Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над полуцепными кольцами, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 880–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:49:54

УДК 512.55

МОДУЛИ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. А. Туганбаев

В работе продолжаются исследования полуцепных нётеровых колец. Доказаны общие теоремы о структуре таких колец. В частности, получен ряд результатов о π -проективных и π -инъективных модулях над полуцепными кольцами.

Библиография: 14 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль называется *цепным*, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. В [1] доказано, что нётерово справа полуцепное полупервичное кольцо является конечным прямым произведением нётеровых (справа и слева) полуцепных первичных колец. Кроме того, существуют полуцепные справа нётеровы справа полупервичные кольца, не являющиеся ни полуцепными слева, ни нётеровыми слева кольцами (см., например, [2]). Первым основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – полуцепное справа нётерово слева полупервичное кольцо;
- (2) A – полуцепное слева нётерово справа полупервичное кольцо;
- (3) A – конечное прямое произведение полуцепных нётеровых наследственных первичных колец.

Через $J(M)$ обозначается радикал Джекобсона модуля M . Каждый конечнопорожденный цепной ненулевой модуль M является *локальным* модулем (т.е. $M/J(M)$ – простой модуль). Поэтому единица любого полуцепного справа или слева кольца A является суммой локальных ортогональных идемпотентов и, следовательно, A – полусовершенное кольцо. В [3] доказано, что полуцепное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов имеет артиново полуцепное классическое кольцо частных. Вторым основным результатом данной работы является

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00627.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы полуцепного кольца A в сумму локальных ортогональных идемпотентов e_i , причем каждое кольцо $e_i A e_i$ удовлетворяет либо условию максимальности для правых аннуляторов, либо условию максимальности для левых аннуляторов. Тогда A имеет артиново полуцепное классическое кольцо частных.

В связи с теоремой 2 отметим, что полуцепные кольца не всегда имеют артиновы классические кольца частных. Пусть A – цепное первичное кольцо с делителями нуля (пример такого кольца см. в [4]). Допустим, что A имеет артиново справа или слева классическое кольцо частных Q . Тогда Q является цепным кольцом. Кроме того, Q изоморфно кольцу матриц над телом. Поэтому Q – тело и A – область; получено противоречие.

Подмодуль N модуля M называется *малым* (в M), если для любого подмодуля P модуля M из равенства $N + P = M$ следует, что $P = M$. В [5, теорема 4.6] доказано, что каждый конечнопорожденный несингулярный модуль над полуцепным кольцом является проективным модулем. В связи с этим имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть M_A – конечнопорожденный модуль над полуцепным кольцом A , причем сингулярный подмодуль $\text{Sing}(M)$ является малым подмодулем в M . Тогда M – проективный несингулярный полуцепной модуль.

Кроме того, у любого несингулярного A -модуля все подмодули являются плоскими модулями, причем каждый инъективный несингулярный A -модуль является полуцепным модулем.

В связи с теоремой 3 отметим, что циклическая абелева группа M порядка 2 является конечнопорожденным модулем над конечным цепным кольцом вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, причем M не является ни проективным, ни несингулярным $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -модулем.

Кроме теорем 1–3 в работе доказаны другие результаты о полуцепных кольцах. В частности, в п. 3 получен ряд результатов о π -проективных и π -инъективных модулях над полуцепными кольцами.

Доказательство теорем разобьем на ряд лемм. Приведем необходимые определения и обозначения. Через $\text{End}(M)$ и $\text{Lat}(M)$ обозначим кольцо эндоморфизмов и решетку подмодулей модуля M соответственно. Через $r_A(N)$ обозначим аннулятор в кольце A подмножества N правого модуля M_A , причем индекс будем опускать, когда ясно, какое кольцо имеется в виду. Элемент a кольца A называется *регулярным*, если $r(a) = l(a) = 0$. Через $\text{Sing}(M)$ обозначим *сингулярный подмодуль* модуля M_A над кольцом A (т.е. множество всех элементов $m \in M$ таких, что $r(m)$ – существенный правый идеал кольца A). Модуль M_A называется *несингулярным* (*сингулярным*), если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$). Модуль M называется *дистрибутивным*, если $\text{Lat}(M)$ – дистрибутивная решетка (т.е. $X \cap (Y + Z) = X \cap Y + X \cap Z$ для любых подмодулей X, Y, Z модуля M). Подмодуль фактормодуля модуля M называется *подфактором* модуля M . Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным* (в смысле Голди). Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Прямая сумма равномерных (дистрибутивных) модулей называется *полуравномерным* (*полудистрибутивным*) модулем. Модуль M называется *полунаследственным* (*риккартовым*), если все его конечнопорожденные подмодули (все его циклические подмодули) проективны. Если все конечнопорожденные подмодули модуля M являются нётеровыми, то

M называется *локально нётеровым* модулем. Модуль M_A называется *точным*, если $r(M) = 0$ (это равносильно тому, что модуль A_A изоморфен подмодулю некоторой прямой степени модуля M). Модуль M называется *конечно точным*, если существует натуральное число n такое, что прямая сумма M^n изоморфных копий модуля M содержит свободный циклический подмодуль. Кольцо A называется *совершенным справа*, если $A/J(A)$ – артиново кольцо и для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из $J(A)$ существует номер n такой, что $a_n \cdot \dots \cdot a_1 = 0$. Кольцо, не содержащее бесконечных множеств ненулевых ортогональных идемпотентов, называется *ортогонально конечным*.

1. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1.1. Пусть M_A – модуль над кольцом A . Тогда

- (1) если M – конечномерный модуль, $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ и M_i – риккартовы (полунаследственные) модули, то M – риккартов (полунаследственный) модуль;
- (2) если M – риккартов модуль, то M – несингулярный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $h_i: M \rightarrow M_i$ – естественные проекции, все M_i – риккартовы (полунаследственные) модули и N – ненулевой циклический (конечнопорожденный) подмодуль модуля M . По предположению все $h_i(N)$ – проективные модули, откуда $N = N_i \oplus N \cap (\bigoplus_{j \neq i} M_j)$, где $N_i \cong h_i(N)$ ($i = 1, \dots, n$). Осталось провести индукцию по n , и утверждение будет доказано.

