Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 908–920

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:30:06

УДК 512.546.4

ЖЕСТКОСТЬ И АППРОКСИМАЦИЯ КВАЗИПРЕДСТАВЛЕНИЙ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРУПП

А. И. Штерн

Получены достаточные условия того, что (необязательно ограниченное) квазипредставление аменабельной (вообще говоря, топологической) группы есть ограниченное возмущение обычного представления. В частности, показано, что произвольное (необязательно ограниченное) конечномерное квазипредставление аменабельной топологической группы есть ограниченное возмущение обычного представления.

Библиография: 27 названий.

Введение. Квазигомоморфизм T полугруппы S в равномерную полугруппу Σ – это отображение $T: S \rightarrow \Sigma$ такое, что элементы $T(s_1 s_2)$ и $T(s_1)T(s_2)$, $s_1, s_2 \in S$, равномерно близки. Изучение таких отображений представляет естественный интерес, связанный с объединением идей симметрии и близости (соответствующая задача была поставлена в связи с результатами статей [1] и [2] еще в книге Улама [3]), но оно имеет и некоторый физический смысл, который можно описать следующим образом. Если у группы G , являющейся группой симметрий описания некоторой физической системы, существуют квазипредставления (т.е. квазигомоморфизмы в группу обратимых непрерывных линейных операторов в некотором топологическом векторном пространстве), для которых величина окружения U определяется точностью измерений и не существует “достаточно близких” обычных представлений группы G в том же топологическом векторном пространстве, то интерпретация эксперимента может оказаться более сложной, чем в случае, когда близкое представление действительно существует, и это может потребовать тщательного различения истинных симметрий (связанных с “законами природы”) и квазисимметрий.

Условия существования гомоморфизмов, близких к данному квазигомоморфизму группы или полугруппы, изучаются с различных точек зрения более 50 лет [4]–[12], [1], [2], [13]–[22]; примеры квазипредставлений, не допускающих близких представлений, рассматривались в [7]–[10], [15]–[17], [19]–[26].

В настоящей статье получены достаточные условия того, что (необязательно ограниченное) квазипредставление аменабельной (вообще говоря, топологической) группы есть ограниченное возмущение обычного представления. В частности, доказано, что

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00276, программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96249, и фонда DFG, грант “Indextheorie”, FA.-№ 04030206.

для любого (вообще говоря, неограниченного) конечномерного квазипредставления аменабельной группы существует обычное представление, ограниченным возмущением которого является исходное квазипредставление, и изучаются условия существования близких представлений такого типа при условии, что нормы $\|T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2)\|$, $s_1, s_2 \in G$, равномерно малы.

Работа построена следующим образом. В п. 1 получены некоторые общие результаты о свойствах квазипредставлений с неограниченными орбитами и, в частности, показано, что ε -квазипредставление T аменабельной группы G в сопряженном банаховом пространстве с $\varepsilon < 1/2$, удовлетворяющее дополнительным условиям $T(e) = 1$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$, $g \in G$, является $\varphi(\varepsilon)$ -возмущением обычного представления, где $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. В п. 2 определяется структура конечномерных квазипредставлений аменабельных групп.

Часть результатов п. 2 опубликована без доказательств в [26].

1. Квазипредставления с неограниченными орбитами. Приведем сначала определения и основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [17], [21]. Пусть S – полугруппа, E – топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *U -квазипредставлением*), где U – данное равностепенно непрерывное семейство в $L(E)$ полугруппы S в E , если семейство $U(T)$, определяемое равенством

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2), s_1, s_2 \in S\},$$

равностепенно непрерывно (соответственно, если $U(T)$ содержится в U).

В нормированном пространстве ε -квазипредставление ($\varepsilon \geq 0$) есть U -квазипредставление с $U = \{T, T \in L(E), \|T\| < \varepsilon\}$.

Очевидно, что любое ε -квазипредставление является квазипредставлением, а 0-квазипредставление есть обычное представление.

