Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, Точные значения
относительных поперечников классов дифференцируемых
функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 871–
879

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:29:58

УДК 517.518.822

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Изучаются относительные поперечники в пространствах C и L классов периодических дифференцируемых функций W^r , $r = 1, 2, \dots$, когда в отличие от колмогоровских поперечников дополнительно требуется, чтобы приближающие функции принадлежали классу MW^r с заданной мажорантой M нормы производной порядка r . Доказано, что если для M выполнена равномерная по n и r оценка

$$M \geq \frac{4}{\pi^2} \log \min(n, r) + O(1),$$

то указанные n -мерные относительные поперечники классов W^r совпадают с колмогоровскими поперечниками.

Попутно получена равномерная по всем параметрам оценка констант Лебега нормальных средних Зигмунда рядов Фурье, определяемых множителями $1 - (k/n)^r$, $k \leq n$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Понятие относительного поперечника введено В. Н. Коноваловым [1]. Пусть X – банахово пространство, W и V – центрально симметричные подмножества X . *Относительным n -мерным поперечником множества W относительно множества V в пространстве X называется величина*

$$K_n(W, V, X) := \inf_{L_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in L_n \cap V} \|f - g\|_X,$$

где L_n – линейные подпространства X размерности n .

Здесь в отличие от классических колмогоровских поперечников требуется, чтобы приближающие элементы g из L_n принадлежали множеству V . В этой терминологии колмогоровские поперечники соответствуют случаю $V = X$. Как обычно, будем обозначать их через $d_n(W, X)$.

Обозначим через MW_C^r , $r = 1, 2, \dots$, класс 2π -периодических функций f , удовлетворяющих условию $|f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$. Если $M = 1$, то будем писать W_C^r .

Коновалов [1] доказал, что для $r = 1$ и $r = 2$ поперечники $K_n(W_C^r, W_C^r, C)$ имеют тот же порядок убывания при $n \rightarrow \infty$, что и $d_n(W_C^r, C)$, а для $r \geq 3$ точный порядок

Работа выполнена при финансовой поддержке совместной программы Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕИ Китая, грант № 96-01-00036С.

величин $K_n(W_C^r, W_C^r, C)$ равен n^{-2} . В [2] В. М. Тихомиров дал другое доказательство этих результатов (где рассматривались классы W_C^r и для нецелых r).

Отметим, что при $r = 1$ и $r = 2$ для четных n справедливо равенство

$$K_n(W_C^r, W_C^r, C) = d_n(W_C^r, C). \quad (1)$$

Для $r = 1$ равенство (1) вытекает из результатов В. Н. Малоземова [3, теорема 1] о приближении функций ломаными, а для $r = 2$ оно доказано Ю. Н. Субботиным [4, теорема 2].

Мы рассматриваем случай, когда $r \geq 3$.

В [5] В. Ф. Бабенко при $r = 3, 4, \dots$ оценил сверху относительные поперечники

$$K_n(W_C^r, (1 + \varepsilon_n)W_C^r, C),$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – заданная последовательность положительных чисел. Из его результатов, в частности, следует, что для фиксированного положительного числа ε имеет место порядковое равенство

$$K_n(W_C^r, (1 + \varepsilon)W_C^r, C) \sim n^{-r}, \quad r = 3, 4, \dots,$$

которое в качестве гипотезы было высказано С. Б. Стечкиным (см. [5, с. 25]).

Ясно, что если взять $M = M(n, r)$ достаточно большим, то справедливо равенство

$$K_n(W_C^r, MW_C^r, C) = d_n(W_C^r, C). \quad (2)$$

В настоящей работе дается оценка значений M , при которых это равенство имеет место. Параллельно мы рассматриваем аналогичную задачу об относительных поперечниках соответствующих классов функций в пространстве L .

Обозначим через MW_L^r , $r = 1, 2, \dots$, класс 2π -периодических функций f , у которых вариация производной $f^{(r-1)}$ на периоде ограничена числом M . При $M = 1$ будем писать W_L^r .