(2) Пусть m – элемент модуля M такой, что $r(m)$ – существенный правый идеал кольца A . Так как mA – проективный модуль, изоморфный модулю $(A/r(a))_A$, то $r(m)$ – существенное прямое слагаемое модуля A_A . Тогда $r(a) = A$, $m = 0$.

ЛЕММА 1.2. (1) Если e – идемпотент несингулярного справа кольца A такой, что eA – равномерный правый A -модуль, то $r(ae) = (1-e)A$ для любого ненулевого $ae \in Ae$ и, следовательно, aeA_A – проективный модуль.

(2) Если A – риккартово справа конечномерное справа полупервичное кольцо, то A – полуравномерное справа кольцо.

(3) Если A – полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то A – несингулярное слева кольцо.

(4) Если A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то $\text{Sing}(A_A)$ – нильпотентный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $(1-e)A \subseteq r(ae)$, то $r(ae) = eB \oplus (1-e)A$, где eB – подмодуль модуля eA . Допустим, что $(1-e)A \neq r(ae)$. Тогда $eB \neq 0$. Так как eB – ненулевой подмодуль равномерного модуля eA , то eA – существенное расширение модуля eB . Поэтому $r(ae) = eB \oplus (1-e)A$ – существенный правый идеал кольца A . Так как A несингулярно справа, то $ae = 0$; получено противоречие.

(2) Риккартово справа кольцо A несингулярно справа. Конечномерное справа кольцо A имеет существенный правый идеал M , являющийся конечной прямой суммой равномерных правых идеалов $M_1, \dots, M_n$. Так как A – несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо, то A – правый порядок в полупростом артиновом кольце [6, 3.32, 3.35]. Поэтому существенный правый идеал M кольца содержит некоторый регулярный элемент a . Так как A – риккартово справа конечномерное справа кольцо и $aA \subseteq M$, то проективный модуль aA изоморфен прямой сумме некоторых подмодулей из M_i , причем $aA \cong A_A$. Поэтому A – полуравномерное справа кольцо.

(3) Пусть $H \equiv \text{Sing}({}_A A)$. Так как A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то A – кольцо с условием минимальности для левых аннуляторов. Поэтому существуют элементы $h_1, \dots, h_m \in H$ такие, что $l(H) = \bigcap_{i=1}^n l(h_i)$. Тогда $l(H)$ – существенный левый идеал. Так как $(H \cap l(H))^2 = 0$ и A – полупервичное кольцо, то $H \cap l(H) = 0$. Поскольку $l(H)$ – существенный левый идеал, то $H = 0$.

(4) доказано в [6, 3.31].

ЛЕММА 1.3. Пусть A – полусовершенное кольцо, у которого все 2-порожденные правые идеалы проективны. Тогда

- (1) если A – полуравномерное справа кольцо, то A – полуцепное справа кольцо;
- (2) если A – конечномерное справа полупервичное кольцо, то A – полуцепное справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть M – равномерное прямое слагаемое модуля A_A . Достаточно доказать, что M_A – цепной модуль. Допустим противное. Существуют несравнимые по включению циклические подмодули F и G модуля M . Тогда $F + G$ – нелокальный 2-порожденный модуль. Так как $F + G$ – неразложимый конечнопорожденный проективный модуль над полусовершенным кольцом A , то $F + G$ – локальный модуль (см. [7, 22.23]). Получено противоречие.

(2) следует из (1) и леммы 1.2 (2).

ЛЕММА 1.4. (1) Пусть все матричные кольца A_n над кольцом A ортогонально конечны. Тогда A полунаследственно справа $\iff A$ полунаследственно слева.

(2) Пусть A – конечномерное справа или слева кольцо. Тогда A полунаследственно справа $\iff A$ полунаследственно слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [8, теорема 3].

(2) Согласно (1) достаточно доказать, что все матричные кольца A_n ортогонально конечны. Так как A конечномерно справа или слева, то либо все конечнопорожденные проективные правые A -модули конечномерны, либо все конечнопорожденные проективные левые A -модули конечномерны. Поэтому все кольца A_n конечномерны справа или слева. В частности, все кольца A_n ортогонально конечны.

ЛЕММА 1.5. Пусть A – конечномерное справа наследственное справа кольцо. Тогда

- (1) A – нётерово справа кольцо;
- (2) если B – конечнопорожденный существенный левый идеал кольца A , то A – кольцо с условием минимальности для конечнопорожденных левых идеалов, содержащих B ;
- (3) если A – конечномерное слева кольцо и B – существенный левый идеал кольца A , то A – кольцо с условием минимальности для конечнопорожденных левых идеалов, содержащих B ;
- (4) если e – ненулевой идемпотент кольца A такой, что Ae – цепной левый A -модуль и b – ненулевой элемент из Ae , то Ae/Ab – артинов левый A -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [6, следствие 5.20].

(2) Согласно (1) A – нётерово справа кольцо. Для нётерова справа наследственного справа кольца A утверждение доказано в [9, теорема 2.2].

(3) следует из (2) и того, что каждый конечномерный модуль является существенным расширением конечнопорожденного модуля.

(4) Пусть $B \equiv Ab \oplus A(1 - e)$. Так как цепной модуль Ae – существенное расширение модуля Ab , то B – конечнопорожденный существенный левый идеал. Согласно (2) A – кольцо с условием минимальности для конечнопорожденных левых идеалов, содержащих B . Кроме того, модуль ${}_A A/B$ изоморфен цепному модулю Ae/Ab . Поэтому Ae/Ab – артинов модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Для полуцепного справа кольца A равносильны условия:*

- (1) A – несингулярное справа кольцо;
- (2) A – полунаследственное справа кольцо;
- (3) A – полунаследственное слева кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (2) $\iff$ (3) следует из леммы 1.4 (2). (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.1 (2).