Один из наиболее общих вопросов, связанных с ε -квазипредставлениями, состоит в изучении условий, обеспечивающих существование обычного представления полугруппы, близкого к данному квазипредставлению, и изучение свойств множества этих представлений, если оно непусто. В статьях [10], [13], [27] (другие ссылки можно найти в библиографии к этим статьям) изучался вопрос о существовании близких представлений для случая, когда полугруппа S есть компактная группа (в статье [12] получены условия тривиальности одномерных отображений, близких к аддитивным, структура которых в общем случае изучена в [19], [21]). Кроме того, в статье [10] рассматривался также случай ε -квазипредставлений аменабельных локально компактных групп, однако, как отмечено в статье [23], это исследование содержит неточность, связанную с тем, что если к непрерывной функции двух переменных (пробегающих аменабельную группу) применить инвариантное среднее по одному из этих переменных, то может получиться разрывная функция другого переменного (и даже функция, не являющаяся борелевской, см. [18]); напомним, что пробел в доказательстве соответствующего утверждения в классе сильно непрерывных квазипредставлений заполнен в [21] с помощью результата статьи [9].

Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [17], [21]. Пусть G – аменабельная локально компактная группа, B – банахово пространство. Группа G называется *устойчиво представимой в банаховом пространстве B* , если для любых $\delta > 0$ и $C > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что если T – сильно непрерывное ε -квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям

$$\|T(g)\| \leq C, \quad \|T(g)^{-1}\| \leq C$$

для всех $g \in G$, то существует представление R группы G в B^* такое, что $\|T(g)^* - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$ и матричные элементы $g \mapsto (R(g)F)(x)$, $g \in G$, непрерывны при $F \in B^*$, $x \in B$.

Как известно, справедлива

ТЕОРЕМА 1.1 [17], [21]. *Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом банаховом пространстве.*

Отметим очевидное следствие этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [17], [21]. *Пусть G – группа, B – банахово пространство. Для любого $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого δ -квазипредставления T группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющего условиям*

$$\|T(g)\| \leq C, \quad \|T(g)^{-1}\| \leq C$$

для всех $g \in G$, существует (ограниченное) ε -квазипредставление R группы G в B , удовлетворяющее условиям $R(e) = 1$ и $\|T(g) - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Если G – топологическая группа и отображение T сильно непрерывно, то (при надлежащем выборе ε) квазипредставление R можно выбрать также сильно непрерывным.

Это утверждение решает общую задачу для ограниченных квазипредставлений и мотивирует следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. *Любое сильно непрерывное квазипредставление аменабельной локально компактной группы является ограниченным возмущением обычного непрерывного представления этой группы.*

Структура важного класса неограниченных квазипредставлений, а именно, квазипредставлений, замыкания орбит которых содержат нулевой элемент [17], [21], также подкрепляет эту гипотезу. Приведем типичное утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2 [17], [21]. *Пусть E – топологическое векторное пространство, G – группа, T – квазипредставление группы G непрерывными линейными операторами в пространстве E . Предположим, что операторы квазипредставления T обратимы и существует ненулевой элемент $x \in E$ такой, что замыкание $\overline{O_{T^{-1}}(x)}$ соответствующей T^{-1} -орбиты $O_{T^{-1}}(x) = \{T(g)^{-1}x, g \in G\}$ элемента $x \in E$ содержит нулевой элемент пространства E . Тогда замкнутая линейная оболочка F орбиты $O_{T^{-1}}(x)$ инвариантна относительно T и ограничение отображения T на F есть обычное представление группы G .*

Легко видеть, что любое квазипредставление обратимыми операторами, для которого замыкание $\overline{O_{T^{-1}}(x)}$ некоторой ненулевой T^{-1} -орбиты содержит нулевой элемент

пространства E , непременно неограничено. Оказывается, все неограниченные квазипредставления имеют специфические свойства.

Введем следующие обозначения. Если E – сопряженное банахово пространство, то мы обозначим через E_* некоторое банахово пространство, к которому сопряжено пространство E . Кроме того, если G – аменабельная локально компактная группа, то мы обозначим через I некоторое двусторонне инвариантное среднее на $L^\infty(G)$ (если подынтегральная функция зависит от нескольких переменных, то в индексе указывается переменная, по которой берется среднее). Если $M: G \rightarrow L(E)$ – ограниченная функция со значениями в непрерывных линейных операторах в пространстве E , то мы определим непрерывный линейный оператор $I(M)$ в пространстве E формулой

$$(I(M)x)(f) = I_g((M(g)x)(f)), \quad x \in E, \quad f \in E_*.$$

ЛЕММА 1.1. Пусть G – группа, T – ее неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E = E_T$.

1) Квазипредставление T имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.

2) Для любых $g, h \in G$ и $x \in E$ T -орбита вектора $(T(gh) - T(g)T(h))x$ ограничена. В частности, если все ненулевые T -орбиты неограничены, то T – обычное представление.

