Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Д. Реповш, Тонкие гомотопические эквивалентность и инъективность, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 921–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:41:17

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТОНКИЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ИНЪЕКТИВНОСТЬ

С. М. Агеев, Д. Реповш

Данная статья посвящена вопросу о совпадении классов тонких гомотопических инъективностей и эквивалентностей между метрическими пространствами, поставленному Ф. Анцелем в [1]. Важность изучения свойств таких отображений и их взаимосвязей инспирирована проблемами повышения размерности пространств и сохранения свойства быть абсолютным окрестностным экстензором при клеточно-подобных отображениях (СЕ-отображениях). Классический результат Козловского [2] достаточно точно описывает ситуацию, в которой эти проблемы решаются положительно.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f: X \rightarrow Y$ есть СЕ-отображение метрических компактов, а $X \in \text{ANE}$, то следующие условия эквивалентны:*

- 1) f есть наследственная шейповая эквивалентность;
- 2) f есть тонкая гомотопическая инъективность;
- 3) f есть тонкая гомотопическая эквивалентность;
- 4) $Y \in \text{ANE}$.

При выполнении каждого из перечисленных условий $\dim Y \leq \dim X$.

Отметим также важный результат Анцеля [1], утверждающий, что если множество N_f невырожденных точек СЕ-отображения f есть счетномерное и G_δ -множество в Y , то для f выполнены все условия приведенной теоремы и, следовательно, $\dim Y \leq \dim X$.

Как оказалось, невыполнение любого из условий 1)–4) теоремы ведет к соответствующему контрпримеру. В [3] А. Н. Дранишников построил пример СЕ-отображения f конечномерного АЕ-компакта на бесконечномерный и, тем самым, не являющийся наследственной шейповой эквивалентностью.

Рассмотренные классы отображений образуют убывающую последовательность: класс наследственных шейповых эквивалентностей содержит класс тонких гомотопических инъективностей, который в свою очередь содержит класс тонких гомотопических эквивалентностей. Известно, что первые два класса не совпадают, а совпадение классов тонких гомотопических инъективностей и эквивалентностей между метрическими пространствами известно в том случае, если X и Y имеют достаточно хорошие экстензорные свойства, например, если X либо Y – абсолютные окрестностные экстензоры. Данная работа отвечает на вопрос Анцеля положительно в том случае, когда и X , и Y имеют плохую связностную структуру.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть отображение метрических пространств и для любого покрытия $\sigma \in \text{cov } Y$ существует отображение $g: Y \rightarrow X$ такое, что*

- a) Id_Y и композиция $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ являются σ -близкими;*

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 96-0712. Работа второго автора выполнена при поддержке министерства науки и технологий Республики Словения, грант № J1-7039-95.

- б) Id_X и композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ являются $f^{-1}(\sigma)$ -гомотопными;
 в) $f \simeq f \circ g \circ f[\text{rel } \sigma]$.

Тогда отображение f является тонкой гомотопической эквивалентностью, если X полно относительно некоторой метрики d .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является тонкой гомотопической инъективностью. Тогда f является тонкой гомотопической эквивалентностью, если дополнительно известно, что X является полным пространством.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является наследственной шейповой эквивалентностью, а X является ANE-пространством. Тогда f является тонкой гомотопической эквивалентностью, при этом пространство Y есть ANE.

ПРОБЛЕМА. Справедливо ли следствие 1 без предположения полноты пространства X ?

Предварительные сведения и факты. Множество всех открытых покрытий пространства X обозначим через $\text{cov } X$, а запись $\omega \in \text{cov } X$ обозначает некоторое открытое покрытие. Через $\text{cal}(\omega)$ или $\text{mesh}(\omega)$ обозначим $\sup\{\text{diam } U \mid U \in \omega\}$. Звездой (или окрестностью) множества $A \subset X$ относительно $\omega \in \text{cov } X$ будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega, U \cap A \neq \emptyset\}$ и обозначать через $N(A, \omega)$ или $\text{St}(A, \omega)$. Звездой покрытия ω относительно другого покрытия ω' назовем покрытие $\text{St}(\omega, \omega') = \{\text{St}(U, \omega') \mid U \in \omega\}$. Многократные звезды $\text{St}(\omega_1, \text{St}(\omega_2, \dots, \omega_n) \dots)$ для краткости будем обозначать через $\omega_n \circ \dots \circ \omega_2 \circ \omega_1$, а если ω_i равны между собой, то через $(\omega_1)^k$. Телом системы открытых множеств ω будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega\}$, которое обозначим через $\bigcup \omega$.