(1) $\implies$ (2). Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$, где e_i – ненулевые ортогональные идемпотенты такие, что все $e_i A$ – цепные правые A -модули. Рассмотрим некоторое $e_i \equiv e$. По лемме 1.1 (1) достаточно доказать, что eA – полунаследственный A -модуль. Пусть B – конечнопорожденный подмодуль модуля eA . Так как eA – цепной модуль, то $B = ebA$ для некоторого элемента $eb \in eA$. Тогда $\sum_{j=1}^n ebe_j A = ebA$ – подмодуль цепного модуля eA . Поэтому существует индекс j такой, что

$$ebe_j A = \sum_{k=1}^n ebe_k A = ebA.$$

По лемме 1.2 (1) $ebe_j A = B$ – проективный модуль.

ЛЕММА 1.7. *Пусть A – полуцепное слева кольцо. Тогда*

- (1) $A/\bigcap_{n=1} (J(A)^n)$ – нётерово слева кольцо, причем $A/J(A)^n$ – артиново слева кольцо для любого натурального числа n ;
- (2) для любых примитивных ненулевых идемпотентов e и f кольца A верно, что ${}_A Ae$ и ${}_A Af$ – цепные левые A -модули, eAe – цепное слева кольцо и eAf – цепной левый eAe -модуль;
- (3) если A – несингулярное слева кольцо, то A – полунаследственное (справа и слева) кольцо;
- (4) если A – полупервичное кольцо, то A – конечное прямое произведение полуцепных слева первичных колец;
- (5) если A – конечномерное справа наследственное справа кольцо и B – существенный левый идеал кольца A , то ${}_A A/B$ – артинов модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $M \equiv J(A)$. Так как A/M^n – полуцепное слева примарное кольцо, то непосредственно проверяется, что A/M^n – артиново слева кольцо. Докажем, что $A/\bigcap_{n=1} (J(A)^n)$ – нётерово слева кольцо. Без ограничения общности можно считать, что $\bigcap_{n=1} M^n = 0$. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$, где e_i – ненулевые ортогональные идемпотенты такие, что все $e_i A$ – цепные правые A -модули. Рассмотрим некоторый идемпотент $e_i \equiv e$. Достаточно доказать, что eA – нётеров A -модуль. Пусть B – ненулевой подмодуль в eA . Надо доказать, что B – конечнопорожденный модуль. Так как $\bigcap_{n=1} M^n = 0$, то $B \not\subseteq M^n$ для некоторого n . Поскольку eA – цепной модуль,

то B строго содержит $M^n \cap eA = eM^n$. Поэтому $M^n \subseteq B \oplus (1 - e)A$. Факторкольцо A/M^n артиново справа и, в частности, нётерово справа. Поэтому $B/eM^n \oplus (1 - e)A/(1 - e)M^n$ – конечнопорожденный правый A -модуль, откуда B/eM^n – конечнопорожденный правый A -модуль. Кроме того, eM^n – малый подмодуль цепного модуля B_A . Поэтому B_A – конечнопорожденный A -модуль.

(2) Так как любое разложение полусовершенного кольца в прямую сумму неразложимых ненулевых левых идеалов является единственным с точностью до изоморфизма и A – полуцепное слева кольцо, то ${}_A A e$ и ${}_A A f$ – цепные модули. Тогда непосредственно проверяется, что $eA f$ – цепной левый $eA e$ -модуль. В частности, $eA e$ – цепное слева кольцо.

(3) следует из симметричного аналога предложения 1.6.

(4) Единица полусовершенного кольца A является суммой локальных ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_m$. Так как A – конечномерное слева полупервичное кольцо, то существуют несравнимые по включению первичные идеалы $P_1, \dots, P_n$ такие, что $P_1 \cap \dots \cap P_n = 0$. Теперь достаточно доказать, что $P_i + P_j = A$ при $i \neq j$. А именно, для каждого e_k и любых несовпадающих i, j доказать включение $e_k \in A \setminus P_i + P_j$. Положим $e \equiv e_k$. Согласно (2) $eA e$ – цепное слева кольцо. Поэтому идеалы $eP_i e$ и $eP_j e$ кольца $eA e$ сравнимы по включению. Например, пусть $eP_i e \subseteq eP_j e \subseteq P_j$. Так как P_j – первичный идеал и $P_i \not\subseteq P_j$, то $e \in P_j \subseteq P_i + P_j$.

(5) Пусть ${}_A A = \sum_{i=1}^n A_i$, где все A_i – цепные левые A -модули. Так как B – существенный левый идеал, то существуют ненулевые элементы $b_i \in A_i \cap B$. По лемме 1.5 (4) все левые A -модули A_i/Ab_i являются артиновыми. Пусть $C \equiv \sum_{i=1}^n Ab_i$. Так как $A/C \cong \bigoplus_{i=1}^n A_i/Ab_i$, то модуль ${}_A A/C$ артинов. Поэтому ${}_A A/B$ – артинов модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. (1) Пусть A – полуцепное справа кольцо. Тогда A – нётерово справа несингулярное справа кольцо $\iff A$ – наследственное справа кольцо.

(2) Пусть A – полуцепное кольцо. Тогда A – несингулярное справа кольцо $\iff A$ – несингулярное слева кольцо $\iff A$ – полунаследственное кольцо.

(3) Если A – нётерово справа несингулярное справа полуцепное кольцо, то A – наследственное справа кольцо и для каждого существенного левого идеала B кольца A модуль ${}_A A/B$ является артиновым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из предложения 1.6 и леммы 1.5 (1).