3) Пусть L – векторное подпространство E , образованное всеми элементами $x \in E$ такими, что орбита $O_T(x) = \{T(g)x, g \in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой

$$\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\|, \quad x \in E, \quad \text{где } \|\cdot\| = \|\cdot\|_E. \quad (1.1)$$

Тогда тождественное отображение $j: L \rightarrow E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L \subset E$ инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, и соотношения

$$\begin{aligned} \|T(g)x\|_L &\leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\|, \\ \|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L &\leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|, \end{aligned} \quad g, k, l \in G, \quad x \in E, \quad (1.2)$$

выполняются для всех $g, k, l \in G$; в частности, $\|T(k)T(l) - T(kl)\|_L \leq 3\varepsilon$ для всех $k, l \in G$.

4) Пусть S – квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T , т.е. отображение $S - T: G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ имеет ограниченный образ. Тогда образ оператора $S(g) - T(g)$ содержится в подпространстве $L \subset E$ для любого $g \in G$. В частности, если все ненулевые T -орбиты в E неограничены (и T – обычное представление, см. утверждение 2)), то T жестко в том смысле, что если ограниченное возмущение S квазипредставления T является квазипредставлением, то S совпадает с самим T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) непосредственно следует из принципа равномерной ограниченности.

Рассмотрим утверждение 3). Очевидно, что множество L , введенное в формулировке, действительно является векторным подпространством в E (так как суммы и кратные

ограниченных множеств ограничены), а $\|\cdot\|_L$ действительно является нормой на L . Непрерывность отображения $j: L \rightarrow E$ также очевидна, поскольку

$$\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\| \geq \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Если $\{x_n\}$, $x_n \in L$, фундаментальна в L , то для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что $\|T(g)x_n - T(g)x_m\|_E \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$ и всех $n, m > N$. Следовательно, для любого $g \in G$ существует $y(g) \in E$ такой, что $\|T(g)x_n - y(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $n > N$. Однако, $T(g)x_n \rightarrow T(g)x$, где $x = \lim x_n$ (напомним, что если $\{x_n\}$ фундаментальна в L , то она фундаментальна и в E). Поэтому $\|T(g)x_n - T(g)x\| \leq \varepsilon$ для всех $n > N$, или $\|x_n - x\|_L \leq \varepsilon$ при $n > N$, что доказывает полноту L .

Для доказательства первого соотношения в (1.2) воспользуемся основным неравенством $\|T(h)T(k) - T(hk)\| \leq \varepsilon$, или $\|T(h)T(k)x - T(hk)x\| \leq \varepsilon\|x\|$. Если $x \in L$, то отсюда сразу следует, что

$$\|T(h)(T(k)x)\| \leq \|T(hk)x\| + \varepsilon\|x\| \leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_L,$$

что доказывает одновременно и инвариантность L относительно $T(h)$ для любого $h \in G$, и первое соотношение в (1.2).

Для доказательства второго соотношения в (1.2) рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} T(g)(T(k)T(l) - T(kl)) &= (T(g)T(k) - T(gk))T(l) + (T(gk)T(l) - T(gkl)) \\ &\quad + (T(gkl) - T(g)T(kl)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Применяя его к $x \in E$ и вычисляя норму, получаем, что

$$\|T(g)(T(k)T(l) - T(kl))x\| \leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|.$$

По определению нормы в L отсюда следует, что

$$\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leq \varepsilon\|x\|_L + 2\varepsilon\|x\|. \quad (1.4)$$

Это доказывает второе соотношение в (1.2).

Заметим теперь, что, в частности, второе соотношение в (1.2) доказывает первую часть утверждения 2), а вторая часть утверждения 2) сразу следует из первой части этого утверждения.

Рассмотрим утверждение 4). Пусть S – квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T , $R = T - S$ ограничено. Тогда T и S – квазипредставления, R ограничено и множество $\{T(gh) - T(g)T(h) = S(gh) + R(gh) - S(g)S(h) - S(g)R(h) - R(g)S(h) - R(g)R(h), g, h \in G\}$ ограничено. Отсюда следует ограниченность $\{S(g)R(h) + R(g)S(h), g, h \in G\}$. При любом фиксированном $h \in G$ это означает, что $\{S(g)R(h)x, g \in G\}$ является ограниченным множеством для любого $x \in E$. Таким образом, $R(h)x \in L$ для всех $g \in G$ и $x \in E$. Это завершает доказательство леммы.

