Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шаповалов, Инвариант глубины для групповых действий на счетных фазовых пространствах, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 893–907

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:54:16

УДК 517.938.5

ИНВАРИАНТ ГЛУБИНЫ ДЛЯ ГРУППОВЫХ ДЕЙСТВИЙ НА СЧЕТНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. А. Шаповалов

Исследованная ранее автором для случая действия группы $\mathbb{Z}$ конструкция глубины счетной символической системы обобщается на случай действия произвольной конечнопорожденной абелевой группы. Изучается новое свойство, названное однородностью глубины. Глубина является топологическим инвариантом счетных символических систем, принимающим значение в множестве не более чем счетных ординальных чисел. В работе описываются множество возможных значений инварианта глубины и метод построения динамических систем с произвольным допустимым значением глубины.

Библиография: 6 названий.

В этой статье обобщается исследованная автором в работе [1] конструкция топологического инварианта глубины динамической системы на случай действия счетных конечнопорожденных абелевых групп. Приводится доказательство теоремы о множестве ординалов, которые могут быть значениями глубины счетных символических систем.

Идея указанного инварианта навеяна конструкцией центра динамической системы, приведенной Биркгофом в [2], а также результатом А. Г. Майера, построившего в [3] примеры динамических систем в $\mathbb{R}^3$ с произвольным счетным ординалом в качестве глубины центра (изложение результатов Майера см. также в книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [4]).

Существуют различные модификации понятия глубины центра. Описание их конструкции и связи между ними можно найти, например, в работе Д. Неймана [5]. Тем не менее, введенный в [1] и изучаемый в настоящей статье инвариант глубины является новым. (Во избежание недоразумений, связанных с терминологией, заметим, что если C – центр некоторой динамической системы, то ее глубина центра и глубина C , вообще говоря, разные понятия.)

В работе [6] Д. В. Аносов высказал замечание о том, что при изучении глубины центра (и родственных инвариантов) решающую роль играет рассмотрение счетных замкнутых инвариантных подмножеств бернуллиевского топологического каскада. Исходя из этого соображения, мы будем рассматривать лишь символические динамические системы со счетными замкнутыми инвариантными фазовыми пространствами.

1. Определения, обозначения, основные понятия. Пусть G – конечнопорожденная абелева группа бесконечного порядка и A – конечный алфавит; для простоты будем считать, что $A = \{0, 1\}$. Определим на A операцию сложения:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

Рассмотрим $\Omega = \Omega(G, A) = \{x \mid x: G \rightarrow A\}$ – пространство всех отображений из G в A . Элементы $x \in \Omega$ будем называть *конфигурациями на G со значениями в A* . Фазовыми пространствами всех рассматриваемых нами в этой работе символических систем будут служить счетные подмножества в Ω .

Введем на пространстве Ω тихоновскую топологию покоординатной сходимости: $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, $x_n \in \Omega$, $x_0 \in \Omega$, если для каждого конечного подмножества $G_0 \subset G$ найдется число N такое, что при всех $n > N$ и всех $g \in G_0$ выполнено равенство $x_n(g) = x_0(g)$. Указанная топология метризуема; кроме того, Ω является метрическим компактом.

Зафиксируем некоторую систему образующих C группы G . Назовем *графом Кэли группы G* , соответствующим системе C , неориентированный граф $\Gamma = \Gamma(G, C)$, вершинами которого служат элементы группы G , причем вершины g и h соединены ребром тогда и только тогда, когда найдется элемент $c \in C$ такой, что $g = ch$ или $g = c^{-1}h$.

Введем следующие обозначения: $d: G \rightarrow \mathbb{Z}^+$ – целочисленная функция на G , значение которой $d(g)$ равно длине кратчайшего пути, состоящего из ребер графа Γ и соединяющего e и g как вершины этого графа (e – единица группы G); $p: G \times G \rightarrow \mathbb{Z}^+$ – метрика на G , порожденная функцией d , т.е. $p(g, h) = d(gh^{-1})$ – длина кратчайшего пути, соединяющего g и h как вершины графа Γ .

В дальнейшем нам потребуются определение операции сложения для конфигураций: $(x + y)(g) = x(g) + y(g)$.

Рассмотрим действие T группы G на пространстве Ω , задаваемое формулой

$$(T_g x)(h) = x(g^{-1}h).$$

Нас интересуют символические динамические системы (M, T) , полученные ограничением действия T на непустые не более чем счетные замкнутые T -инвариантные подмножества M пространства Ω . Обозначим через $\Sigma = \Sigma(G, A) \subset \Omega(G, A)$ класс фазовых пространств M всех динамических систем (M, T) описанного вида.

Две динамические системы (M_1, T) и (M_2, T) с фазовыми пространствами из Σ называются (*топологически*) *сопряженными*, если найдется гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, коммутирующий с действием T , т.е. такой, что при всех $g \in G$ выполнено $hT_g = T_g h$.

В следующем пункте мы строим отображение из класса $\Sigma(G, A)$ в множество не более чем счетных ординалов, инвариантное относительно топологической сопряженности. Это отображение назовем *глубиной*. Мы докажем, что всякое непредельное (и только непредельное) ординальное число может быть глубиной некоторой динамической системы. Приводится явное построение, при помощи которого можно предъявить примеры динамических систем с любой возможной глубиной.