(2) следует из предложения 1.6.

(3) Согласно (1) A – наследственное справа кольцо. По лемме 1.7 (5) ${}_A A/B$ – артинов модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как условие (3) симметрично, то достаточно доказать (2) $\iff$ (3). Импликация (3) $\implies$ (2) очевидна.

(2) $\implies$ (3). По лемме 1.7 (4) можно без ограничения общности считать, что A – первичное кольцо. По лемме 1.2 (3) A несингулярно слева. По лемме 1.7 (3) A – полунаследственное кольцо. Так как A – нётерово справа полунаследственное справа кольцо, то A наследственно справа. Наследственное справа полусовершенное первичное кольцо A является по лемме 1.3 (2) полуцепным справа. Пусть $M \equiv J(A)$, $B \equiv \bigcap_{n=1} M^n$. Можно считать, что $M \neq 0$. Так как A – нётерово справа кольцо, то по лемме Накаямы $M^n \neq M^{n+1}$ для любого n . Поэтому A/B не является артиновым слева кольцом. Допустим, что $B \neq 0$. Так как A – первичное кольцо, то его ненулевой идеал B является существенным левым идеалом. По лемме 1.7 (5) ${}_A A/B$ – артинов модуль. Тогда

A/B – артиново слева кольцо; получено противоречие. Поэтому $B = 0$. Так как по лемме 1.7 (1) A/B – нётерово слева кольцо, то A – нётерово слева кольцо. Нётерово слева полунаследственное слева кольцо A является наследственным слева кольцом.

2. Доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 2.1 [10, лемма 3]. Для модуля M_A равносильны условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) для любых элементов m и n из M существуют элементы a, b, c, d кольца A такие, что $1 = a + b$, $ta = nc$, $nb = td$.

ЛЕММА 2.2. Пусть Q – правое кольцо частных кольца A относительно правого множества Оре T в A . Тогда

- (1) если M – правый идеал в A такой, что M_A – дистрибутивный (цепной) модуль, то MQ_Q – дистрибутивный (цепной) модуль;
- (2) если единица кольца A является суммой ненулевых идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ таких, что все $e_i A$ – дистрибутивные (цепные, равномерные) правые A -модули, то все $e_i Q$ – дистрибутивные (цепные, равномерные) правые модули над кольцом Q ;
- (3) если A – полудистрибутивное справа (полуцепное справа, полуравномерное справа) кольцо, то Q – полудистрибутивное справа (полуцепное справа, полуравномерное справа) кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть q_1 и q_2 – любые ненулевые элементы из MQ . Существуют ненулевые элементы $m_1, m_2 \in M$ и $t \in T$ такие, что $q_i = m_i t^{-1}$ ($i = 1, 2$).

Допустим, что M_A дистрибутивен. По лемме 2.1 существуют $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ такие, что $1 = a_1 + a_2$, $m_1 a_1 = m_2 b_2$ и $m_2 a_2 = m_1 b_1$. Тогда $1 = ta_1 t^{-1} + ta_2 t^{-1}$, $q_1 (ta_1 t^{-1}) = m_1 a_1 t^{-1} = m_2 b_2 t^{-1} = q_2 (tb_2 t^{-1})$ и $q_2 (ta_2 t^{-1}) = m_2 a_2 t^{-1} = m_1 b_1 t^{-1} = q_1 (tb_1 t^{-1})$. По лемме 2.1 MQ_Q дистрибутивен.

Допустим, что M_A равномерен. Тогда существуют $a_1, a_2 \in A$ такие, что $0 \neq m_1 a_1 = m_2 a_2$. Поэтому $0 \neq m_1 a_1 t^{-1} = m_2 a_2 t^{-1} = q_1 (ta_1 t^{-1}) = q_2 (tb_2 t^{-1})$. Тогда MQ_Q равномерен.

Допустим, что M_A – цепной модуль и $q_2 \in MQ \setminus q_1 Q$. Так как $q_2 \in MQ \setminus q_1 Q$, то $m_2 \in M \setminus m_1 A$. Поскольку M_A – цепной модуль, существует $a \in A$ такое, что $m_1 = m_2 a$. Тогда $q_2 (tat^{-1}) = m_2 at^{-1} = m_1 t^{-1} = q_1$. Поэтому MQ_Q – цепной модуль.

(2) и (3) следуют из (1).

ЛЕММА 2.3. Пусть единица кольца A является суммой ненулевых идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ таких, что все Ae_i – равномерные левые идеалы кольца A и все $e_i A$ – равномерные правые идеалы кольца A ; L_{ij} – множество всех элементов $e_i a e_j$ из $e_i A e_j$ таких, что $(e_i a e_j)(e_j b) = 0$ для некоторого e_k и некоторого ненулевого элемента $e_j b$ в $e_j A$; R_{ij} – множество всех элементов $e_i a e_j$ из $e_i A e_j$ таких, что $(A e_i)(e_i a e_j) = 0$ для некоторого ненулевого элемента $s e_i$ в $A e_i$; и $T_{ij} \equiv e_i A e_j \setminus (L_{ij} \cup R_{ij})$. Тогда

- (1) L_{ij} и R_{ij} – левые $e_i A e_i$ -модули и правые $e_j A e_j$ -модули;
- (2) если $(e_i v e_j)(e_j w e_i) \in T_{ii}$, то $e_i v e_j \in T_{ij}$ и $e_j w e_i \in T_{ji}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $0 \neq e_i x e_i \in e_i A e_i$, $0 \in e_j y e_j \in e_j A e_j$, $e_i a e_j \in L_{ij}$ и $(e_i a e_j)(e_j b) = 0$ для некоторого ненулевого $e_j b$ в $e_j A$. Тогда $(e_i x e_i)(e_i a e_j)(e_j b) = 0$, откуда $(e_i A e_i)L_{ij} \subseteq L_{ij}$. Так как $e_j A$ – равномерный правый идеал в A , то $e_j b A \cap e_j y e_j A \neq 0$. Таким образом, существует ненулевой элемент $e_j c \in e_j A$ такой, что $0 \neq (e_j y e_j)(e_j c) \in e_j b A$. Тогда $(e_i a e_j)(e_j y e_j)(e_j c) = 0$, откуда $(e_i a e_j)(e_j y e_j) \in L_{ij}$. Поэтому $L_{ij}(e_j A e_j) \subseteq L_{ij}$. Аналогично, $e_i A e_j L_{ij}(e_j A e_j) \subseteq L_{ij}$.