Приведем достаточные условия того, что данное квазипредставление аменабельной дискретной группы есть ограниченное (и даже малое) возмущение обычного представления.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть G – аменабельная дискретная группа и T – (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E , $\delta < 1/2$. Предположим дополнительно, что $T(e) = 1_E$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$. Существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 1/(2-4t)$, $t \in [0, 1/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T – δ -квазипредставление, для всех $g, h \in G$ имеем $\|T(gh)T(h^{-1}) - T(g)\| \leq \delta$. В частности, $h \mapsto T(gh)T(h^{-1})$ – ограниченная операторнозначная функция. Положим $S(g) = I_h(T(gh)T(h^{-1}))$ для всех $g \in G$. Ввиду двусторонней инвариантности среднего I имеем

$$\begin{aligned} S(g) &= I_h(T(gh)T(h^{-1})) = I_h(T(gkh)T((kh)^{-1})) = I_h(T(gkh)T(h^{-1}k^{-1})) \\ &= I_h((T(gkh) - T(gk)T(h))(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) \\ &\quad + T(gk)T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) + T(gkh)T(h^{-1})T(k^{-1})) \\ &= \Delta + T(gk)I_h(T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))) + S(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, где через Δ обозначен оператор

$$I_h((T(gkh) - T(gk)T(h))(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))),$$

норма которого не превосходит δ^2 . Из соотношения $T(h)^{-1} = T(h^{-1})$, где $h \in G$, следует, что

$$I_h(T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))) = I_h(T(h)T(h^{-1}k^{-1})) - T(k^{-1}),$$

а из инвариантности среднего (с помощью замены $h \mapsto kl$ и перехода к среднему по l) заключаем, что

$$I_h(T(h)T(h^{-1}k^{-1})) - T(k^{-1}) = I_l(T(k^{-1}l)T(l)) - T(k^{-1}) = S(k^{-1}) - T(k^{-1}).$$

Получаем, что

$$S(g) = \Delta + T(gk)(S(k^{-1}) - T(k^{-1})) + S(gk)T(k^{-1}),$$

или

$$T(gk)T(k^{-1}) - T(gk)S(k^{-1}) - S(gk)T(k^{-1}) + S(g) = \Delta,$$

для всех $g, k \in G$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} (S(gk) - T(gk))(S(k^{-1}) - T(k^{-1})) &= S(gk)S(k^{-1}) - T(gk)S(k^{-1}) \\ &\quad - S(gk)T(k^{-1}) + T(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, и можно вычесть последнее тождество из предыдущего. Получаем, что

$$S(g) - S(gk)S(k^{-1}) = \Delta - (S(gk) - T(gk))(S(k^{-1}) - T(k^{-1})),$$

откуда $\|S(g) - S(gk)S(k^{-1})\| \leq 2\delta^2$, поэтому S является $2\delta^2$ -квазипредставлением группы G , причем $\|S(g) - T(g)\| \leq \delta$. Положим $T = T_n$ и $S = T_{n+1}$. Тогда при $\delta = \delta_1 < 1/2$ оценка

$$\delta_{n+1} \leq 2\delta_n^2 \leq 2^{2^{n+1}-1} \delta_1^{2^{n+1}} = \frac{1}{2} (2\delta_1)^{2^{n+1}}$$

немедленно приводит к требуемому результату для отображения, определяемого как предел (по отношению к равномерной сходимости на группе в смысле нормы оператора) $\bar{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$, которое и оказывается искомым 0-квазипредставлением, или обычным представлением.

Заметим, что приведенное выше доказательство частично использует идею метода Ньютона, использованную при установлении основного результата статьи [9] в форме, переработанной в соответствии с [23].