2. Глубина относительно взятия множества предельных точек. Пусть M – некоторое непустое не более чем счетное замкнутое множество в топологическом пространстве (X, τ) . Обозначим через M' множество его предельных точек. Полученное множество M' замкнуто. Рассмотрев совокупность всех предельных точек в M' , получим множество M'' . Последовательно применяя процедуру удаления изолированных точек, индуктивно определим множества

$$M^{(0)} := M, \quad M^{(1)} := M', \quad M^{(2)} := M^{(1)'}, \quad \dots, \quad M^{(n)} := M^{(n-1)'}$$

Продолжим этот процесс на счетные трансфинитные числа. Пересечение множеств $M^{(n)}$ по всем конечным n непусто (как пересечение счетной системы убывающих компактов). Положим

$$M^{(\omega)} := \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} M^{(n)} \right)'.$$

В общем случае для не более чем счетного ординала α определение α -го производного множества выглядит следующим образом:

$$M^{(\alpha)} := \left(\bigcap_{\beta < \alpha} M^{(\beta)} \right)'.$$

В результате получаем цепочку убывающих не более чем счетных множеств:

$$M^{(0)} \supset M^{(1)} \supset \dots \supset M^{(\omega)} \supset \dots \supset M^{(\alpha)} \supset M^{(\alpha+1)} \supset \dots,$$

причем для непустых $M^{(\alpha)}$ включения $M^{(\alpha)} \supset M^{(\alpha+1)}$ строгие, так как в этом случае $M^{(\alpha)}$ имеет изолированные точки. Согласно теореме Кантора о несчетности множества всех не более чем счетных ординалов процесс оборвется на некотором шаге α не выше счетного трансфинитного числа, т.е. $M^{(\alpha)}$ окажется пустым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Минимальное ординальное число α со свойством $M^{(\alpha)} = \emptyset$ называется *глубиной множества* $M \subset X$ (относительно топологии τ на пространстве X) и обозначается через $\text{depth}(M)$:

$$\text{depth}(M) := \min\{\alpha \mid M^{(\alpha)} = \emptyset\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Глубиной динамической системы (M, T) , где M – некоторое не более чем счетное замкнутое T -инвариантное подмножество $\Omega(G, A)$, называется глубина ее фазового пространства M относительно тихоновской топологии на Ω .

Заметим, что операция взятия производного множества переводит Σ в Σ . Действительно, замкнутость и T -инвариантность фазового пространства сохраняются при переходе к множеству его предельных точек.

В работе [4] рассматривались символические динамические системы, фазовыми пространствами которых служат счетные замкнутые инвариантные относительно сдвига множества последовательностей из 0 и 1. Было доказано, что произвольное непредельное не более чем счетное ординальное число может быть реализовано как глубина некоторой системы такого вида. Основываясь на этом результате, можно без труда построить примеры систем (M, T) , фазовые пространства которых M лежат в классе $\Sigma(G, A)$ с произвольными не более чем счетными глубинами (за исключением предельных ординалов). Действительно, сопоставим каждой счетной символической системе из $\Sigma(\mathbb{Z}, A)$ систему той же глубины из $\Sigma(G, A)$. В наиболее наглядном случае $G = \mathbb{Z}^2$ один из

возможных способов трансформации последовательностей элементов из A в “многомерные” конфигурации приведен в следующей таблице:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
 & & & & & \downarrow & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

В общем случае достаточно зафиксировать некоторую систему образующих C группы G , выбрать образующий элемент $c \in C$ бесконечного порядка и перевести “одномерные” системы в “многомерные” при помощи отображения $\theta_c: \Omega(\mathbb{Z}, A) \rightarrow \Omega(G, A)$, задаваемого формулой $\theta_c(x) = y$, где $y(g) = x_i$, если c входит i раз в разложение g на образующие. Очевидно, что отображения θ_c сохраняют глубины множеств из $\Sigma(\mathbb{Z}, A)$.

Однако во всех полученных подобным образом системах глубина “неоднородно распределена” по разным направлениям. Точнее говоря, при ограничении M на различные бесконечные циклические подгруппы группы G получающиеся подсистемы обладают разной глубиной. Нас же интересуют лишь системы, у которых совпадают глубины “по всем направлениям”. Сформулируем указанное свойство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что динамическая система (M, T) с фазовым пространством $M \in \Sigma(G, A)$ обладает свойством *однородности глубины*, если для каждого бесконечного подмножества G_0 группы G глубина множества $\{x|_{G_0} \mid x \in M\}$ (снабженного тихоновской топологией) совпадает с глубиной системы (M, T) .

Обозначим через $\tilde{\Sigma}(G, A)$ класс тех фазовых пространств M из $\Sigma(G, A)$, для которых глубина динамических систем (M, T) однородна.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с динамическими системами, глубина которых однородна.

Рассмотрим множество всех не более чем счетных ординалов, которые могут быть глубинами динамических систем с таким свойством. Его структуру полностью описывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА. 1) Для каждой бесконечной конечнопорожденной абелевой группы G и каждого непереломного не более чем счетного ординала α найдется замкнутое не более чем счетное T -инвариантное множество $M \in \tilde{\Sigma}(G, A)$, глубина которого однородна и равна α .

2) Замкнутых T -инвариантных счетных множеств $M \in \Sigma(G, A)$, глубина которых была бы предельным трансфинитным числом, не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую систему образующих $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ группы G .

1) Рассмотрим класс $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(G, A) \subset \tilde{\Sigma}(G, A)$ фазовых пространств $M \subset \Omega(G, A)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) M – не более чем счетное замкнутое T -инвариантное подмножество пространства $\Omega(G, A)$;

- б) система (M, T) обладает свойством однородности глубины;
- в) все конфигурации из M имеют конечные носители (под носителем мы понимаем множество $\text{supp}(x) := \{g \in G \mid x(g) = 1\}$);
- г) если конфигурация x принадлежит M и $\text{supp}(x) = \{g_1, \dots, g_n\}$, то для любого $i = 1, \dots, n$ конфигурация x' , у которой $\text{supp}(x') = \{g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n\}$, принадлежит M' .

Докажем, что каждый непрелдельный счетный ординал может быть реализован как глубина некоторой динамической системы (M, T) с фазовым пространством M из $\widehat{\Sigma}(G, A)$. Тем самым, будет обосновано утверждение 1) теоремы.

Рассуждения будем вести трансфинитной индукцией по глубине конструируемого множества.

База индукции. В качестве динамической системы, глубина которой равна 1, можно взять систему с фазовым пространством $M_1 = \{0\}$, где для всех $g \in G$ $0(g) = 0$.