Относительным поперечникам классов W_L^r посвящены работы Бабенко [6], [7]. В [6] для $K_n(W_L^r, W_L^r, L)$ установлены оценки, аналогичные результатам Коновалова для $K_n(W_C^r, W_C^r, C)$, и доказано, что для четных n при $r = 1$ и $r = 2$ справедливо равенство

$$K_n(W_L^r, MW_L^r, L) = d_n(W_L^r, L). \quad (3)$$

А в [7] для поперечников $K_n(W_L^r, (1 + \varepsilon_n)W_L^r, L)$ получены такие же результаты, как в [5] для $K_n(W_C^r, (1 + \varepsilon_n)W_C^r, C)$.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Существует абсолютная постоянная A такая, что для*

$$M \geq \frac{4}{\pi^2} \log \min(m, r) + A$$

справедливы равенства (2) и (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [8, теоремы 10.4.1, 10.5.1 и 5.5.1], что колмогоровские поперечники $d_n(W_C^r, C)$ и $d_n(W_L^r, L)$ для $n = 2m - 1$ и $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, достигаются при приближении функций f средними Фавара – полиномами

$$u_m(f, x, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k(r)}{k^r} \cos\left(k(x-t) - \frac{r\pi}{2}\right) df^{(r-1)}(t),$$

где $\lambda_k(r)$ определяются для нечетных r равенствами

$$\lambda_k(r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{2sm-k} \right)^r - \left(\frac{k}{2sm+k} \right)^r \right) \quad (4)$$

и для четных r равенствами

$$\lambda_k(r) := 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\left(\frac{k}{2sm-k} \right)^r + \left(\frac{k}{2sm+k} \right)^r \right). \quad (5)$$

При этом

$$d_{2m-1}(W_C^r, C) = d_{2m}(W_C^r, C) = d_{2m-1}(W_L^r, L) = d_{2m}(W_L^r, L) = \frac{\mathcal{K}_r}{m^r},$$

где $\mathcal{K}_r$ – константы Фавара

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Для поперечников в C это доказал В.М. Тихомиров, значения $d_n(W_L^r, L)$ для нечетных n нашли независимо Ю.И. Маковоз и Ю.Н. Субботин, а для четных n – В.И. Рубан.

Для производных порядка r полиномов $u_m(f, x, \lambda)$ имеет место представление

$$u_m^{(r)}(f, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k(r) \cos k(x-t) df^{(r-1)}(t).$$

Поэтому, полагая

$$I(m, r) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k(r) \cos kx \right| dx, \quad (6)$$

получим неравенство для $f \in W_C^r$

$$\|u_m^{(r)}(f, x, \lambda)\|_C \leq I(m, r)$$

и аналогичное неравенство для $f \in W_L^r$

$$\|u_m^{(r)}(f, x, \lambda)\|_L \leq I(m, r).$$

Это показывает, что если $M \geq I(m, r)$, то справедливы равенства (2) и (3). Таким образом, теорема будет доказана, если мы установим следующее предложение.

ЛЕММА. Для любых натуральных m и r справедлива равномерная по этим параметрам оценка

$$I(m, r) = \frac{4}{\pi^2} \log \min(m, r) + O(1). \quad (7)$$

Отметим, что здесь и далее все оценки с O -символами являются равномерными относительно всех параметров.

Доказательству леммы посвящены п. 3–5 настоящей статьи. При этом мы будем оценивать не интеграл (6), а следующий:

$$I^*(m, r) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\lambda_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k(r) \cos kx \right| dx, \quad (8)$$

где числа $\lambda_0(r)$ так же, как и $\lambda_k(r)$ при $k \geq 1$, определяются соответственно формулами (4) и (5). Заметим, что $\lambda_0(r) = 1$ для всех r . Поэтому достаточно доказать оценку вида (7) для интеграла (8).