Следующий результат, в формулировке которого не предполагается, что квазипредставление T удовлетворяет дополнительным условиям $T(e) = 1_E$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$, может потребовать большей точности в оценке величины $\|T(g)T(h) - T(gh)\|$, $g, h \in G$, но относится к непрерывным квазипредставлениям произвольной аменабельной локально компактной группы. Кажется правдоподобным, что представление группы в банаховом пространстве, для которого образ некоторой малой окрестности единицы этой группы лежит в малом открытом шаре с центром в единичном операторе, автоматически непрерывно, но доказательство этого утверждения автору неизвестно. Поэтому в формулировке следующей теоремы есть предположение о непрерывности представления в пространстве L , которое может оказаться излишним.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть G – аменабельная локально компактная группа и T – (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E . Предположим дополнительно, что существует (обычное) непрерывное представление S_L группы G в L , для которого оператор $J_L = I(S_L(h^{-1})T(h)|_L)$ корректно определен, непрерывен и непрерывно обратим. Тогда существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$ и некоторого C .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть G – аменабельная локально компактная группа и δ -квазипредставление T в банаховом пространстве E сопряжено к (вообще говоря, неограниченному) δ -квазипредставлению группы G в банаховом пространстве E_* , где $\delta < 1/60$. Предположим дополнительно, что квазипредставление, действующее в подпространстве L , непрерывно, а L изоморфно сопряженному банахову пространству (см. утверждение 3) леммы 1.1), что выполняется автоматически, если L замкнуто в E , а E рефлексивно. Тогда существует (обычное) непрерывное представление S_L группы G в L , для которого оператор $J_L = I(S_L(h^{-1})T(h)|_L)$ корректно определен, непрерывен и непрерывно обратим, и существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 2t(1+3t)/(1-2(1+3t)(4+8(1+t)^2)t)$, $t \in [0, 1/60]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ. В условиях замечания имеем

$$\begin{aligned} \|T(g)\|_L &\leq 1 + \delta, \\ \|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L &\leq \delta\|T(l)x\| + 2\delta\|x\|, \quad g, k, l \in G, \quad x \in E \end{aligned}$$

(см. (1.2)), поэтому $\|T(k)T(l) - T(kl)\|_L \leq 3\delta$ и применение следствия из теоремы Джонсона [9], полученного в [17] (см. также [21]), показывает, что существует непрерывное

представление S_L группы G в L , удовлетворяющее условиям $\|S_L(g)\|_L \leq 2(1+\delta)$, $g \in G$, и $\|S_L - T|_L\| \leq \lambda$, где $\lambda = (4 + 8(1 + 3\delta)^2)3\delta$. Заметим, что $\sigma = 2(1 + 3\delta)\lambda < 1$ при $\delta < 1/60$. Отсюда следует, что

$$\|1_L - S_L(h^{-1})T(h)|_L\| \leq \sigma < 1,$$

тогда и $\|1 - J_L\| \leq \sigma < 1$, где $J_L = I(S_L(h^{-1})T(h)|_L)$, так что оператор J_L обратим и $\|J_L^{-1}\| \leq 1/(1 - \sigma)$. Положим $\varepsilon = 2(1 + 3\delta)\delta/(1 - \sigma)$. Дальнейшее рассуждение относится к доказательству теоремы 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Положим

$$B_L(k) = I_h(S_L(h^{-1})(T(hk) - T(h)T(k))) \in \mathcal{L}(E, L)$$

(т.е. этот оператор рассматривается как оператор из E в L ; напомним, что образ оператора $T(hk) - T(h)T(k)$ содержится в L для любых $h, k \in G$). Заметим, что $\|B_L(k)\| \leq C\delta$, если $\|S_L(k)\| \leq C$. Тогда

$$\begin{aligned} B_L(kl) &= I_h(S_L(h^{-1})(T(hkl) - T(h)T(kl))) \\ &= I_h(S_L(h^{-1})(T(hkl) - T(hk)T(l))) + I_h(S_L(h^{-1})(T(hk) - T(h)T(k)T(l))) \\ &\quad + I_h(S_L(h^{-1})T(h)(T(kl) - T(k)T(l))) \\ &= S_L(k)B_L(l) + B_L(k)T(l) + J_L(T(kl) - T(k)T(l)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

(мы использовали замену $hk \mapsto w$ и усреднение по w в первом слагаемом).

Положим $J_L^{-1}B_L(k) = C_L(k)$ и $J_L^{-1}S_L(k)J_L = \sigma(k)$, $k \in G$; в частности, σ — тоже представление группы G в L . Так как

$$jC_L(kl) = j\sigma_L(k)C_L(l) + jC_L(k)T(l) + (T(kl) - T(k)T(l)) \in \mathcal{L}(E)$$

ввиду (1.5), то

$$T(kl) - T(k)T(l) + jC_L(kl) - j\sigma_L(k)C_L(l) - jC_L(k)T(l) = 0.$$

Из определения B_L следует, что на L выполняется соотношение

$$\begin{aligned} B_L(k)|_L &= I_h(S_L(h^{-1})(T(hk) - T(h)T(k))|_L) \\ &= I_h(S_L(h^{-1})T(hk)|_L) - I_h(S_L(h^{-1})T(h))T(k). \end{aligned}$$