ЛЕММА 1. Множество M_1 лежит в классе $\widehat{\Sigma}(G, A)$, и его глубина $\text{depth}(M_1) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Поскольку множество M_1 одноточечное, $\text{depth}(M_1) = 1$. Лемма доказана.

Вспомогательная конструкция. Построим множество M_2 , которое нам необходимо в дальнейшем. Положим $M_2 := \{x \in \Omega \mid \# \text{supp}(x) \leq 1\}$.

ЛЕММА 2. Множество M_2 лежит в классе $\widehat{\Sigma}(G, A)$, и его глубина $\text{depth}(M_2) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изолированными точками в M_2 являются конфигурации, обращающиеся в 1 на некотором элементе группы G . Единственная предельная точка в M_2 – это точка 0 . Отсюда следует выполнение для M_2 свойств а)–г) из определения класса $\widehat{\Sigma}$, а также то, что

$$M'_2 = \{0\} = M_1, \quad M''_2 = \emptyset, \quad \text{depth}(M_2) = 2.$$

Лемма доказана.

Шаг индукции. Пусть α – непрелдельное счетное трансфинитное число и уже построены динамические системы (M_β, T) со всеми непрелдельными глубинами $\beta < \alpha$, причем фазовые пространства всех этих систем лежат в классе $\widehat{\Sigma}$. Построим множество $M_\alpha \in \widehat{\Sigma}$ с глубиной α . Так как α непрелдельно, то корректно определено ординальное число $\alpha - 1$.

Возникают две ситуации:

- i) $\alpha - 1$ – непрелдельное трансфинитное число;
- ii) $\alpha - 1$ – предельный ординал.

i) Пусть $\alpha - 1$ – непрелдельное трансфинитное число. По предположению индукции найдется множество $M_{\alpha-1} \in \widehat{\Sigma}$ такое, что $\text{depth}(M_{\alpha-1}) = \alpha - 1$. Определим

$$M_\alpha := M_{\alpha-1} + M_2$$

(здесь и далее под суммой двух множеств понимается множество попарных сумм их элементов). Докажем, что $M_\alpha \in \widehat{\Sigma}$ и $\text{depth}(M_\alpha) = \alpha$.

ЛЕММА 3. При всех $\beta < \alpha - 1$

$$M_{\alpha}^{(\beta)} = M_{\alpha-1}^{(\beta)} + M_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения будем вести трансфинитной индукцией по β . При $\beta = 0$ утверждение верно в силу определения множества M_{α} .

Пусть доказываемое равенство выполнено при всех $\beta < \gamma$ для некоторого $\gamma < \alpha - 1$. Покажем, что

$$M_{\alpha}^{(\gamma)} = M_{\alpha-1}^{(\gamma)} + M_2.$$

Положим

$$E = \bigcap_{\beta < \gamma} M_{\alpha}^{(\beta)}, \quad F = \bigcap_{\beta < \gamma} M_{\alpha-1}^{(\beta)}.$$

Из предположения индукции следует, что $E = F + M_2$. Действительно, если $x \in F + M_2$, то найдутся $y \in F$ и $z \in M_2$ такие, что $x = y + z$. По построению множества F при всех $\beta < \gamma$ имеем $y \in M_{\alpha-1}^{(\beta)}$, поэтому $x = y + z \in M_{\alpha-1}^{(\beta)} + M_2 = M_{\alpha}^{(\beta)}$. Следовательно,

$$x \in \bigcap_{\beta < \gamma} M_{\alpha}^{(\beta)} = E.$$

Таким образом, $E \supset F + M_2$.

Докажем обратное вложение. Пусть $x \in E$. Тогда для любого $\beta < \gamma$ найдутся $y_{\beta} \in M_{\alpha-1}^{(\beta)}$ и $z_{\beta} \in M_2$ такие, что $x = y_{\beta} + z_{\beta}$. Поэтому при $\beta < \gamma$ непусты множества $X(\beta) := \{(y, z) \in M_{\alpha-1}^{(\beta)} \times M_2 \mid y + z = x\}$. Множества $X(\beta)$ замкнуты (в топологии прямого произведения) и убывают с ростом β . Поэтому $\bigcap_{\beta < \gamma} X(\beta) \neq \emptyset$. Пусть $(y, z) \in \bigcap_{\beta < \gamma} X(\beta)$. Тогда $x = y + z \in \bigcap_{\beta < \gamma} M_{\alpha-1}^{(\beta)} + M_2 = F + M_2$, что и требовалось доказать.

Для доказательства леммы требуется установить, что $E' = F' + M_2$. Так как $F' = M_{\alpha-1}^{(\gamma)}$, а $\gamma < \alpha - 1$, множество F' непусто, а поскольку $E \supset F$, и $E' \neq \emptyset$.

Покажем, что $E' \supset F' + M_2$. Действительно, если $x_0 \in F' + M_2$, то конфигурация x_0 представима в виде $x_0 = y_0 + z_0$, где $y_0 \in F'$, $z_0 \in M_2$. Так как y_0 – предельная точка в F , существует нетривиальная последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset F$, $y_k \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$. (Последовательность считается нетривиальной в том смысле, что ее предел является точкой накопления для элементов последовательности.) Тогда $(y_k + z_0) \in F + M_2 = E$; $y_k + z_0 \rightarrow y_0 + z_0 = x_0$ при $k \rightarrow \infty$, причем последовательность $\{y_k + z_0\}_{k=1}^{+\infty}$ нетривиальна. Таким образом, x_0 – предельная точка в E , т.е. $x_0 \in E'$.

Для доказательства вложения $E' \subset F' + M_2$ рассмотрим произвольный элемент x_0 из E' . Конфигурация x_0 – предельная точка для E , поэтому найдется нетривиальная (в том же смысле, что и выше) последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset E$, $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Каждый из x_k представим в виде $x_k = y_k + z_k$, где $y_k \in F$, $z_k \in M_2$. Принимая во внимание компактность пространства $\Omega(G, A)$, получаем, что из $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{z_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$, пределом которой является некоторый $z_0 \in M_2$. Следовательно,

$$x_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} (y_{k_j} + z_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} + z_0,$$

и существует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = y_0.$$

Возможны два случая: $z_0 \neq 0$ и $z_0 = 0$.

