграл и ML -интеграл. Введем интегралы, в само определение которых входит требование выполнения леммы Сакса–Хенстока (см. [3], [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется HL -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существует функция $F: [a, b] \rightarrow X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Хенстоку разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется ML -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существует функция $F: [a, b] \rightarrow X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная функция $\delta(\xi)$ такая, что для любого δ -согласованного по Мак-Шейну разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство (3). (В [8] ML -интеграл вводился как сильный интеграл Мак-Шейна.)

Легко видеть, что для этих интегралов справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.2.

ТЕОРЕМА 2.1. Если функция $f: [a, b] \rightarrow X$ ML -интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она HL -интегрируема на отрезке $[a, b]$, при этом интегралы совпадают.

В терминах введенных интегралов теорема 1.4 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X – конечномерное банахово пространство. Имеют место следующие утверждения:

- 1) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку тогда и только тогда, когда она HL -интегрируема;
- 2) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Мак-Шейну тогда и только тогда, когда она ML -интегрируема.

Далее мы рассмотрим случай, когда X – бесконечномерное банахово пространство. Из результатов п. 3 будет следовать, что для такого пространства утверждение, аналогичное теореме 2.2, не выполняется. Для получения этого результата нам понадобятся понятия VB^* -функции и VBG^* -функции, хорошо известные в действительном случае (см. [9, гл. VII]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется VB^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если существует число $M > 0$ такое, что для любого набора неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, концы которых принадлежат E , выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \omega(F, \Delta_i) < M.$$

Здесь

$$\omega(F, P) = \sup_{t, s \in P} \|F(t) - F(s)\|$$

– колебание функции F на множестве P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется VBG^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счетного объединения множеств, на каждом из которых F является VB^* -функцией.

Непосредственно из определений 2.3 и 2.4 и очевидного неравенства

$$\omega(\|F\|, P) \leq \omega(F, P)$$

вытекает

ЛЕММА 2.1. Имеют место следующие утверждения:

- 1) если $F: [a, b] \rightarrow X$ является VB^* -функцией на множестве E , то $\|F\|$ также будет VB^* -функцией на E ;
- 2) если $F: [a, b] \rightarrow X$ является VBG^* -функцией на множестве E , то $\|F\|$ также будет VBG^* -функцией на E .

Как и в действительном случае, первообразная HL -интегрируемой функции принадлежит классу VBG^* , что отражает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow X$ является HL -интегрируемой с первообразной $F: [a, b] \rightarrow X$. Тогда F является VBG^* -функцией на отрезке $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем, следуя [1], где уже разобран случай функций, принимающих действительные значения. Выберем положительную функцию $\delta(\xi)$ из условия HL -интегрируемости для $\varepsilon = 1$ (без ограничения общности можно считать $\delta(\xi) < 1$). Для каждого натурального m найдем максимальное l такое, что $a + l/(2m) \leq b$. Положим для всех m и k , $k \leq l + 1$,

$$E_m^k = \left\{ t \in \left[a + \frac{k-1}{2m}, a + \frac{k}{2m} \right) \cap [a, b] : \|f(t)\| \leq m, \delta(t) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Очевидно, что $[a, b] = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{l+1} E_m^k$. Поэтому достаточно доказать, что F является VB^* -функцией на каждом из множеств E_m^k . Фиксируем произвольные m и k , для которых множество E_m^k непусто. Рассмотрим произвольный набор неперекрывающихся отрезков $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n$ с концами из E_m^k . Из построения множества E_m^k видно, что подразбиение $\{(c_i, [c_i, d_i])\}_{i=1}^n$ является δ -согласованным по Хенстоку. Так как функция F непрерывна (по теореме 1.3), существуют точки $u_i, v_i \in [c_i, d_i]$ такие, что

$$\|F(v_i) - F(u_i)\| = \omega(F, [c_i, d_i]). \quad (4)$$

Принимая во внимание равенство (4), определение множества E_m^k и δ -согласованность по Хенстоку подразбиения, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega(F, [c_i, d_i]) &= \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(u_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(c_i)\| + \sum_{i=1}^n \|F(u_i) - F(c_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|F(u_i) - F(c_i) - f(c_i)(u_i - c_i)\| + \sum_{i=1}^n \|f(c_i)\|(u_i - c_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(c_i) - f(c_i)(v_i - c_i)\| + \sum_{i=1}^n \|f(c_i)\|(v_i - c_i) \\ &< 1 + m \cdot \frac{1}{m} + 1 + m \cdot \frac{1}{m} = 4. \end{aligned}$$

Следовательно, F является VB^* -функцией на E_m^k , что и доказывает теорему.