Мы легко получаем, что на L выполняется соотношение

$$B_L(k)|_L = \sigma_L(k)J_L - J_L T(k)|_L, \quad k \in G,$$

где использована замена $hk \mapsto l$ и усреднение по l . Тогда для C_L имеем $C_L(k)|_L = \sigma_L(k) - T(k)|_L$, $k \in G$, и для $T'(g) = T(g) + jC_L(g)$, $g \in G$, мы получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} T'(kl) - T'(k)T'(l) &= T(kl) - T(k)T(l) + jC_L(kl) - jC_L(k)T(l) \\ &\quad - jC_L(k)C_L(l) - T(k)jC_L(l) \\ &= j\sigma_L(k)C_L(l) - T(k)jC_L(l) - jC_L(k)C_L(l) \\ &= j(\sigma_L(k) - T(k)|_L - C_L(k))C_L(l) = 0 \end{aligned}$$

(в вычислении использовано соотношение $T(k)jC_L(l) = jT(k)C_L(l)$, $k, l \in G$, связанное с тем, что образ $C_L(l)$ содержится в L , а L является $T(k)$ -инвариантным). По построению $T' - T$ есть ограниченное отображение. Это завершает доказательство теоремы.

2. Структура конечномерных квазипредставлений аменабельных групп.

В этом пункте гипотеза, сформулированная в п. 1, доказывается для всех конечномерных квазипредставлений аменабельных групп. Напомним структуру произвольного конечномерного квазипредставления.

ТЕОРЕМА 2.1 [17], [21]. Пусть G – группа, T – квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T . Пусть E_T^* – пространство, сопряженное к E_T . Пусть L – множество векторов $\xi \in E_T$ таких, что орбита $\{T(g)\xi, g \in G\}$ ограничена; M – множество функционалов $f \in E_T^*$ таких, что орбита $\{T(g)^*f, g \in G\}$ ограничена в E_T^* . Тогда L и аннулятор $M^\perp$ подпространства M – векторные подпространства в E_T , инвариантные относительно T . Рассмотрим направленный по возрастанию набор подпространств $\{0\}, L \cap M^\perp, M^\perp, L + M^\perp, E = E_T$ и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g), g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp, M^\perp \setminus (L \cap M^\perp), L \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$, где “ $\setminus$ ” означает взятие дополнительного подпространства, а базис выбран так, чтобы первые две группы его элементов последовательно образовывали базисы в подпространствах $L \cap M^\perp$ и $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$, а следующие две группы элементов образовывали базисы в $L \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$, причем соответствующие элементы биортонormalного базиса принадлежали подпространству M пространства E_T^* :

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G. \quad (2.1)$$

(Здесь $t_{23}(g) = 0$, так как L инвариантно относительно T .) Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображения $\alpha, \delta, \gamma, \sigma, \chi$ ограничены;
- 2) отображения t_1 и t_2 , определяемые равенствами

$$t_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}, \quad t_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

являются представлениями группы G ;

- 3) отображение является квазикоциклом относительно представлений t_1 и t_2 , т.е. отображение

$$(g, h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h), \quad g, h \in G, \quad (2.3)$$

ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если отображение τ ограничено на некотором векторе ξ из пространства представления δ , то из формулы (2.3) следует, что отображение $(x, y) \mapsto \varphi(x)\rho(y)\xi$ ограничено по $y \in G$ (при фиксированном $x \in G$). Тогда можно показать, что общее ядро семейства $\varphi(x), x \in G$, нетривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Рассмотрим отображение вида

$$T(g) = \begin{pmatrix} 1_E & \tau(g) \\ 0 & 1_F \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

в прямой сумме линейных пространств $E + F$, где $\tau(g)$ – непрерывный линейный оператор из F в E . Такое отображение T называется *аддитивным квазипредставлением* [21], если семейство операторов

$$\{\tau(g_1 g_2) - \tau(g_1) - \tau(g_2), \quad g_1, g_2 \in G\} \quad (2.4)$$

ограничено в совокупности.

Сформулируем основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – аменабельная топологическая группа.

1) Любое конечномерное ε -квазипредставление группы G есть ограниченное возмущение обычного представления.