Если $z_0 \neq 0$, то последовательность $\{z_{k_j}\}_{k=1}^{+\infty}$ с некоторого шага становится тождественной (существует j_0 такое, что при $j > j_0$ выполнено $z_{k_j} = z_0$). В силу нетривиальности последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ конфигурации $y_{k_j} \neq y_0$ при $j > j_0$, поэтому y_0 является предельной точкой в F . Следовательно, $x_0 = y_0 + z_0 \in F' + M_2$.

Если $z_0 = 0$, то $x_0 = y_0 \in F$. По предположению индукции $M_{\alpha-1} \in \hat{\Sigma}$. При переходе к производному множеству свойства в) и г) из определения класса $\hat{\Sigma}$ сохраняются, поэтому указанные свойства выполнены для всех множеств $M_{\alpha-1}^{(\beta)}$ при $\beta < \alpha - 1$, а значит и для F . Пусть $\text{supp}(x_0) = \{g_1, \dots, g_m\}$. По свойству г) конфигурация $\tilde{y}_0$, у которой $\text{supp}(\tilde{y}_0) = \{g_1, \dots, g_{m-1}\}$, принадлежит F' . Определим $\tilde{z}_0 \in M_2$, $\text{supp}(\tilde{z}_0) = \{g_m\}$. Получили, что $x_0 = \tilde{y}_0 + \tilde{z}_0 \in F' + M_2$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Множество M_α лежит в классе Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Счетность и T -инвариантность множества M_α следуют из соответствующих свойств $M_{\alpha-1}$ и M_2 . Докажем замкнутость построенного множества. Пусть $x_k \in M_\alpha$, $k = 1, 2, \dots$, и $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. При каждом k найдутся конфигурации $y_k \in M_{\alpha-1}$ и $z_k \in M_2$ такие, что $x_k = y_k + z_k$. В силу компактности множества M_2 существует подпоследовательность z_{k_j} , сходящаяся к некоторому $z_0 \in M_2$. Так как $(y_{k_j} + z_{k_j}) \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$, найдется $y_0 \in M_{\alpha-1}$, к которому сходится конфигурация y_{k_j} . Поэтому $x_0 = y_0 + z_0 \in M_{\alpha-1} + M_2 = M_\alpha$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Глубина множества M_α равна α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$M_\alpha^{(\alpha-1)} = \left(\bigcap_{\beta < \alpha-1} M_\alpha^{(\beta)} \right)' = \left(\bigcap_{\beta < \alpha-1} M_{\alpha-1}^{(\beta)} + M_2 \right)' = \bigcap_{\beta < \alpha-1} M_{\alpha-1}^{(\beta)}$$

(второе равенство следует из леммы 3, а третье – из того, что пересечение $\bigcap_{\beta < \alpha-1} M_{\alpha-1}^{(\beta)}$ конечно, поскольку его производное множество пусто). Значит, множество $M_\alpha^{(\alpha-1)}$ конечно, поэтому $M_\alpha^{(\alpha)} = \emptyset$. Следовательно, $\text{depth}(M_\alpha) = \alpha$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Множество M_α лежит в классе $\hat{\Sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Счетность, замкнутость и T -инвариантность множества M_α доказаны в лемме 4.

Докажем однородность глубины M_α . Пусть G_0 – некоторое бесконечное подмножество группы G . Так как по предположению индукции глубины множеств $M_{\alpha-1}$ и M_2 однородны, имеем $\text{depth}(M_{\alpha-1}|_{G_0}) = \alpha - 1$ и $\text{depth}(M_2|_{G_0}) = 2$. Из определения M_α следует, что $M_\alpha|_{G_0} = M_{\alpha-1}|_{G_0} + M_2|_{G_0}$. Кроме того, множества $M_{\alpha-1}|_{G_0}$ и $M_2|_{G_0}$ счетны, замкнуты и обладают свойствами в) и г) из определения класса $\hat{\Sigma}$. Рассуждая как и при доказательстве лемм 3–5, получаем, что $\text{depth}(M_\alpha|_{G_0}) = \alpha$, т.е. множество M_α имеет однородную глубину.

Конечность носителей конфигураций из M_α вытекает из того же свойства, выполненного по предположению индукции для конфигураций из $M_{\alpha-1}$ и из M_2 .

Покажем, что множество M_α удовлетворяет свойству г) из определения класса $\widehat{\Sigma}$. Пусть $x \in M_\alpha$. Тогда либо $x \in M_{\alpha-1}$, либо найдутся конфигурации $y \in M_{\alpha-1}$ с носителем $\text{supp}(y) = \{g_1, \dots, g_n\}$ и $z \in M_2$ с носителем $\text{supp}(z) = \{g_0\}$ такие, что $\text{supp}(x) = \text{supp}(y) \cup \text{supp}(z)$. В первом случае доказываемое свойство следует из вложения $M'_{\alpha-1} \subset M'_\alpha$ и того, что $M_{\alpha-1} \in \widehat{\Sigma}$. Во втором случае при $i = 1, \dots, n$ конфигурации с носителями $\{g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n, g_0\}$ являются предельными точками для M_α , так как множество $M_{\alpha-1}$ удовлетворяет свойству г), и потому конфигурации с носителями $\{g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n\}$ суть предельные точки в нем.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из проведенных выше рассуждений следует, что для произвольного натурального числа n примером системы с однородной глубиной равной n может служить система, фазовое пространство которой есть множество всех конфигураций, принимающих значение 1 не более чем на $n - 1$ элементах группы G :

$$M_n := \{x \in \Omega \mid \# \text{supp}(x) \leq n - 1\} \in \widetilde{\Sigma}(G, A), \quad \text{depth}(M_n) = n.$$

ii) Пусть $\alpha - 1$ – предельный ординал. Введем в рассмотрение семейство отображений $R_n: \widehat{\Sigma}(G, A) \rightarrow \widehat{\Sigma}(G, A)$, занумерованных натуральными числами n и действующих следующим образом:

$$R_n(M) = \{x \in M \mid (g_1, g_2 \in \text{supp}(x), g_1 \neq g_2) \implies p(g_1, g_2) > n\}.$$

ЛЕММА 7. *Определение отображений R_n корректно, т.е. все R_n сохраняют свойства а)–г) из определения класса $\widehat{\Sigma}$. Кроме того, отображения R_n не изменяют глубину любых множеств из $\widehat{\Sigma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность либо счетность R_n -образа не более чем счетного множества M из $\widetilde{\Sigma}(G, A)$ следует из очевидного вложения $R_n M \subset M$, выполненного при любом n . Замкнутость и T -инвариантность $R_n M$ вытекают из соответствующих свойств M .