3. Основной результат. Итак, цель этого пункта – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть X – банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) X – конечномерное пространство;
- 2) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку тогда и только тогда, когда она HL -интегрируема;
- 3) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Мак-Шейну тогда и только тогда, когда она ML -интегрируема.

Доказательство этой теоремы опирается на конструкцию, использованную в [10] для построения безусловно, но не абсолютно сходящегося ряда в бесконечномерном банаховом пространстве.

ЛЕММА 3.1. Пусть B – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, r – натуральное число, не превосходящее n . Тогда на границе B найдутся векторы $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ выполняется

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \in \lambda B, \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \left(2 + \frac{r(r-1)}{n}\right) \sum_{i=1}^r \lambda_i^2.$$

Через λB обозначено множество $\{\lambda x, x \in B\}$.

Доказательство леммы 3.1 можно найти в [10].

ЛЕММА 3.2. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство, $c_1, \dots, c_r$ – произвольные положительные числа. Тогда найдутся векторы $x_1, \dots, x_r$ пространства X такие, что

$$\|x_i\|^2 = c_i, \quad 1 \leq i \leq r,$$

и для любых чисел $\theta_1, \dots, \theta_r$, удовлетворяющих условию $|\theta_i| \leq 1$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^r \theta_i x_i \right\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^r c_i. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу бесконечномерности пространства X для каждого натурального числа n найдутся линейно независимые векторы $z_1, \dots, z_n$ пространства X . Выберем $n = r(r-1)$. Обозначим через B множество векторов z , представимых в виде

$$z = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i,$$

где μ_i – числа такие, что $\|z\| \leq 1$. Тогда по лемме 3.1 на границе множества B можно найти векторы $A_1, \dots, A_r$ такие, что для любых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ справедливо

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \in \lambda B, \quad \text{где} \quad \lambda^2 = 3 \sum_{i=1}^r \lambda_i^2. \quad (6)$$

Так как для всех $i = 1, \dots, r$ векторы A_i лежат на границе B , то

$$\|A_i\| = 1. \quad (7)$$

Поскольку $\|z\| \leq 1$ для всех $z \in B$, из (6) следует, что

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \right\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^r \lambda_i^2. \quad (8)$$

Выберем $x_i = \sqrt{c_i} A_i$. Тогда в силу (7) $\|x_i\|^2 = c_i$. Для доказательства неравенства (5) достаточно применить неравенство (8), положив $\lambda_i = \theta_i \sqrt{c_i}$, и воспользоваться тем, что $|\theta_i| \leq 1$:

$$\left\| \sum_{i=1}^r \theta_i x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r \theta_i \sqrt{c_i} A_i \right\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^r \theta_i^2 c_i \leq 3 \sum_{i=1}^r c_i.$$

Докажем теперь основную техническую лемму.

ЛЕММА 3.3. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство. Тогда существует функция $f: [a, b] \rightarrow X$, обладающая следующими свойствами:

- 1) f интегрируема по Мак-Шейну;
- 2) ее первообразная $F: [a, b] \rightarrow X$ не является VBG^* -функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим для простоты, что $[a, b] = [0, 1]$. Пусть C – канторово множество, (a_i^r, b_i^r) , $r \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^r$, – смежные к C интервалы длины 3^{-r-1} ; d_i^r – середины интервалов (a_i^r, b_i^r) .

По лемме 3.2 для каждого r построим векторы $x_1^r, x_2^r, \dots, x_{2^r}^r \in X$ такие, что

$$\|x_i^r\| = \frac{1}{2^r}, \quad 1 \leq i \leq 2^r, \quad (9)$$

и для любых чисел $\theta_1^r, \theta_2^r, \dots, \theta_{2^r}^r$, удовлетворяющих условию $|\theta_i^r| \leq 1$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^r} \theta_i^r x_i^r \right\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^{2^r} \frac{1}{4^r},$$

которое можно записать в виде

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^r} \theta_i^r x_i^r \right\|^2 \leq \frac{3}{2^r}. \quad (10)$$

Определим функцию $f: [0, 1] \rightarrow X$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in C \text{ или } t = d_i^r, \\ 2 \cdot 3^r x_i^r, & \text{если } t \in (a_i^r, d_i^r), \\ -2 \cdot 3^r x_i^r, & \text{если } t \in (d_i^r, b_i^r), \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2^r.$$