2) Радиус шара, содержащего все операторы этого ограниченного возмущения, определяется числом ε и нормами ограниченных компонент квазипредставления, упомянутыми в теореме 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1 непосредственно следует, что отображения t_3 и t_4 , определенные формулами

$$t_3(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \sigma(g) \\ 0 & \gamma(g) \end{pmatrix}, \quad t_4(g) = \begin{pmatrix} \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G, \quad (2.5)$$

ограничены и являются квазипредставлениями аменабельной группы G . Поэтому (по теореме 1.2) достаточно проверить оба утверждения теоремы для квазикоцикла τ . Так как компоненты σ и χ ограничены, при этой проверке мы вправе считать их нулевыми (поскольку замена их нулями есть ограниченное возмущение исходного отображения). Так как компонента γ ограничена, мы вправе считать ее представлением (по теореме 1.1; впрочем, и замена отображения γ на отображение в единичный оператор в подпространстве $L \setminus (L \cap M^\perp)$ есть ограниченное возмущение исходного отображения t). Если подпространство $L \cap M^\perp$ нульмерно, то из перечисленных выше свойств отображения t непосредственно следует, что отображение t есть ограниченное возмущение обычного представления. Фактически, достаточно установить, что τ есть ограниченное возмущение соответствующего $\{t_1, t_2\}$ -коцикла в предположении, что исходное отображение имеет блочный вид:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Пусть I – некоторое правоинвариантное среднее на G . Применим I к правой части (2.3), умноженной слева на ограниченную величину $\alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1})$, $g \in G$. Итак, если мы введем величину ψ с помощью формулы

$$\psi(h) = I_g((\alpha(g)^{-1})(\tau(gh) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h))), \quad h \in G \quad (2.6)$$

(напомним, что это среднее имеет смысл, поскольку в (2.6) функция под знаком среднего равномерно ограничена на группе G), то разность $\tau(g) - \psi(g)$, $g \in G$, будет ограниченной величиной (оцениваемой через ε и норму α). Тогда остается проверить, что ψ – коцикл относительно представлений t_1 и t_2 , т.е. что

$$\psi(gh) = \alpha(g)\psi(h) + \varphi(g)\rho(h) + \tau(g)\delta(h), \quad g, h \in G \quad (2.7)$$

(ср. (2.3)).

Чтобы проверить (2.7), найдем левую часть:

$$\psi(gh) = I_k((\alpha(k)^{-1})(\tau(kgh) - \varphi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh))), \quad g, h \in G, \quad (2.8)$$

и воспользуемся тем, что ввиду правой инвариантности I справедлива формула

$$\psi(h) = I_k((\alpha(kg)^{-1})(\tau(kgh) - \varphi(kg)\rho(h) - \tau(kg)\delta(h))), \quad g, h \in G. \quad (2.9)$$

Вычитая (2.9) из (2.8), умноженного слева на $\alpha(g)^{-1}$, и учитывая то, что α – (обычное) представление, мы находим

$$\begin{aligned} \alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k((\alpha(kg)^{-1})(\varphi(kg)\rho(h) + \tau(kg)\delta(h) \\ &\quad - \varphi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh))), \quad g, h \in G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Замечая, что t_1 и t_2 – представления группы G , и подставляя в (2.10) соответствующие выражения для функций от gh , получаем равенство

$$\begin{aligned} \alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k((\alpha(kg)^{-1})(\varphi(k)\beta(g) + \alpha(k)\varphi(g))\rho(h) + \tau(kg)\delta(h) \\ &\quad - \varphi(k)(\rho(g)\delta(h) + \beta(g)\rho(h)) - \tau(k)\delta(g)\delta(h))), \quad g, h \in G. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Перегруппируем слагаемые в правой части (2.10), выделяя в качестве сомножителя под знаком среднего группу слагаемых $\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g)$:

$$\begin{aligned} \alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k(\alpha(kg)^{-1}\varphi(k)\beta(g)\rho(h) + \alpha(g^{-1})\varphi(g)\rho(h) \\ &\quad + \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h) - \alpha(kg)^{-1}\varphi(k)\beta(g)\rho(h)) \\ &= I_k(\alpha(g^{-1})\varphi(g)\rho(h) + \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) \\ &= \alpha(g^{-1})\varphi(g)\rho(h) + I_k(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)), \quad g, h \in G. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Первое слагаемое в правой части (2.12) совпадает с первым слагаемым в (2.7) с точностью до введенного выше множителя $\alpha(g)^{-1}$. При вычислении второго множителя воспользуемся тем, что α – представление, и перестановочностью операции взятия операторного инвариантного среднего с умножением слева и справа на линейные операторы, не зависящие от параметра, по которому берется среднее:

$$\begin{aligned} &I_k(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) \\ &= I_k(\alpha(g)^{-1}\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) \\ &= \alpha(g)^{-1}I_k(\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \varphi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) \\ &= \alpha(g)^{-1}\psi(g)\delta(h), \quad g, h \in G, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где использовано определение отображения ψ с помощью (2.6). Эта величина совпадает со вторым слагаемым в (2.7) с точностью до введенного выше множителя $\alpha(g)^{-1}$, что завершает доказательство формулы (2.7) и, тем самым, доказывает теорему 2.2.