Покажем, что $R_n M$ обладает свойством однородности глубины. Пусть n – натуральное число и G_0 – некоторое бесконечное подмножество группы G . Рассмотрим бесконечное множество $G_n \subset G_0$, в котором $p(g, h) > n$ для всех $g, h \in G_n$. Тогда $(R_n M)|_{G_n} = M|_{G_n}$. Очевидно, что $\text{depth}(R_n M|_{G_0}) \leq \text{depth}(R_n M)$. Вместе с тем, $\text{depth}(R_n M|_{G_0}) \geq \text{depth}(R_n M|_{G_n}) = \text{depth}(M|_{G_n}) = \text{depth}(M) \geq \text{depth}(R_n M)$ (предпоследнее равенство следует из однородности глубины M). Тем самым, $\text{depth}(R_n M|_{G_0}) = \text{depth}(R_n M)$.

Выполнение свойств в), г) из определения класса $\widehat{\Sigma}$ следует из построения отображений R_n .

Докажем инвариантность глубины множества из $\widehat{\Sigma}$ под действием R_n . Для каждого данного натурального n рассмотрим бесконечное подмножество G_n группы G , в котором для любых $g, h \in G_n$ выполнено $p(g, h) > n$. Так как глубина M однородна, $\text{depth}(M|_{G_n}) = \text{depth}(M)$. С другой стороны, элементы $M|_{G_n}$ легко поднять до отображений из G в A при помощи $\eta: \Omega(G_n, A) \rightarrow \Omega(G, A)$,

$$\eta(x)(g) = \begin{cases} x(g), & \text{если } g \in G_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, при таком поднятии сохранится глубина: $\text{depth}(\eta M|_{G_n}) = \text{depth}(M|_{G_n})$. Но $\eta M|_{G_n} \subset R_n M$ по определению R_n и по построению G_n , поэтому $\text{depth}(\eta M|_{G_n}) \leq \text{depth}(R_n M)$. Сравнивая это неравенство со следствием $\text{depth}(R_n M) \leq \text{depth}(M)$ вложения $R_n M \subset M$, приходим к выводу, что $\text{depth}(R_n M) = \text{depth}(M)$.

Лемма доказана.

Так как α – счетное трансфинитное число, все предшествующие ему непредельные ординалы можно занумеровать натуральными числами:

$$\{\beta \mid \beta < \alpha, \beta \text{ непредельный}\} = \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}.$$

По предположению индукции для любого натурального n существует $M_{\beta_n} \in \hat{\Sigma}$ такое, что $\text{depth}(M_{\beta_n}) = \beta_n$. Положим

$$M_\alpha := \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n M_{\beta_n}.$$

ЛЕММА 8. Множество M_α находится в классе $\Sigma(G, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что M_α счетно и инвариантно относительно действия T .

Замкнутость M_α вытекает из следующих соображений. Допустим, что найдется последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset M_\alpha$ такая, что ее пределом при $k \rightarrow +\infty$ является отображение x_0 , не лежащее в M_α . В $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ есть представители бесконечного набора множеств $L_n = R_n M_{\beta_n}$, так как в противном случае в одном из L_n оказалась бы подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$, пределом которой при $j \rightarrow +\infty$ является x_0 , что противоречит замкнутости рассматриваемого L_n (которая имеет место в силу леммы 7).

Предельное соотношение $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow +\infty$ означает, что для любого N существует K_0 такое, что для всех $k > K_0$ $x_k|_{G_N} = x_{K_0}|_{G_N} = x_0|_{G_N}$, где $G_N = \{g \in G \mid d(g) \leq N\}$ – шар радиуса N в группе G .

Взяв $k > K_0$ такое, что $x_k \in L_n$ при некотором $n > 2N + 2$, получим, что конфигурация x_0 может иметь на множестве G_N не более одной единицы. В силу произвольности N рассматриваемая x_0 есть либо тождественно нулевое отображение, либо обращается в 1 на единственном элементе группы G . Но все такие конфигурации принадлежат построенному множеству M_2 , поэтому $x_0 \in M_\alpha$. Полученное противоречие доказывает замкнутость M_α .

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Глубина множества M_α равна α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что полагая

$$E := \bigcap_{\beta < \alpha - 1} M_\alpha^{(\beta)},$$

получим $E = M_2$. В самом деле, предположим, что в E содержится конфигурация x_0 , обращающаяся в 1 не менее чем дважды (т.е. для некоторых $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, выполнено $x_0(g_1) = x_0(g_2) = 1$). Конфигурация x_0 должна принадлежать бесконечному набору множеств L_n , так как в противном случае найдется шаг $\beta_N < \alpha - 1$, на котором

x_0 будет удалена из $M_\alpha^{(\beta_N)}$. Однако, x_0 не может принадлежать L_n при $n > p(g_1, g_2)$. Получили противоречие.

С другой стороны, для всех ординалов β меньших $\alpha - 1$ имеет место вложение $M_2 \subset M_\alpha^{(\beta)}$ (поскольку при n таких, что $\beta_n > \beta + 1$, множество M_2 содержится в $L_n^{(\beta)} = (R_n M_{\beta_n})^{(\beta)} \subset M_\alpha^{(\beta)}$). Поэтому $E = M_2$.