3. Оценки норм тригонометрических полиномов. Мы будем пользоваться следующей оценкой, установленной Стечкиным [9, теорема 2]. Если числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m = 0$ образуют убывающую вогнутую последовательность (последнее условие означает, что $\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \leq 0$ для $k = 0, 1, \dots, m-2$), то

$$\int_0^\pi \left| \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \cos kx \right| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{m-k} + O(\lambda_0). \quad (9)$$

Из сказанного ниже станет ясно, что интегралы (8) мало отличаются от констант Лебега нормальных средних Зигмунда

$$Z(m, r) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{z_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} z_k(r) \cos kx \right| dx, \quad (10)$$

где

$$z_k(r) := 1 - \left(\frac{k}{m} \right)^r, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Поэтому в качестве первого шага в доказательстве леммы получим оценку величин $Z(m, r)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых натуральных m и r справедлива равномерная по этим параметрам оценка

$$Z(m, r) = \frac{4}{\pi^2} \log \min(m, r) + O(1). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убывание и вогнутость последовательности $z_0(r), z_1(r), \dots, z_m(r) = 0$ очевидны. Поэтому для оценки интеграла (10) можно пользоваться оценкой (9), согласно которой

$$Z(m, r) = \frac{4}{\pi^2} A(m, r) + O(1), \quad (12)$$

где

$$A(m, r) := \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m-k} \left(1 - \left(\frac{k}{m} \right)^r \right).$$

Представим величину $A(m, r)$ следующим образом:

$$A(m, r) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m-k} \left(1 - \frac{k}{m}\right) \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} \sum_{k=1}^{m-1} k^i. \quad (13)$$

Для сумм

$$B(m, i) := \sum_{k=1}^{m-1} k^i, \quad i = 0, 1, \dots,$$

будем пользоваться оценками

$$\frac{1}{i+1} m^{i+1} - m^i \leq B(m, i) < \frac{1}{i+1} m^{i+1}, \quad (14)$$

а если $i > m$, то

$$B(m, i) < 2(m-1)^i. \quad (15)$$

Неравенства (14) легко доказываются с помощью перехода к интегралам:

$$\begin{aligned} B(m, i) &< \int_0^m u^i du = \frac{1}{i+1} m^{i+1}, \\ B(m, i) &= \sum_{k=1}^m k^i - m^i \geq \int_0^m u^i du - m^i = \frac{1}{i+1} m^{i+1} - m^i. \end{aligned}$$

Далее,

$$B(m, i) < (m-1)^i + \int_0^{m-1} u^i du = (m-1)^i + \frac{1}{i+1} (m-1)^{i+1},$$

откуда для $i > m$ следует (15).

Применяя к представлению (13) неравенства (14), находим

$$A(m, r) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} \left(\frac{1}{i+1} m^{i+1} + O(m^i) \right) = \log r + O(1) + O\left(\frac{r}{m}\right).$$

Значит, если $r \leq m$, то

$$A(m, r) = \log r + O(1). \quad (16)$$

Для $r > m$ согласно (13) имеем

$$A(m, r) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m^{i+1}} B(m, i) + \sum_{i=m}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} B(m, i). \quad (17)$$

Первая сумма из правой части оценки (17) в силу (16) есть $\log m + O(1)$. А для второй суммы из правой части (17) справедлива оценка, при доказательстве которой используется (15):

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} B(m, i) &< \sum_{i=m}^{r-1} \frac{1}{m^{i+1}} 2(m-1)^i < \frac{2}{m} \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^i \\ &< \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 - (m-1)/m} = 1. \end{aligned}$$

Поэтому при $r > m$ $A(m, r) = \log m + O(1)$. Отсюда и из (16) вытекает оценка

$$A(m, r) = \log \min(m, r) + O(1), \quad (18)$$

которая в силу (12) приводит к (11). Теорема доказана.

Ранее была известна ограниченность чисел $Z(m, r)$ величиной, зависящей только от r (см. [10, с. 46]). Теорема 2 уточняет этот результат.

