Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чахкиев, Вопрос о точном значении одностороннего поперечника остается открытым, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:41:11

Вопрос о точном значении одностороннего поперечника остается открытым

М. А. Чаккиев

Ключевые слова: поперечники периодических классов, контрпример.

DOI: 10.4213/mzm11223

В книге [1; гл. 10, § 10.4] рассматриваются односторонние поперечники периодических классов W_∞^r . Однако основное, как сказано в книге, утверждение этого параграфа – лемма 10.4.1 на с. 230 – неверно. В самой книге лемма приведена без доказательства. Лемма принадлежит Рубану [2], однако доказательство, где строится некоторое специальное отображение и подсчитывается его степень, приведено лишь схематично.

У автора были сомнения по поводу целесообразности публикации контрпримера к лемме, однако выяснилось, что специалистам в теории приближений неизвестно о неверности леммы. Более того, предпринимаются попытки к ее обобщению. Прежде чем рассмотреть формулировку леммы и контрпример к ней, приведем некоторые необходимые определения и обозначения из [1].

Пусть X – некоторое линейное нормированное пространство вещественнозначных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[0, 2\pi]$. Величину

$$E^+(x, K) = \inf\{\|x - u\| : u(t) \geq x(t), u \in K\}$$

называют *наилучшим приближением сверху* функции $x(t)$ множеством K в метрике пространства X . Наилучшим приближением сверху множества L множеством K в метрике пространства X называют величину

$$E^+(L, K) = \sup_{x \in L} E^+(x, K).$$

Величину

$$d_n^+(L) = \inf_{\substack{K \subseteq X \\ \dim K = n}} E^+(L, K),$$

где нижняя грань берется по всем n -мерным подпространствам пространства X , называют *односторонним (сверху) поперечником* множества L .

ЛЕММА (Рубан [2]). Пусть $M_{2n} = \text{span}\{1, e_2, e_3, \dots, e_{2n}\}$,

$$u^+(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)e_2 + \dots + \lambda_{2n}(x)e_{2n}$$

– функция наилучшего приближения сверху для x в пространстве M_{2n} в метрике L_1 . Тогда найдется функция $x^+ \in q_{n,1}$ такая, что

$$\lambda_1(x^+) \geq \max_t x^+(t).$$

Здесь $e_2, \dots, e_{2n}$ – периодические с периодом 2π функции со средним значением на периоде равным нулю, $q_{n,1}$ – ломаные с не более чем $2n$ звеньями, каждое из которых наклонено к оси под углом $\pi/4$ или $3\pi/4$.

Перейдем к построению контрпримера к лемме. Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на $2n - 1$ равных интервала

$$\left(\frac{2\pi(k-2)}{2n-1}, \frac{2\pi(k-1)}{2n-1} \right), \quad k = 2, 3, \dots, 2n,$$

DOI: 10.4213/mzm11223

и пусть $v_k = v_k(t)$ функция, равная нулю на периоде вне интервала

$$\left(\frac{2\pi(k-2)}{2n-1}, \frac{2\pi(k-1)}{2n-1} \right),$$

равная единице в середине интервала и линейная на двух оставшихся участках.

Пусть $M_{2n} = \text{span}\{1, e_2, e_3, \dots, e_{2n}\}$, где $e_k = v_k - \pi/(2n-1)$, $k = 2, \dots, 2n$, так что среднее значение на периоде функций $e_2, \dots, e_{2n}$ равно нулю. Если

$$u^+(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)e_2 + \dots + \lambda_{2n}(x)e_{2n}$$

– функция наилучшего приближения сверху для x в пространстве M_{2n} в метрике L_1 , то по лемме найдется функция $x^+ \in q_{n,1}$ такая, что $\lambda_1(x^+) \geq \max_t x^+(t)$.

Без ограничения общности будем считать, что $\max_t x^+(t) = 0$. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_m$ – точки локального максимума функции $x^+(t)$. Так как $x^+(t)$ ломаная с не более чем $2n$ звеньями, то $m \leq n$. Если $2n-1 > n$, т.е. $n \geq 2$, то найдется интервал с номером j ,

$$\left(\frac{2\pi(j-2)}{2n-1}, \frac{2\pi(j-1)}{2n-1} \right),$$

такой, что ни одна из точек $t_1, t_2, \dots, t_m$ не принадлежит этому интервалу. Тогда нетрудно видеть, что в силу определения функции v_j и вида функции $x^+(t)$ выполнена оценка $-\alpha v_j(t) - x^+(t) \geq 0$, где положительное число α выбрано так, что производная функции $\alpha v_j(t)$ по модулю меньше единицы. Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (-\alpha v_j(t) - x^+(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\alpha \left(-e_j - \frac{\pi}{2n-1} \right) - x^+(t) \right) dt = - \int_0^{2\pi} x^+(t) dt - \frac{2\alpha\pi^2}{2n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее,

$$\int_0^{2\pi} (u^+(x) - x^+(t)) dt = 2\pi\lambda_1(x^+) - \int_0^{2\pi} x^+(t) dt. \quad (2)$$

Так как $\lambda_1(x^+) \geq \max_t x^+(t) = 0$, то из (1) и (2) следует

$$\int_0^{2\pi} (-\alpha v_j(t) - x^+(t)) dt < \int_0^{2\pi} (u^+(x) - x^+(t)) dt,$$

что противоречит тому, что функция $u^+(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)e_2 + \dots + \lambda_{2n}(x)e_{2n}$ – наилучшее приближение сверху для $x^+(t)$ в пространстве M_{2n} в метрике L_1 .

Полученное противоречие показывает, что лемма не верна уже при $n \geq 2$.

На основе леммы в [2] устанавливаются точные оценки односторонних поперечников классов периодических функций $W_\infty^r, W^r C$:

$$d_{2n}^+(W_\infty^r)_1 = d_{2n-1}^+(W_\infty^r)_1 = d_{2n}^+(W^r C)_1 = d_{2n-1}^+(W^r C)_1 = 2\pi \frac{K_r}{n^r}, \quad n, r = 1, 2, \dots,$$

которые, таким образом, нельзя считать доказанными.

Отметим еще, что лемма была бы верна, если функции $1, e_2, e_3, \dots, e_{2n}$ образовывали систему функций Чебышева на периоде. Для всех известных случаев экстремальные подпространства (многочлены, тригонометрические многочлены, сплайны) оказывались чебышевскими системами. В связи с этим было бы интересно выяснить, для каких выпуклых, центрально-симметричных, компактных классов гладких функций среди экстремальных подпространств есть чебышевские системы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Научова думка, Киев, 1982. [2] В. И. Рубан, *ДАН СССР*, **225**:1 (1980), 34–35.

М. А. Чахкиев

Российский государственный
социальный университет, г. Москва
E-mail: chahkiev_magomed@mail.ru

Поступило

21.12.2015