Таким образом,

$$M_\alpha^{(\alpha-1)} = \left(\bigcap_{\beta < \alpha-1} M_\alpha^{(\beta)} \right)' = M_2' = M_1,$$

$$M_\alpha^{(\alpha)} = M_\alpha^{(\alpha-1)'} = M_1' = \emptyset, \quad \text{depth}(M_\alpha) = \alpha.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Множество M_α находится в классе $\widehat{\Sigma}(G, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Счетность, замкнутость и T -инвариантность множества M_α доказаны в лемме 8. Выполнение свойств в), г) из определения класса $\widehat{\Sigma}$ следует из леммы 7.

Докажем, что глубина M_α однородна. Пусть G_0 – бесконечное подмножество группы G . Заметим, что

$$M_\alpha|_{G_0} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (R_n M_{\beta_n})|_{G_0}.$$

Рассуждая как и в лемме 9, получаем (используя однородность глубин M_{β_n}), что

$$\bigcap_{\beta < \alpha-1} (M_\alpha|_{G_0})^{(\beta)} = M_2|_{G_0}.$$

Следовательно, $\text{depth}(M_\alpha|_{G_0}) = \alpha = \text{depth}(M_\alpha)$. Лемма доказана.

Таким образом, шаг трансфинитной индукции завершен. Истинность утверждения 1) теоремы установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером фазового пространства системы с однородной глубиной равной $\omega + 1$ является

$$M_{\omega+1} := \{x \in \Omega \mid \# \text{supp}(x) < \infty,$$

$$\text{supp}(x) = \{g_1, \dots, g_n\} \implies p(g_i, g_j) > n + 1, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

2) Покажем, что не существует динамических систем со счетным замкнутым T -инвариантным фазовым пространством, глубина которых была бы предельным трансфинитным числом. Проведем рассуждения от противного. Допустим, что имеется множество M со свойством $\text{depth}(M) = \alpha$, где α – предельный трансфинит, M счетно, T -инвариантно и замкнуто. В таком случае множество $X := \bigcap_{\beta < \alpha} M^{(\beta)}$ конечно (X не может быть пустым как пересечение счетной системы убывающих компактов). Пусть $x_0 \in X$. Тогда орбита точки x_0 под действием T конечна. Следовательно, для каждого из образующих $c_i \in C$ группы G найдется положительное число P_i такое, что для всех $g \in G$ выполнено $x_0(g \cdot c_i^{P_i}) = x_0(g)$; P_i есть “период x_0 вдоль образующего c_i ”.

Определим несколько вспомогательных понятий, которыми мы воспользуемся для завершения доказательства теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задан набор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$, состоящий из $\varepsilon_i = \pm 1$. Назовем (полным) октантом, соответствующим набору ε , следующее подмножество группы G :

$$\Delta(\varepsilon) = \left\{ g = c_1^{i_1} \cdots c_r^{i_r} \mid i_j = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{если } \varepsilon_j = 1, \\ 0, -1, -2, \dots, & \text{если } \varepsilon_j = -1, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задан набор целых чисел $L = (l_1, \dots, l_r)$. Назовем частичным октантом, соответствующим набору L , следующее подмножество группы G :

$$\Delta_p(L) = \left\{ g = c_1^{i_1} \cdots c_r^{i_r} \mid i_j = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, l_j, & \text{если } l_j > 0, \\ l_j, \dots, -2, -1, 0, & \text{если } l_j < 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем параллелепипедом размеров $l_1, \dots, l_r$ (все l_j – натуральные числа) следующее подмножество группы G :

$$\Pi_{l_1, \dots, l_r} = \{ g = c_1^{i_1} \cdots c_r^{i_r} \mid |i_j| \leq l_j, \quad j = 1, \dots, r \}.$$

Так как при всех $\beta < \alpha$ отображение x_0 является предельной точкой множеств $M^{(\beta)}$, то для любого $\beta < \alpha$ существует последовательность $\{x_k^\beta\}_{k=1}^{+\infty} \subset M^{(\beta)}$ такая, что $x_k^\beta \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow +\infty$, но $x_k^\beta \neq x_0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Сходимость в рассматриваемом пространстве Ω является покоординатной, поэтому (при необходимости переходя к подпоследовательности) можно считать, что x_k^β совпадают с x_0 на “кубах размера k ”: для любого $\beta < \alpha$

$$x_k^\beta|_{\Pi_{k, \dots, k}} = x_0|_{\Pi_{k, \dots, k}}.$$

Поясним теперь схему дальнейших рассуждений. Будем сдвигать конфигурации x_k^β вдоль каждой из образующих в ту или иную сторону (в положительном или отрицательном направлении) на максимально возможное количество периодов с тем, чтобы получить конфигурации, совпадающие с x_0 на достаточно больших частичных октантах, но имеющие отличие от x_0 в параллелепипеде $\Pi_{P_1, \dots, P_r}$ (такие сдвиги x_k^β всегда найдутся, потому что $x_k^\beta \neq x_0$). При увеличении k размеры частичных октантов, на которых есть совпадение сдвинутых x_k^β с x_0 , будут расти. В силу замкнутости и T -инвариантности множества $M^{(\beta)}$ найдутся конфигурации $y^\beta \in M^{(\beta)}$, совпадающие с x_0 в одном из полных октантов, но имеющие отличие от него в $\Pi_{P_1, \dots, P_r}$. Можно выбрать октант $\Delta(\varepsilon_0)$ такой, что при всех $\beta < \alpha$ в $M^{(\beta)}$ есть конфигурация y^β , совпадающая в нем с x_0 . Тогда и в $X = \bigcap_{\beta < \alpha} M^{(\beta)}$ существует конфигурация $y_0 \in X$ такая, что $y_0|_{\Delta(\varepsilon_0)} = x_0|_{\Delta(\varepsilon_0)}$, при этом найдется $g \in \Pi_{P_1, \dots, P_r}$, на котором $y_0(g) \neq x_0(g)$. Орбита y_0 под действием T бесконечна, что противоречит конечности T -инвариантного множества X .