4. Оценка интеграла (8) для коэффициентов (4). Покажем сначала, что при каждом m последовательность $\lambda_0(r), \lambda_1(r), \dots, \lambda_m(r)$, задаваемая формулой (4), убывает и вогнута. При этом будем пользоваться следующим представлением чисел (4):

$$\lambda_k(r) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{2sm+k} \right)^r - \left(\frac{k}{2sm-k} \right)^r \right) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(k),$$

где

$$\varphi_s(x) := \left(\frac{x}{2sm+x} \right)^r - \left(\frac{x}{2sm-x} \right)^r.$$

Так как для $x \in (0, m]$

$$\varphi'_s(x) = 2smr x^{r-1} \left(\frac{1}{(2sm+x)^{r+1}} - \frac{1}{(2sm-x)^{r+1}} \right) < 0,$$

числа $\{\lambda_k(r)\}$ с ростом k убывают. Далее, для таких x

$$\begin{aligned} \varphi''_s(x) &= 2smr(r-1)x^{r-2} \left(\frac{1}{(2sm+x)^{r+1}} - \frac{1}{(2sm-x)^{r+1}} \right) \\ &\quad - 2smr(r+1)x^{r-1} \left(\frac{1}{(2sm+x)^{r+2}} + \frac{1}{(2sm-x)^{r+2}} \right) < 0. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $\lambda_0(r), \lambda_1(r), \dots, \lambda_m(r)$ вогнута.

Таким образом, к интегралу $I^*(m, r)$ применима оценка (9).

При оценке суммы

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k(r)}{m-k} \quad (19)$$

воспользуемся тем, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right) = \frac{1}{m^r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_k(r) &= 1 - \left(\frac{k}{m} \right)^r + k^r \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm+m)^r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(2sm-k)^r} - \frac{1}{(2sm+k)^r} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Вклад в сумму (19) от выражения $1 - (k/m)^r$ оценен при доказательстве теоремы 2: это величина $A(m, r)$.

Рассмотрим последнее выражение в представлении (20) чисел $\lambda_k(r)$. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \left| \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k^r}{(2sm-m)^r} - \frac{k^r}{(2sm+m)^r} \right) - \left(\frac{k^r}{(2sm-k)^r} - \frac{k^r}{(2sm+k)^r} \right) \right) \right| \\ &\leq k^r \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left| \frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm-k)^r} \right| + \left| \frac{1}{(2sm+m)^r} - \frac{1}{(2sm+k)^r} \right| \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, видим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm-k)^r} \right| &< \frac{r(m-k)}{(2sm-m)^{r+1}}, \\ \left| \frac{1}{(2sm+m)^r} - \frac{1}{(2sm+k)^r} \right| &< \frac{r(m-k)}{(2sm+m)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\alpha_k < k^r r(m-k) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(pm)^{r+1}} < \frac{2r(m-k)}{m^{r+1}} k^r.$$

Отсюда с помощью правого неравенства (14) находим

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k}{m-k} < 2r \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^r}{m^{r+1}} < 2. \quad (22)$$

Из (20), (18) и (22) вытекает оценка суммы (19):

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k(r)}{m-k} = \log \min(m, r) + O(1). \quad (23)$$

Таким образом, согласно (9) для коэффициентов λ , задаваемых формулой (4), лемма доказана.

5. Оценка интеграла (8) для коэффициентов (5). Рассуждения проведем по той же схеме, что и для коэффициентов, задаваемых формулой (4). Покажем, что последовательность $\lambda_0(r), \lambda_1(r), \dots, \lambda_m(r)$ коэффициентов (5) убывает и вогнута.

Запишем числа $\lambda_k(r)$ следующим образом:

$$\lambda_k(r) = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(k), \quad (24)$$

где

$$\psi_p(x) := \left(\frac{x}{(4p-2)m-x} \right)^r + \left(\frac{x}{(4p-2)m+x} \right)^r - \left(\frac{x}{4pm-x} \right)^r - \left(\frac{x}{4pm+x} \right)^r.$$

Будем рассматривать $x \in (0, m]$. Имеем $\psi'_p(x) = rx^{r-1}\sigma_1 + rx^r\sigma_2$, где

$$\sigma_1 := \frac{1}{((4p-2)m-x)^r} + \frac{1}{((4p-2)m+x)^r} - \frac{1}{(4pm-x)^r} - \frac{1}{(4pm+x)^r},$$

$$\sigma_2 := \frac{1}{((4p-2)m-x)^{r+1}} - \frac{1}{((4p-2)m+x)^{r+1}} - \frac{1}{(4pm-x)^{r+1}} + \frac{1}{(4pm+x)^{r+1}}.$$

Оценка $\sigma_1 > 0$ очевидна. Неравенство $\sigma_2 > 0$ вытекает из того, что разность

$$\frac{1}{(a-x)^{r+1}} - \frac{1}{(a+x)^{r+1}}, \quad a > x,$$

как функция от a убывает, в чем легко убедиться, рассмотрев ее производную по a .