(2) Докажем, что $e_i v e_j \in T_{ij}$. Предположим противное. Тогда либо $e_i v e_j \in L_{ij}$, либо $e_i v e_j \in R_{ij}$. Допустим, что $e_i v e_j \in L_{ij}$. Тогда $(e_i v e_j)(e_j b) = 0$ для некоторого ненулевого $e_j b$ из $e_j A$. Так как $(e_i v e_j)(e_j w e_i) \in T_{ii}$, то $e_j w e_i \neq 0$. Поскольку $e_j A$ – равномерный правый идеал в A , то $e_j b A \cap e_j w e_i A \neq 0$. Поэтому существует ненулевой элемент $e_i c \in e_i A$ такой, что $0 \neq (e_j w e_i)(e_i c) \in e_j b A$. Тогда $(e_i v e_j)(e_j w e_i)(e_i c) = 0$, откуда $(e_i v e_j)(e_j w e_i) \in L_{ii}$; получено противоречие с включением $(e_i v e_j)(e_j w e_i) \in T_{ii}$. Аналогично, невозможно включение $e_i v e_j \in R_{ij}$. Поэтому $e_i v e_j \in T_{ij}$. Включение $e_j w e_i \in T_{ji}$ доказывается аналогично.

ЛЕММА 2.4. (1) Если M_A – дистрибутивный правый модуль над совершенным справа (слева) кольцом A , то M – нётеров (артинов) модуль.

(2) Если A – полудистрибутивное справа совершенное справа или слева кольцо, то A – артиново справа кольцо.

(3) Пусть единица кольца A является суммой ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ таких, что все $e_i A e_i$ – совершенные справа или слева кольца, причем все $e_j A e_i$ – дистрибутивные правые $e_i A e_i$ -модули. Тогда A – артиново справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [11].

(2) Так как конечная прямая сумма нётеровых (артиновых) модулей – нётеров (артинов) модуль, то согласно (1) A – либо нётерово справа совершенное справа кольцо, либо артиново справа кольцо. Заметим, что любое нётерово справа совершенное справа кольцо является артиновым справа.

(3) Обозначим через R унитарное подкольцо $e_1 A e_1 \times \dots \times e_n A e_n$ кольца A . Согласно (2) все кольца $e_i A e_i$ артиновы справа. Поэтому R артиново справа. В силу (1) все $e_j A e_i$ – артиновы правые $e_i A e_i$ -модули. Поэтому все $e_j A e_i$ – артиновы правые R -модули. Следовательно, A – артинов правый модуль над его унитарным подкольцом R . Значит, A – артиново справа кольцо.

ЛЕММА 2.5. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы полуцепного кольца A в сумму локальных ортогональных идемпотентов e_i . Сопоставим каждому элементу $a \in A$ матрицу $M(a) = (e_i a e_j)$. Тогда

- (1) $M(ab) = M(a) \cdot M(b)$ для всех $a, b \in A$;
- (2) для каждого элемента $a \in A$ существуют обратимые элементы $u, v \in A$ такие, что все строки и столбцы матрицы $M(uav)$ содержат не более одного ненулевого элемента;
- (3) для каждого элемента $a \in A$ существуют обратимые элементы $u, v \in A$ и натуральное число m такие, что $(uav)^m = e_1(uav)e_1 + \dots + e_m(uav)e_m$ (т.е. $M((uav)^m)$ – диагональная матрица).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно.

(2) является частным случаем леммы 3 из [12].

(3) В силу (2) существуют обратимые элементы $u, v \in A$ такие, что все строки и столбцы матрицы $M(uav)$ содержат не более одного ненулевого элемента. Определим перестановку π на множестве $N \equiv \{1, \dots, n\}$. Если для $i \in N$ существует $j \in N$ такое, что $e_i(uav)e_j \neq 0$, то полагаем $\pi(i) = j$. Если $i \in N$, причем $e_i(uav)e_j = 0$ для всех $j \in N$, то полагаем $\pi(i) = 2^{i+n}$. Существует m такое, что π^m – тождественная перестановка. Тогда $M((uav)^m)$ – диагональная матрица. Поэтому $(uav)^m = e_1(uav)e_1 + \dots + e_m(uav)e_m$.

ЛЕММА 2.6. Пусть A – цепное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов. Тогда

- (1) A – кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов;
- (2) A имеет цепное артиново классическое кольцо частных Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N и N^* – множества всех левых делителей нуля и всех правых делителей нуля в A соответственно. Так как A – равномерное кольцо, то N и N^* совпадают с правым сингулярным идеалом $\text{Sing}(A_A)$ и левым сингулярным идеалом $\text{Sing}({}_A A)$ кольца A соответственно, откуда N и N^* – вполне первичные идеалы в A . Так как A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то по лемме 1.2 (4) правый сингулярный идеал N нильпотентен. Цепная область A/N является порядком в теле Q . Без ограничения общности можно считать, что N – ненулевой идеал.