Проведем более детальное обоснование обозначенных результатов.

ЛЕММА 11. При всех $k > \max\{P_1, \dots, P_r\}$ для каждого x_k^β найдутся элемент $g^* \in G$ и набор целых чисел $S = S(k) = \{s_1(k), \dots, s_r(k)\}$ такие, что для конфигурации $y_k^\beta = T_{g^*} x_k^\beta$ выполнены следующие условия:

- $y_k^\beta|_{\Delta_p(S)} = x_0|_{\Delta_p(S)}$;
- существует $g_0 \in \Pi_{P_1, \dots, P_r}$ такое, что $y_k^\beta(g_0) \neq x_0(g_0)$;
- для всех $j = 1, \dots, r$ $|s_j(k)| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем натуральные числа $m_1, \dots, m_r$ так, чтобы в параллелепипеде $\Pi_{m_1 P_1, \dots, m_r P_r}$ имело место совпадение конфигураций x_0 и x_k^β , а в параллелепипеде $\Pi_{(m_1+1)P_1, \dots, (m_r+1)P_r}$ был элемент $\tilde{g} = c_1^{a_1 P_1 + b_1} \dots c_r^{a_r P_r + b_r}$ ($|a_j| \leq m_j$, $|b_j| \leq P_j$ при $j = 1, \dots, r$), на котором $x_0(\tilde{g}) \neq x_k^\beta(\tilde{g})$. Обозначим для краткости $\Pi_{(1)} := \Pi_{m_1 P_1, \dots, m_r P_r}$, $\Pi_{(2)} := \Pi_{(m_1+1)P_1, \dots, (m_r+1)P_r}$, $\Pi_{(k)} := \Pi_{k, \dots, k}$.

Так как по построению x_0 и x_k^β совпадают на $\Pi_{(k)}$, имеем $\Pi_{(k)} \subset \Pi_{(2)}$, откуда получаем неравенства

$$k < (m_j + 1)P_j, \quad m_j > \frac{k}{P_j} - 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Положим

$$g^* := c_1^{-a_1 P_1} \dots c_r^{-a_r P_r}, \quad s_j := \begin{cases} P_j - k, & \text{если } a_j \geq 0, \\ k - P_j, & \text{если } a_j < 0. \end{cases}$$

Поддействуем на равенство $x_0|_{\Pi_{(1)}} = x_k^\beta|_{\Pi_{(1)}}$ преобразованием T_{g^*} :

$$(T_{g^*} x_0)|_{g^* \Pi_{(1)}} = (T_{g^*} x_k^\beta)|_{g^* \Pi_{(1)}}.$$

Конфигурация x_0 инвариантна относительно сдвигов вдоль любого из образующих на произвольное количество соответствующих периодов, поэтому $T_{g^*} x_0 = x_0$. Учитывая, что по определению $y_k^\beta = T_{g^*} x_k^\beta$, получаем, что

$$x_0|_{g^* \Pi_{(1)}} = y_k^\beta|_{g^* \Pi_{(1)}}.$$

а) Докажем, что $\Delta_p(S) \subset g^* \Pi_{(1)}$. Тем самым, будет установлено условие а) леммы 11.

Пусть $g \in \Delta_p(S)$. Представим g в виде $g = c_1^{i_1} \dots c_r^{i_r}$, где

$$i_j \in \begin{cases} \{0, \dots, s_j\}, & \text{если } s_j \geq 0, \\ \{s_j, \dots, 0\}, & \text{если } s_j < 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r,$$

т.е.

$$i_j \in \begin{cases} \{0, \dots, k - P_j\}, & \text{если } a_j < 0, \\ \{P_j - k, \dots, 0\}, & \text{если } a_j \geq 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r.$$

Элементы же из $g^* \Pi_{(1)}$ имеют вид $c_1^{q_1} \dots c_r^{q_r}$, $q_j \in \{-m_j P_j - a_j P_j, \dots, m_j P_j - a_j P_j\}$, $j = 1, \dots, r$. Зафиксируем некоторое j , $1 \leq j \leq r$. Покажем, что в проекции на j -й образующий элемент доказываемое вложение выполнено. Возможны два случая: $a_j < 0$ и $a_j \geq 0$.

В случае $a_j < 0$ докажем, что $\{0, \dots, k - P_j\} \subset \{-m_j P_j - a_j P_j, \dots, m_j P_j - a_j P_j\}$. Так как по построению $|a_j| \leq m_j$, имеем $0 \leq -a_j \leq m_j$. Поэтому

$$-m_j P_j - a_j P_j \leq -m_j P_j + m_j P_j = 0, \quad m_j P_j - a_j P_j \geq m_j P_j > \left(\frac{k}{P_j} - 1\right) P_j = k - P_j.$$

В случае $a_j \geq 0$ докажем, что $\{P_j - k, \dots, 0\} \subset \{-m_j P_j - a_j P_j, \dots, m_j P_j - a_j P_j\}$. Заметим, что $0 \leq a_j \leq m_j$. Имеем

$$-m_j P_j - a_j P_j \leq -m_j P_j < -\left(\frac{k}{P_j} - 1\right) P_j = P_j - k, \quad m_j P_j - a_j P_j \geq m_j P_j - m_j P_j = 0.$$

В силу произвольности j доказываемое вложение установлено.

б) Положим $g_0 := g^* \tilde{g}$. Так как по построению $x_0(\tilde{g}) \neq x_k^\beta(\tilde{g})$, имеем

$$x_0(g_0) = x_0(g^* \tilde{g}) = x_0(\tilde{g}) \neq x_k^\beta(\tilde{g}) = (T_{g^*} x_k^\beta)(g^* \tilde{g}) = y_k^\beta(g_0).$$

При этом

$$g_0 = (c_1^{a_1 P_1 + b_1} \dots c_r^{a_r P_r + b_r}) \cdot (c_1^{-a_1 P_1} \dots c_r^{-a_r P_r}) = c_1^{b_1} \dots c_r^{b_r}.$$

По построению $|b_j| \leq P_j, j = 1, \dots, r$. Поэтому $g_0 \in \Pi_{P_1, \dots, P_r}$. Условие б) установлено.