Покажем, что построенная функция f интегрируема по Мак-Шейну и для любого $s \in C$ интеграл по отрезку $[0, s]$ равен 0. Введем следующие обозначения:

$$U_i^r = [0, s] \cap (a_i^r, b_i^r) \setminus \{d_i^r\}, \quad U_R = \bigcup_{r=0}^R \bigcup_{i=1}^{2^r} U_i^r, \\ U = \bigcup_{R=0}^{\infty} U_R, \quad V = [0, s] \cap C \cup \left(\bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^r} \{d_i^r\} \right).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Номер R и действительное число ρ выберем так, чтобы

$$2^R > \frac{16}{\varepsilon^2}, \quad (11)$$

$$\rho \cdot 3^{R+1} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (12)$$

Положительную функцию $\delta(\xi)$ зададим следующим образом:

$$\delta(\xi) = \min\{|\xi - a_i^r|, |\xi - b_i^r|, |\xi - d_i^r|\}, \quad \text{если } \xi \in U_i^r, r \geq 0, 1 \leq i \leq 2^r, \quad (13)$$

$$\delta(\xi) = \rho, \quad \text{если } \xi \in V. \quad (14)$$

Рассмотрим произвольное δ -согласованное по Мак-Шейну разбиение T отрезка $[0, s]$. Ясно, что $U \cup V = [0, s]$ и $f(\xi) = 0$ для всех $\xi \in V$. Поэтому

$$\sum_T f(\xi_k) |\Delta_k| = \sum_{\xi_k \in U} f(\xi_k) |\Delta_k|. \quad (15)$$

Можно считать, что каждый отрезок Δ_k обладает следующим свойством: он либо попадает в множество $\overline{U}_R$ целиком, либо не пересекается с U_R ($\overline{P}$ обозначает замыкание множества P). Если это не так, разобьем каждый отрезок Δ_k на конечное число отрезков, обладающих указанным свойством, и сопоставим каждому из этих отрезков одну и ту же точку ξ_k . При этом свойство δ -согласованности по Мак-Шейну, очевидно, не нарушится. В силу последнего замечания имеем

$$\left\| \sum_{\xi_k \in U} f(\xi_k) |\Delta_k| \right\| \leq \left\| \sum_{\Delta_k \subset \overline{U}_R} f(\xi_k) |\Delta_k| \right\| + \left\| \sum_{\Delta_k \cap U_R = \emptyset} f(\xi_k) |\Delta_k| \right\|. \quad (16)$$

Оценим каждое слагаемое. Принимая во внимание определение функции f , выбор функции $\delta(\xi)$ такой, как в (14), а также вспоминая, что $s \in C$, можно выбрать числа θ_i^r , $0 \leq r \leq R$, $1 \leq i \leq 2^r$, так что $|\theta_i^r| \leq 2\rho$ и

$$\sum_{\Delta_k \subset \overline{U}_R} f(\xi_k) |\Delta_k| = \sum_{r=0}^R \sum_{i=1}^{2^r} 2 \cdot 3^r \theta_i^r x_i^r.$$

Применяя соотношения (9) и (12), получим

$$\left\| \sum_{\Delta_k \subset \overline{U}_R} f(\xi_k) |\Delta_k| \right\| \leq \sum_{r=0}^R 2 \cdot 3^r \sum_{i=1}^{2^r} 2\rho \|x_i^r\| = 2\rho(3^{R+1} - 1) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

Оценим, наконец, второе слагаемое в (16). Принимая во внимание выбор функции $\delta(\xi)$ такой, как в (13), найдем числа θ_i^r , $r \geq R$, $1 \leq i \leq 2^r$, такие, что $|\theta_i^r| \leq 1$ и

$$\sum_{\Delta_k \cap U_R = \emptyset} f(\xi_k) |\Delta_k| = \sum_{r=R+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^r} \theta_i^r x_i^r.$$