(1) Допустим противное. Тогда A имеет бесконечную убывающую цепь $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ правых идеалов B_i такую, что $l(B_1) \subset l(B_2) \subset \dots$ – бесконечная возрастающая цепь левых аннуляторов. Так как N содержит все левые делители нуля в A , то $l(B_i) \subseteq N$ для всех i . Поскольку N – ненулевой нильпотентный идеал и A – цепное слева кольцо, существует натуральное число n такое, что $N^{n+1} \subset l(B_i) \subset l(B_{i+1}) \subset N^n$, где все включения являются строгими. Пусть $a \in l(B_{i+1}) \setminus l(B_i)$. Тогда $aB_{i+1} = 0$ и $aB_i \neq 0$. Так как A – цепное слева кольцо и $l(B_i) \subset Aa$, существует левый идеал D в A такой, что $l(B_i) = Da$. Если $D \subseteq N$, то $l(B_i) \subseteq DN^n \subseteq N^{n+1}$; получено противоречие. Поэтому D строго содержит N . Пусть $d \in D \setminus N$. Тогда $r(d) = 0$ и $daB_i = 0$. Поэтому $aB_i = 0$; получено противоречие.

(2) Так как согласно (1) A – кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов, то по лемме 1.2 (4) левый сингулярный идеал N^* нильпотентен. Поскольку N и N^* – вполне первичные нильпотентные идеалы, то $N = N^*$. Поэтому $A \setminus N$ совпадает с множеством T всех регулярных элементов из A . Кроме того, A – цепное кольцо. Тогда A имеет классическое кольцо частных Q , являющееся по лемме 2.2 (1) цепным кольцом. Пусть $t \in A \setminus N$. Так как A – цепное кольцо и N – вполне первичный идеал, то $N = tN = Nt$, откуда $t^{-1}N = N = Nt^{-1}$. Поэтому $N = NQ = QN$ – нильпотентный идеал в кольце Q и все элементы из $Q \setminus N$ обратимы в Q . Следовательно, Q – цепное полупримарное кольцо. Тогда Q – артиново кольцо.

ЛЕММА 2.7. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы полуцепного кольца A в сумму локальных ортогональных идемпотентов e_i , T_i – множество всех регулярных элементов в кольце $e_i A e_i$, T – множество всех элементов t в A вида $t = t_1 + \dots + t_n$, где $t_i \in T_i$. Тогда

- (1) T – множество Оре в A , кольцо частных Q кольца A относительно T является полуцепным кольцом, все $e_i Q$ – цепные Q -модули, все e_i – локальные идемпотенты в Q , все $e_i A e_i$ и $e_i Q e_i$ – цепные кольца, $e_i T e_i = T_i$ –

- множество Оре в $e_i A e_i$, $e_i Q e_i$ – классическое кольцо частных кольца $e_i A e_i$ и $e_i Q e_i$ – кольцо частных кольца $e_i A e_i$ относительно $e_i T e_i$ для любого i ;
- (2) полуцепное кольцо частных Q кольца A относительно множества T является классическим кольцом частных $Q_{\text{cl}}(A)$ кольца A ;
- (3) если каждое кольцо $e_i A e_i$ является либо кольцом с условием максимальности для правых аннуляторов, либо кольцом с условием максимальности для левых аннуляторов, то A имеет артиново полуцепное классическое кольцо частных $Q_{\text{cl}}(A)$, совпадающее с кольцом частных Q относительно множества T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 2.2 (3) достаточно доказать, что T – множество Оре . Пусть L_{ij} – множество всех элементов $e_i a e_j$ из $e_i A e_j$ таких, что $(e_i a e_j)(e_j b e_k) = 0$ для некоторого e_k и некоторого ненулевого $e_j b e_k$ из $e_j A e_k$; R_{ij} – множество всех элементов $e_i a e_j$ из $e_i A e_j$ таких, что $(e_m c e_i)(e_i a e_j) = 0$ для некоторого e_m и некоторого ненулевого элемента $e_m c e_i$ из $e_m A e_i$; $T_{ij} \equiv e_i A e_j \setminus (L_{ij} \cup R_{ij})$.

Пусть $a \in A$, $t \in T$. Докажем, что для любых i и j существует элемент $e_j u(i, j) e_j \in T_{jj}$ такой, что $(e_i a e_j)(e_j u(i, j) e_j) \in e_i t e_i A$. Так как $e_i A$ – цепной правый A -модуль, то либо $e_i a e_j \in e_i t e_i A$, либо $e_i t e_i \in e_i a e_j A$. Если $e_i a e_j \in e_i t e_i A$, то $(e_i a e_j) e_j \in e_i t e_i A$, $e_j \in T_{jj}$, и можно положить $e_j u(i, j) e_j \equiv e_j$. Допустим, что $e_i t e_i = (e_i a e_j) b \in e_i a e_j A$, где $b \in A$. Тогда $e_i t e_i = (e_i a e_j)(e_j b e_i)$. По лемме 2.3 (2) $e_i a e_j \in T_{ij}$ и $e_j b e_i \in T_{ji}$. Поэтому $(e_j b e_i)(e_i a e_j) \in T_{jj}$. Кроме того, $(e_i a e_j)[(e_j b e_i)(e_i a e_j)] = (e_i t e_i)(e_i a e_j)$, значит можно положить $e_j u(i, j) e_j \equiv (e_j b e_i)(e_i a e_j)$.

Так как $e_j A$ – цепной A -модуль, то конечное множество $\{e_j u(i, j) e_j A\}_{i=1}^n$ имеет минимальный элемент, который обозначим через u_j . Тогда $u_j = e_j u_j e_j$ и $(e_i a e_j) u(j) \in (e_i t e_i) A$ при $i = 1, \dots, n$. Пусть $u = u_1 + \dots + u_n \in T$. Тогда $au \in tA$. Поэтому T – правое множество Оре .

Аналогично, T является левым множеством Оре . Поэтому кольцо частных Q кольца A относительно T существует. По лемме 2.2 (3) Q – полуцепное кольцо. По лемме 2.2 (2) все $e_i Q$ – цепные Q -модули, откуда e_i – локальные идемпотенты в Q . По лемме 1.7 (2) все кольца $e_i A e_i$ и $e_i Q e_i$ цепные. Оставшиеся утверждения проверяются непосредственно.