Запись $\omega \succ \omega_1$, как всегда, будет обозначать вписанность покрытия ω в ω_1 . Если $f, g: X \rightarrow Y$ — отображения, а $\omega \in \text{cov } Y$, то ω -близость f и g запишем в виде $(f, g) \prec \omega$; отображения f и g называются ω -гомотопными (кратко $f \simeq g[\text{rel } \omega]$), если существует гомотопия $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, соединяющая f и g , такая, что $\{F(x, [0, 1]) \mid x \in X\} \succ \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется наследственной шейповой эквивалентностью, если для любого замкнутого подмножества $A \subset Y$ отображение $f: f^{-1}A \rightarrow A$ является шейповой эквивалентностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется тонкой гомотопической инъективностью (тонкой гомотопической эквивалентностью), если для любого покрытия $\sigma \in \text{cov } Y$ существует отображение $g: Y \rightarrow X$ такое, что Id_X и композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ являются $f^{-1}(\sigma)$ -гомотопными (дополнительно Id_Y и композиция $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ являются σ -гомотопными).

Доказательство следующего утверждения носит технический характер, и мы его опускаем.

ЛЕММА 1. Пусть $\sigma_i \in \text{cov } Y$, $i \geq 0$, есть локально конечные покрытия Y , причем $(\sigma_{i+1})^{k+1} \succ \sigma_i$. Тогда для всех l , $1 \leq l \leq N$, имеют место следующие вписанности покрытий:

$$\sigma_l^k \circ \sigma_{l+1}^k \circ \sigma_{l+2}^k \circ \dots \circ \sigma_N^k \succ \sigma_l^{k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксировав произвольное покрытие $\omega \in Y$, построим отображение $h: Y \rightarrow X$ так, чтобы Id_Y и композиция $Y \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$ были ω -гомотопны, а Id_X и композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} X$ были $f^{-1}(\omega)$ -гомотопны. Мы построим отображение h в виде бесконечной композиции отображений.

Для этого выберем покрытие $\sigma_1 \in \text{cov } Y$, для которого $(\sigma_1)^3 \succ \omega$, $\text{cal}(\sigma_1) < 2^{-1}$. По предположению мы можем найти отображение $g_1: Y \rightarrow X$ такое, что

$$(\text{Id}_Y, f \circ g_1) \prec \sigma_1, \quad \text{Id}_X \simeq g_1 \circ f[\text{rel } f^{-1}(\sigma_1)]$$

и, следовательно, $f \simeq f \circ g_1 \circ f[\text{rel } \sigma_1]$.

Возьмем теперь покрытие $\sigma_2 \in \text{cov } Y$, для которого

$$\begin{aligned} (\sigma_2)^3 \succ \sigma_1, \quad \text{cal}(\sigma_2) < 2^{-2}, \quad \text{cal}(f \circ g_1(\sigma_2)) < 2^{-2}, \\ \text{cal}(g_1(\sigma_2)) < 2^{-2}, \quad g_1(\sigma_2) \succ f^{-1}(\sigma_1). \end{aligned}$$

По предположению существует отображение $g_2: Y \rightarrow X$, для которого

$$(\text{Id}_Y, f \circ g_2) \prec \sigma_2, \quad \text{Id}_Y \simeq g_2 \circ f[\text{rel } f^{-1}(\sigma_2)]$$

и, следовательно, $f \simeq f \circ g_2 \circ f[\text{rel } \sigma_2]$.

Отображения g_1 и $g_1 \circ (f \circ g_2)$ являются 2^{-2} -близкими, поскольку $(\text{Id}_Y, f \circ g_2) \prec \sigma_2$, а $\text{cal}(g_1(\sigma_2)) < 2^{-2}$.

Мы осуществили начальные индуктивные построения. Для большей убедительности подробно разберем еще один шаг. Возьмем покрытие $\sigma_3 \in \text{cov } X$, для которого

$$\begin{aligned} (\sigma_3)^3 \succ \sigma_2, \quad \text{cal}(\sigma_3) < 2^{-3}, \quad \text{cal}(f \circ g_2(\sigma_3)) + \text{cal}(f \circ g_1 \circ (f \circ g_2)(\sigma_3)) < 2^{-3}, \\ \text{cal}(g_2(\sigma_3)) + \text{cal}(g_1 \circ (f \circ g_2)(\sigma_3)) < 2^{-3}, \quad (g_1 \circ (f \circ g_2))(\sigma_3) \succ f^{-1}(\sigma_2). \end{aligned}$$

По предположению существует отображение $g_3: Y \rightarrow X$, для которого

$$(\text{Id}_Y, f \circ g_3) \prec \sigma_3, \quad \text{Id}_X \simeq g_3 \circ f[\text{rel } f^{-1}(\sigma_3)]$$

и, следовательно, $f \simeq f \circ g_3 \circ f[\text{rel } f^{-1}(\sigma_3)]$. Заметим, что $(g_2, g_2 \circ (f \circ g_3)) < 2^{-3}$, $(g_1 \circ (f \circ g_2), g_1 \circ (f \circ g_2) \circ (f \circ g_3)) < 2^{-3}$, так как $(\text{Id}_Y, f \circ \sigma_3) \prec \sigma_3$, а $\text{cal}(g_2(\sigma_3)) + \text{cal}(g_1 \circ (f \circ g_2)(\sigma_3)) < 2^{-3}$.