в) Условие в) следует из явного вида чисел s_j , так как $|s_j(k)| = k - P_j \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Рассмотрим при каждом $\beta < \alpha$ множество

$$E^\beta = \{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r \mid \exists y^\beta \in M^{(\beta)} : y^\beta|_{\Delta(\varepsilon)} = x_0|_{\Delta(\varepsilon)}, y^\beta|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}} \neq x_0|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}}\}.$$

ЛЕММА 12. Множества E^β обладают следующими свойствами:

- а) для любого ординала $\beta < \alpha$ множество E^β непусто;
- б) если $\beta_1 < \beta_2$, то $E^{\beta_1} \supset E^{\beta_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Зафиксируем некоторое $\beta < \alpha$. При каждом $k = 1, 2, \dots$ найдется октант, в частичном подоктанте которого имеется совпадение y_k^β и x_0 (сохраним обозначения, введенные в лемме 11). Так как имеется лишь конечное число октантов, при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$ для бесконечного набора индексов $k = k_j, j = 1, 2, \dots$, частичные октанты $\Delta_p(S(k_j))$ лежат внутри $\Delta(\varepsilon_0)$. В силу того что пространство $M^{(\beta)}$ компактно, у последовательности $\{y_{k_j}^\beta\}_{j=1}^{+\infty}$ есть предельная точка y^β , совпадающая с конфигурацией x_0 на октанте $\Delta(\varepsilon_0)$, но имеющая отличие от x_0 в $\Pi_{P_1, \dots, P_r}$. В силу замкнутости множества $M^{(\beta)}$ конфигурация $y^\beta \in M^{(\beta)}$.

б) Указанное вложение легко следует из того, что $M^{(\beta_1)} \supset M^{(\beta_2)}$ при $\beta_1 < \beta_2$.

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение следующие множества не более чем счетных ординалов, зависящие от наборов $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$:

$$K^\varepsilon = \{\beta < \alpha \mid \exists y^\beta \in M^{(\beta)} : y^\beta|_{\Delta(\varepsilon)} = x_0|_{\Delta(\varepsilon)}, y^\beta|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}} \neq x_0|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}}\}.$$

ЛЕММА 13. Найдется набор ε_0 из ± 1 такой, что $K^{\varepsilon_0} = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений а) и б) леммы 12 следует соответственно, что $\bigcup_\varepsilon K^\varepsilon = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ и для любого ε существует β_0 такое, что $K^\varepsilon = \{\beta \mid \beta < \beta_0\}$. Сопоставляя эти два факта, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Существует октант $\Delta(\varepsilon_0)$ такой, что при всех $\beta < \alpha$ в множестве $M^{(\beta)}$ имеется конфигурация y^β , совпадающая с x_0 в $\Delta(\varepsilon_0)$, но имеющая отличие от него в $\Pi_{P_1, \dots, P_r}$.

Нам потребуется также следующее утверждение из общей теории топологических пространств.

ЛЕММА 14. Пусть $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство компактов, Γ – вполне упорядоченное множество, точная нижняя грань которого есть γ_0 , а все множества A_γ непусты и убывают: $A_{\gamma_1} \supset A_{\gamma_2}$, если $\gamma_1 < \gamma_2$. Тогда

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если предположить противное, то множества $A_{\gamma_0} \setminus A_\gamma$ образуют открытое покрытие компакта A_{γ_0} в естественной топологии на A_{γ_0} . Выбирая конечное подпокрытие, приходим в противоречие с теоремой Кантора о пересечении счетной системы убывающих компактов. Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Найдется конфигурация $y_0 \in X$ такая, что $y_0|_{\Delta(\varepsilon_0)} = x_0|_{\Delta(\varepsilon_0)}$, но $y_0|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}} \neq x_0|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества

$$Y^\beta = \{y^\beta \in M^{(\beta)} \mid y^\beta|_{\Delta(\varepsilon_0)} = x_0|_{\Delta(\varepsilon_0)}, y^\beta|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}} \neq x_0|_{\Pi_{P_1, \dots, P_r}}\}.$$

В силу следствия из леммы 13 все $Y^\beta \neq \emptyset$. Так как множества $M^{(\beta)}$ убывают, Y^β тоже убывают. Кроме того, очевидно, что множества Y^β замкнуты. По лемме 14 их пересечение непусто. Лемма доказана.

Орбита под действием T полученной конфигурации y_0 бесконечна. Однако, в силу T -инвариантности множества X вся эта орбита должна лежать в нем. Полученное противоречие с конечностью X полностью доказывает теорему.

Пользуясь случаем, автор анонсирует следующий результат. Применив конструкцию, аналогичную использованной в настоящей работе, автор получил новое решение задачи Биркгофа о множестве значений глубины центра, опирающееся на методы символической динамики. На наш взгляд, получающаяся при этом конструкция существенно проще построения Майера. Статья, в которой изложен этот результат, в данный момент готовится к печати.

В заключение автор благодарит Д. В. Аносова и А. М. Стёпина, привлечших его внимание к изучению инварианта глубины, а также Г. Чакветадзе, ознакомившегося с рукописью и сделавшего ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шаповалов С. А. Сопряженность символических динамических систем не более чем со счетным фазовым пространством // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 3. С. 35–39.
- [2] Birkhoff G. D. Über gewisse Zentralbewegungen Dynamischer Systeme // Ges. Wiss. Göttingen Nachr. Math.-Phys. Kl. 1926. P. 81–92.
- [3] Майер А. Г. О порядковом числе центральных траекторий // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 8. С. 1393–1396.
- [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [5] Neumann D. A. Central sequences in dynamical systems // Amer. J. Math. 1978. V. 100. № 1. P. 1–18.
- [6] Anosov D. V. Remarks concerning hyperbolic sets // J. Math. Sci. 1996. V. 78. № 5. P. 497–529.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.10.98