Следовательно, применяя соотношения (10) и (11), заключаем, что

$$\left\| \sum_{\Delta_k \cap U_R = \emptyset} f(\xi_k) |\Delta_k| \right\| \leq \sum_{r=R+1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{2^r} \theta_i^r x_i^r \right\| \leq \sum_{r=R+1}^{\infty} \sqrt{3} \cdot 2^{-r/2} < 2 \cdot 2^{-R/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Объединяя (15)–(18), приходим к неравенству

$$\left\| \sum_T f(\xi_i) |\Delta_k| \right\| < \varepsilon.$$

Тем самым, мы проверили интегрируемость по Мак-Шейну функции f и показали, что ее первообразная обращается в 0 в каждой точке $s \in C$. В силу конечной аддитивности неопределенного интеграла Мак-Шейна первообразная функции f имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in C, \\ 2 \cdot 3^r(t - a_i^r)x_i^r, & \text{если } t \in (a_i^r, d_i^r], r \geq 0, 1 \leq i \leq 2^r, \\ -2 \cdot 3^r(t - b_i^r)x_i^r, & \text{если } t \in (d_i^r, b_i^r), r \geq 0, 1 \leq i \leq 2^r. \end{cases}$$

Осталось доказать, что функция F не является VBG^* -функцией. Пусть это не так. Тогда из утверждения 2) леммы 2.1 следует, что $\|F\|$ является VBG^* -функцией. Для $\|F\|$ имеем следующее представление:

$$\|F(t)\| = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in C, \\ 3^r(t - a_i^r)/2^{r-1}, & \text{если } t \in (a_i^r, d_i^r], r \geq 0, 1 \leq i \leq 2^r, \\ -3^r(t - b_i^r)/2^{r-1}, & \text{если } t \in (d_i^r, b_i^r), r \geq 0, 1 \leq i \leq 2^r. \end{cases}$$

Известно (см. [11, с. 224]), что эта функция не является VBG^* -функцией. Полученное противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Импликации $1) \Rightarrow 2), 1) \Rightarrow 3)$ немедленно вытекают из теоремы 2.2.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть X бесконечномерно. Тогда в силу леммы 3.3 существует интегрируемая по Мак-Шейну функция $f: [a, b] \rightarrow X$, первообразная которой не является VBG^* -функцией. По теореме 1.2 функция f интегрируема по Хенстоку, что по условию предполагает HL -интегрируемость. Но в силу теоремы 2.3 первообразная функции f в этом случае должна быть VBG^* -функцией. Полученное противоречие доказывает конечномерность пространства X .

$3) \Rightarrow 1)$. Доказательство аналогично предыдущему. Вместо теоремы 1.2 необходимо воспользоваться теоремой 2.1.

В работе [3] сформулировано достаточное условие эквивалентности интеграла Хенстока и HL -интеграла, использующее понятие AS -оператора. Обозначим через X^* пространство линейных непрерывных функционалов над X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow X$ называется *AS-оператором*, если существует положительное число M такое, что для любого конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n$ из X выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \|Tx_k\| \leq M \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)|.$$

ТЕОРЕМА 3.2 (см. [3]). *Если пространство X таково, что единичный оператор является AS -оператором, то интеграл Хенстока и HL -интеграл эквивалентны.*

Поскольку в конечномерном пространстве единичный оператор является AS -оператором, лемма Сакса–Хенстока (теорема 1.4) может быть получена как следствие теоремы 3.2.

Автор, пользуясь случаем, благодарит профессора В. А. Скворцова за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gordon R. Equivalence of the generalized Riemann and restricted Denjoy integral // Real Anal. Exchange. 1986/87. V. 12. № 2. P. 551–574.
- [2] McShane E. J. Unified Integration. New York: Acad. Press, 1983.
- [3] Cao S. S. The Henstock integral for Banach-valued functions // Southeast Asian Bull. Math. 1992. V. 16. № 1. P. 35–40.
- [4] Cao S. S. Banach-valued Henstock integration // Real Anal. Exchange. 1993/94. V. 19. № 1. P. 34.
- [5] Gordon R. The McShane integral of Banach-valued functions // Illinois J. Math. 1990. V. 34. P. 557–567.
- [6] Pfeffer W. The Riemann Approach to Integration. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [7] Mawhin J. Generalized multiple Perron integrals and the Green–Goursat theorem for differentiable vector fields // Czechoslovak Math. J. 1981. V. 31 (106). № 4. P. 614–632.
- [8] Congxin W., Xiaobo Y. A Riemann-type definition of the Bochner integral // J. Math. Study. 1994. V. 27. № 1. P. 32–36.
- [9] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [10] Dvoretzky A., Rogers C. A. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. № 3. P. 192–197.
- [11] Ene V. Real Functions – Current Topics. Lecture Notes in Math. V. 1603. Berlin: Springer, 1995.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: asolodov@nw.math.msu.su

Поступило

05.05.97

Исправленный вариант

30.07.98