ПРИМЕР. Если в условиях замечания 2.2 положить $E = F = \mathbb{C}$ и взять в качестве G группу $SL(2, \mathbb{Z})$, а в качестве τ – псевдохарактер Радемахера, введенный в [16], то полученное двумерное квазипредставление группы G не является ограниченным возмущением никакого обычного двумерного представления этой группы. Таким образом, для представлений размерности ≥ 2 условие аменабельности группы существенно. Для одномерных представлений это не так, и любое одномерное квазипредставление любой группы есть ограниченное возмущение обычного (одномерного) представления (если это квазипредставление ограничено; если же данное одномерное квазипредставление неограничено, то оно само является обычным одномерным представлением), см. [14] и приведенную выше теорему 2.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hyers D. H. On the stability of the linear functional equation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1941. V. 27. № 2. P. 222–224.
- [2] Hyers D. H., Ulam S. M. On approximate isometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51. P. 288–292.
- [3] Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
- [4] Baker J., Lawrence J., Zorzitto F. The stability of equation $f(xy) = f(x)f(y)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 74. № 2. P. 242–246.
- [5] Gelfand I. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen // Matem. сб. 1941. Т. 9 (51). № 1. С. 49–50.
- [6] Grove K., Karcher H., Roh E. A. Jacobi fields and Finsler metrics on a compact Lie groups with an application to differential pinching problems // Math. Ann. 1974. V. 211. № 1. P. 7–21.
- [7] Johnson B. E. Approximately multiplicative functionals // J. London Math. Soc. 1986. V. 34. № 3. P. 489–510.
- [8] Johnson B. E. Continuity of generalised homomorphisms // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19. № 1. P. 67–71.
- [9] Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras // J. London Math. Soc. 1988. V. 37. № 2. P. 294–316.
- [10] Kazhdan D. On ε -representations // Israel J. Math. 1982. V. 43. № 4. P. 315–323.
- [11] Lawrence J. W. The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras // Aequationes Math. 1985. V. 28. № 1–2. P. 94–101.
- [12] Forti G. L. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1987. V. 57. P. 215–226.
- [13] Censer D. The stability problem for transformations of the circle // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1979. V. 84. P. 279–281.
- [14] Штерн А. И. Об устойчивости гомоморфизмов в группу R^* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 3. С. 29–32.
- [15] Штерн А. И. Устойчивость представлений и псевдохарактеры // Ломоносовские чтения. М.: МГУ, 1983.
- [16] Штерн А. И. Псевдохарактер, определенный символом Радемахера // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 197–198.
- [17] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 2. С. 87–91.
- [18] Штерн А. И. О жесткости положительных характеров // УМН. 1980. Т. 35. № 5. С. 218.
- [19] Штерн А. И. Непрерывные псевдохарактеры на связных локально компактных группах являются характерами // Функцион. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 4. С. 94–96.
- [20] Штерн А. И. Характеризации аменабельных групп в классе связных локально компактных групп // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 183–184.
- [21] Shtern A. I. Pseudosymmetry. I // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 3. P. 353–382.

- [22] Штерн А. И. Quasisymmetry and almost representations // Международная конференция “Классическая и квантовая геометрия однородных пространств” (Москва, 12–20 августа 1994). Тезисы докл. М.: Центр “Софус Ли”, 1994.
- [23] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 1. С. 86–87.
- [24] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных группах и некоторых групповых конструкциях // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 225–226.
- [25] Shtern A. I. Almost representations and quasi-symmetry // Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications / ed. B. P. Komrakov et al. Math. Appl. (Soviet Ser.). V. 433. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 337–358.
- [26] Shtern A. I. Triviality and Continuity of Pseudocharacters and Pseudorepresentations // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 1. P. 135–138.
- [27] de la Harpe P., Karoubi M. Representations approchées d'un groupe dans une algèbre de Banach // Manuscripta Math. 1977. V. 22. № 3. P. 297–310.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

04.02.96

Исправленный вариант

09.10.98