Таким образом, $\psi'_p(x) > 0$, откуда в силу (24) следует, что числа $\lambda_k(r)$ с ростом k убывают.

Оценим теперь знак второй производной функций $\psi_p(x)$. При этом будем пользоваться представлением

$$\psi''_p(x) = r(r-1)x^{r-2}\sigma_1 + 2r^2x^{r-1}\sigma_2 + r(r+1)\sigma_3, \quad (25)$$

где σ_1 и σ_2 те же, что и выше, а

$$\sigma_3 := \frac{1}{((4p-2)m-x)^{r+2}} + \frac{1}{((4p-2)m+x)^{r+2}} - \frac{1}{(4pm-x)^{r+2}} - \frac{1}{(4pm+x)^{r+2}}.$$

Положительность величин σ_1 и σ_2 нам уже известна, а оценка $\sigma_3 > 0$ очевидна. Поэтому из (25) следует неравенство $\psi''_p(x) > 0$, которое доказывает вогнутость последовательности $\lambda_0(r), \lambda_1(r), \dots, \lambda_m(r)$.

Значит, для оценки интеграла $I^*(m, r)$ можно пользоваться формулой (9).

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k(r)}{m-k}. \quad (26)$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\frac{1}{(2sm-m)^r} + \frac{1}{(2sm+m)^r} \right) = \frac{1}{m^r},$$

то

$$\lambda_k(r) = 1 - \left(\frac{k}{m} \right)^r + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\left(\frac{k^r}{(2sm-m)^r} + \frac{k^r}{(2sm+m)^r} \right) - \left(\frac{k^r}{(2sm-k)^r} + \frac{k^r}{(2sm+k)^r} \right) \right).$$

Вклад в сумму (26) от выражения $1 - (k/m)^r$ есть величина $A(m, r)$.

Оценивая выражение

$$\beta_k := \left| \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \left(\left(\frac{k^r}{(2sm-m)^r} + \frac{k^r}{(2sm+m)^r} \right) - \left(\frac{k^r}{(2sm-k)^r} + \frac{k^r}{(2sm+k)^r} \right) \right) \right| \\ \leq k^r \sum_{s=1}^{\infty} \left(\left| \frac{1}{(2sm-m)^r} - \frac{1}{(2sm-k)^r} \right| + \left| \frac{1}{(2sm+m)^r} - \frac{1}{(2sm+k)^r} \right| \right),$$

видим, что для чисел β_k справедлива такая же оценка, как оценка (21) для чисел α_k . Поэтому имеют место оценки

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\beta_k}{m-k} < 2,$$

и

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k(r)}{m-k} = \log \min(m, r) + O(1),$$

аналогичные (22) и (23) соответственно. Таким образом, лемма доказана и для коэффициентов (5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коновалов В. Н. Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 369–380.
- [2] Tikhomirov V. M. Some remarks on relative diameters // Banach Center Publ. 1989. V. 22. P. 471–474.
- [3] Малоземов В. Н. Об отклонении ломаных // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1966. № 7. С. 150–153.
- [4] Субботин Ю. Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. С. 996–1003.
- [5] Бабенко В. Ф. О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 24–30.
- [6] Бабенко В. Ф. Приближения в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближения. Сб. научн. тр. Киев: ИМ АН УССР, 1989. С. 9–18.
- [7] Бабенко В. Ф. О наилучших L_1 -приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 5. С. 12–19.
- [8] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.
- [9] Стечкин С. Б. К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1950. Т. 75. С. 165–168.
- [10] Sz.-Nagy B. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier // Hungar. Acta Math. 1948. V. 1. № 3. P. 14–52.

Институт математики и механики УрО РАН
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
10.12.97