(2) Пусть R – множество всех регулярных элементов кольца A , $r \in R$ и $a \in A$. По лемме 2.5 (3) существуют натуральное число m и обратимые элементы u и v кольца A такие, что $(urv)^m = e_1(urv)e_1 + \dots + e_m(urv)e_m$. Тогда $(urv)^m \in T$ и $e_i(urv)e_i \in T_i$ для любого i . Согласно (1) T – правое множество Оре . Для элементов $ua \in A$ и $(urv)^m \in T$ существуют элементы $b \in A$ и $x \in T$ такие, что $uax = (urv)^m b$, откуда $ax = r(v(urv)^{m-1}b)$. Поэтому R – правое множество Оре . Аналогично, R – левое множество Оре . Следовательно, классическое кольцо частных $Q_{\text{cl}}(A)$ кольца A существует. По лемме 2.2 (3) $Q_{\text{cl}}(A)$ – полуцепное кольцо.

Полуцепное кольцо частных Q содержится в $Q_{\text{cl}}(A)$. Чтобы доказать равенство $Q = Q_{\text{cl}}(A)$, достаточно доказать, что любой регулярный элемент q кольца Q обратим в Q . Так как Q – полуцепное кольцо, по лемме 2.5 (3) существуют натуральное число k и обратимые элементы x, y кольца Q такие, что $(xqu)^k = e_1(xqu)e_1 + \dots + e_k(xqu)e_k$. Все $e_i(xqu)e_i$ – регулярные элементы в $e_i Q e_i$. Согласно (1) $e_i Q e_i$ – классическое кольцо частных кольца $e_i A e_i$, откуда элементы $e_i(xqu)e_i$ обратимы в $e_i Q e_i$. Поэтому $(xqu)^k$ обратимо в Q . Кроме того, x и y обратимы в Q . Тогда q обратимо в Q .

(3) Согласно (1) все $e_i A e_i$ – цепные кольца и $e_i Q e_i$ – классическое кольцо частных кольца $e_i A e_i$ для любого i . По лемме 2.6 (2) все кольца $e_i Q e_i$ являются артиновыми. По лемме 1.7 (2) все $e_j Q e_i$ – цепные правые $e_i Q e_i$ -модули и цепные левые $e_j Q e_j$ -модули. По лемме 2.4 (3) Q – артиново кольцо. Оставшиеся утверждения следуют из (2).

Теорема 2 следует из леммы 2.7 (3).

3. Доказательство теоремы 3.

ЛЕММА 3.1. Пусть Q – конечнопорожденный проективный правый модуль над полуцепным кольцом A .

(1) Пусть R – любой ненулевой конечнопорожденный подмодуль в Q и $h: Q \rightarrow Q/R$ – естественный эпиморфизм. Тогда существуют прямое разложение $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ и натуральное число $m \leq n$ такие, что $R = R \cap Q_1 \oplus \cdots \oplus R \cap Q_m$ – существенный подмодуль в $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$, $R \cap Q_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq m$), $h(\bigoplus_{i=1}^m Q_i) \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i / (R \cap Q_i)$ – сингулярный модуль и $Q/R = P \oplus h(\bigoplus_{i=1}^m Q_i)$, где P – полуцепной проективный конечнопорожденный модуль такой, что $Q = P \oplus (\bigoplus_{i=1}^m Q_i)$, и $h(P) \cong P$ – полуцепной проективный конечнопорожденный подмодуль в Q/R . Кроме того, либо $m = n$ и $P = 0$, либо $m < n$ и $P = Q_{m+1} \oplus \cdots \oplus Q_n$.

(2) Если S – подмодуль в Q , то $Q/S = T + U$, где T – сингулярный конечнопорожденный модуль, U – полуцепной проективный конечнопорожденный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По теореме 25.3.3 из [7] существуют прямое разложение $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ и натуральное число $m \leq n$ такие, что $R = R \cap Q_1 \oplus \cdots \oplus R \cap Q_m$, $R_i \equiv R \cap Q_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, m$. Так как ненулевые подмодули R_i цепных модулей Q_i являются существенными в Q_i , то $R = R \cap Q_1 \oplus \cdots \oplus R \cap Q_m$ – существенный подмодуль в $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$. Поэтому $h(\bigoplus_{i=1}^m Q_i) \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i / R_i$ – сингулярный модуль. Если $m = n$, то оставшиеся утверждения очевидны. Пусть $m < n$ и $P \equiv Q_{m+1} \oplus \cdots \oplus Q_n$. Тогда P – конечнопорожденный проективный модуль, $Q = P \oplus (\bigoplus_{i=1}^m Q_i)$ и $Q/R = P \oplus h(\bigoplus_{i=1}^m Q_i)$. Так как $P \cap \text{Ker}(h) \subseteq P \cap (Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m) = 0$, то $h(P) \cong P$ – конечнопорожденный проективный подмодуль в Q/R . Модуль P изоморфен прямой сумме локальных модулей над цепным кольцом A . Поэтому P полуцепной.