Таким образом, мы последовательно строим отображения $g_i: Y \rightarrow X$ и покрытия $\sigma_i \in \text{cov } Y$, $i = 1, 2, \dots$, для которых

- 1) $\sigma_{n+1}^3 \succ \sigma_n$;
- 2) $\text{cal}(\sigma_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$, $\text{cal}(f \circ g_n)(\sigma_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$, $\text{cal}(g_n)(\sigma_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$;
- 3) $\text{cal}(g_m \circ (f \circ g_{m+1}) \circ \dots \circ (f \circ g_n))(\sigma_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$ для всех $m < n$;
- 4) $\text{cal}((f \circ g_m) \circ (f \circ g_{m+1}) \circ \dots \circ (f \circ g_n))(\sigma_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$ для всех $m < n$;
- 5) $g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_n)(\sigma_{n+1}) \succ f^{-1}(\sigma_n)$;
- 6) $(\text{Id}_Y, f \circ g_n) \prec \sigma_n$;
- 7) $\text{Id}_X \simeq g_n \circ f[\text{rel } f^{-1}(\sigma_n)]$, $f \simeq f \circ g_n \circ f[\text{rel } \sigma_n]$;
- 8) $(g_n, g_n \circ (f \circ g_{n+1})) < 2^{-(n+1)}$, $(g_m \circ (f \circ g_{m+1}) \circ \dots \circ (f \circ g_{n+1}), g_m \circ (f \circ g_{m+1}) \circ \dots \circ (f \circ g_n)) < 2^{-(n+1)}$ для всех $m < n$.

Рассмотрим последовательность $\{g_m \circ (f \circ g_{m+1}) \circ \dots \circ (f \circ g_n)\}_{n=m+1}^\infty$, которая в силу 8) является последовательностью Коши. Так как (X, d) полно, эта последовательность сходится к

отображению $h_m: Y \rightarrow X$, $m = 1, 2, \dots$. Из 6) и 4) следует $2^{-(m+k)}$ -близость отображений $(f \circ g_m) \circ \dots \circ (f \circ g_{m+k})$ и $(f \circ g_m) \circ \dots \circ (f \circ g_{m+k-1})$. Тогда из определения h_m следует оценка $(f \circ h_m, f \circ g_m) < 2^{-(m+1)} + 2^{-(m+2)} + \dots = 2^{-m}$. Так как $(f \circ g_m, \text{Id}_X) \prec \sigma_m$, а $\text{cal}(\sigma_m) < 2^{-m}$, то $(f \circ h_m, \text{Id}_X) < 2^{-(m+1)}$, и $\lim(f \circ h_m) = \text{Id}_X$. С другой стороны, из очевидного равенства $h_m = (g_m \circ f) \circ h_{m+1}$, $m \geq 1$, и условия 7) следует $f \circ h_m = (f \circ g_m \circ f) \circ h_{m+1} \simeq f \circ h_{m+1}[\text{rel } \sigma_m]$. Поэтому $f \circ h_1 \simeq \lim(f \circ h_m) = \text{Id}_X[\text{rel}(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \succ \omega)]$.

Гомотопность $h_1 \circ f = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_n) \circ f)$ тождественному отображению Id_X относительно покрытия $f^{-1}(\omega)$ получается из следующих соотношений, в свою очередь доказываемых с помощью 5) и 7):

$$\begin{aligned} g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_{n+1}) \circ f \\ = g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_{n+1} \circ f) \\ \simeq g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_n) \circ f[\text{rel}(g_1 \circ (f \circ g_2) \circ \dots \circ (f \circ g_n)(\sigma_{n+1}) \succ f^{-1}(\sigma_n))]. \end{aligned}$$

Поэтому $h_1 \circ f$ гомотопна $g_1 \circ f$ относительно покрытия $f^{-1}(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \dots)$. Но из 7) следует $g_1 \circ f \simeq \text{Id}_X[\text{rel } f^{-1}(\sigma_1)]$. Тем самым, $h_1 \circ f \simeq \text{Id}_X[\text{rel}(f^{-1}(\sigma_1^2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \dots) \succ f^{-1}(\omega))]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ancel F. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 287. P. 1–40.
2. Kozłowski G. Images of ANR's // Trans. Amer. Math. Soc.. (to appear).
3. Дранишников А. Н. // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 11–55.