(2) Так как Q – конечномерный модуль, то S – существенное расширение конечнопорожденного модуля R . Пусть $h: Q \rightarrow Q/R$ – естественный эпиморфизм. Тогда $h(S)$ – сингулярный модуль. Без ограничения общности можно считать, что модуль Q/R не является сингулярным. Согласно (1) существуют прямое разложение $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ и натуральное число $m < n$ такие, что R – существенный подмодуль в $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$, $h(Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m) \equiv T_1$ – сингулярный конечнопорожденный модуль и $Q/R = P \oplus T_1$, где $P \equiv Q_{m+1} \oplus \cdots \oplus Q_n$ – полуцепной проективный конечнопорожденный модуль такой, что $P \cong h(P) \subseteq Q/R$. Пусть $w: Q \rightarrow Q/S$ – естественный эпиморфизм. Так как $P \cap R = 0$ и S – существенное расширение для R , то $P \cap S = 0$. Поэтому $P \cong w(P) \subseteq Q/S$. Пусть $T \equiv w(Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m)$, $U \equiv w(P)$. Тогда $Q/S = T + U$, где U – полуцепной проективный конечнопорожденный модуль. Так как T – гомоморфный образ сингулярного конечнопорожденного модуля $h(S) + T_1$, то T – сингулярный конечнопорожденный модуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Каждый конечнопорожденный модуль над полуцепным кольцом является суммой (необязательно прямой) сингулярного конечнопорожденного модуля и полуцепного проективного конечнопорожденного модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение следует из леммы 3.1 (2) и того, что каждый конечнопорожденный модуль изоморфен фактормодулю конечнопорожденного свободно-го модуля.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть A – полуцепное кольцо. Тогда

- (1) каждый конечнопорожденный несингулярный A -модуль является полуцепным проективным модулем [5];
- (2) каждый неразложимый конечнопорожденный несингулярный A -модуль является цепным проективным циклическим модулем;
- (3) каждый равномерный несингулярный A -модуль M является цепным модулем и, следовательно, все неразложимые инъективные несингулярные A -модули являются цепными модулями [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из предложения 3.2; (2) следует из (1); (3) следует из (2).

ЛЕММА 3.4. Пусть A – кольцо и M – правый A -модуль, не являющийся сингулярным модулем. Тогда M содержит изоморфную копию некоторого ненулевого правого идеала кольца A .

Кроме того, если A – конечномерное справа кольцо, то M содержит изоморфную копию ненулевого равномерного правого идеала кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению существует ненулевой элемент $m \in M$ такой, что правый идеал $r(m)$ кольца A не является существенным. Пусть $h: A_A \rightarrow mA$ – естественный эпиморфизм и B – ненулевой правый идеал кольца A такой, что $B \cap r(m) = 0$. Так как $B \cap \text{Ker}(h) = 0$, то модуль B_A изоморфен ненулевому подмодулю $h(B)$ модуля M . Если A конечномерно справа, то B содержит ненулевой равномерный правый идеал C , значит M содержит $h(C)$.

ЛЕММА 3.5. Пусть A – конечномерное справа кольцо. Тогда

- (1) все прямые суммы несингулярных инъективных правых A -модулей инъективны;
- (2) каждый несингулярный инъективный правый A -модуль M является прямой суммой равномерных инъективных модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $M_A = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где все M_i – несингулярные инъективные модули и $f: B_A \rightarrow M$ – гомоморфизм из правого идеала B кольца A . Так как A конечномерно справа, то B_A – существенное расширение конечнопорожденного правого идеала C кольца A . Существует конечное подмножество F множества индексов I такое, что конечнопорожденный подмодуль $f(C)$ модуля M содержится в $\bigoplus_{i \in F} M_i \equiv N$. Так как N – конечная прямая сумма инъективных модулей, то N инъективен. Поэтому ограничение f на C продолжается до гомоморфизма $g: A_A \rightarrow N \subseteq M$. Так как $(f - g)(C) = 0$ и B_A – существенное расширение модуля C , то $(f - g)(B)$ – сингулярный модуль. Кроме того, $(f - g)(B)$ – подмодуль несингулярного модуля M . Поэтому $(f - g)(B) = 0$. Тогда g – продолжение f , откуда модуль M инъективен.

(2) По лемме 3.4 каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевой равномерный подмодуль. Поэтому любое ненулевое прямое слагаемое инъективного модуля M имеет ненулевое равномерное инъективное прямое слагаемое. По лемме Цорна M является существенным расширением прямой суммы N равномерных инъективных

модулей N_i ($i \in I$). Согласно (1) модуль N инъективен. Так как N – существенное прямое слагаемое модуля M , то $M = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Первое утверждение следует из предложения 3.2. Тот факт, что каждый несингулярный инъективный правый модуль над полупростым кольцом является полупростым модулем, следует из леммы 3.5 (2) и следствия 3.3 (3). Пусть N – произвольный несингулярный A -модуль. По следствию 3.3 (1) все конечно порожденные подмодули модуля N являются проективными и, в частности, плоскими модулями. Тогда N – плоский модуль (см. [14, 39.12]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Singh S. Serial right Noetherian rings // Canad. J. Math. 1984. V. 36. № 1. P. 22–37.
- [2] Туганбаев А.А. Дистрибутивные кольца и модули // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 2. С. 115–123.
- [3] Warfield R. B. Bezout rings and serial rings // Comm. Algebra. 1979. V. 7. P. 533–545.
- [4] Dubrovin N. I. The rational closure of group rings of left-ordered groups. Gerhard Mercator Universität Duisburg Gesamthochschule, 1994.
- [5] Warfield R. B. Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra. 1975. V. 37. № 3. P. 187–222.
- [6] Goodearl K. R. Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules. New York–Basel: Marcel Dekker, 1976.
- [7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [8] Small L. W. Semihereditary rings // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 5. P. 656–658.
- [9] Chatters A. W. The restricted minimum condition in Noetherian hereditary rings // J. London Math. Soc. 1971. V. 4. P. 83–87.
- [10] Туганбаев А.А. Дистрибутивные справа или слева кольца // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 4. С. 604–627.
- [11] Туганбаев А.А. Кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой дистрибутивных модулей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1980. № 1. С. 61–64.
- [12] Дрозд Ю.А. Об обобщенно однорядных кольцах // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 5. С. 707–710.
- [13] Upham M. H. Serial rings with right Krull dimension one // J. Algebra. 1987. V. 109. P. 319–333.
- [14] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@tuganbaev.mcsme.ru

Поступило
28.04.98
Исправленный вариант
15.07.98