Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова, Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 924–928

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:36:08

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЛДРОЙТА

Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова

1. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + A_0 u + \sum_{k=1}^m \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} \widetilde{A_k} u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0. \quad (1)$$

Здесь $u = u(t)$ – искомая функция со значениями в $\mathcal{H}$, γ_k – положительные постоянные, $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m < \infty$; $f(t)$ – заданная функция со значениями в $\mathcal{H}$, $u^0 \in \mathcal{H}$. Через A_k ($k = 0, \dots, m$) в (1) обозначены неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы с областями определения $\mathcal{D}(A_k) = \mathcal{D}(A_0)$ и компактными обратными $0 < A_k^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ($k = 0, \dots, m$).

Вид задачи (1) и свойства операторных коэффициентов A_k позволяют перейти от интегродифференциального уравнения, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, к дифференциальному уравнению первого порядка в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, являющемся ортогональной суммой $m + 1$ экземпляров пространства $\mathcal{H}$.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96091. Работа второго и третьего авторов выполнена при частичной поддержке координационного плана № 1 научно-исследовательских работ министерства образования Украины на 1997–99 г.

Пусть $u(t)$ – сильное решение задачи (1). Вводя новые искомые функции $u_k(t)$ ($k = 0, \dots, m$) согласно формулам

$$u_0(t) := u(t), \quad u_k(t) := \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{1/2} u_0(s) ds, \quad k = 1, \dots, m,$$

перейдем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \mathcal{A}_0 \tilde{u} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}^0, \quad (2)$$

в гильбертовом пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1, \quad \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_1 := \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{H}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где

$$\tilde{u}(t) := (u_0(t), \widehat{u}_1(t))^t, \quad \widehat{u}_1(t) := (u_1(t), \dots, u_m(t))^t, \quad \tilde{f}(t) := (f(t), \widehat{0})^t, \quad \tilde{u}(0) = (u^0, \widehat{0})^t, \quad (4)$$

а оператор $\mathcal{A}_0$ в ортогональном разложении (3) имеет следующее матричное представление:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= (A_{ij})_{i,j=0}^1, \quad A_{00} := A_0, \quad A_{01} := (A_1^{1/2}, \dots, A_m^{1/2}), \\ A_{10} &:= -(A_1^{1/2}, \dots, A_m^{1/2})^t, \quad A_{11} := \text{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^m. \end{aligned} \quad (5)$$

Дальнейшее исследование свойств решений задачи (1) и ассоциированной с ней задачи (2) основано на изучении свойств матричного оператора $\mathcal{A}_0$.

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$, заданный формулами (5) на плотном в $\widetilde{\mathcal{H}}$ множестве $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(A_0) \oplus \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}$, $\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} := \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{D}(A_k^{1/2})$, $\mathcal{D}(A_k^{1/2}) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ ($k = 1, \dots, m$), является равномерно аккretивным оператором:

$$\text{Re}(\mathcal{A}_0 \tilde{u}, \tilde{u})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \geq c \|\tilde{u}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2, \quad \tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad c = \min(\lambda_1(A_0), \gamma_1) > 0,$$

где $\lambda_1(A_0)$ – минимальное собственное значение оператора A_0 .

Более того, $\mathcal{A}_0$ – в существенном максимальный аккretивный оператор, т.е. его замыкание $\overline{\mathcal{A}}_0$ – максимальный аккretивный оператор. Введем операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$, $\mathcal{D}(Q_k) = \mathcal{H}_k = \mathcal{H}$, $Q_k^+ := A_0^{-1/2} A_k^{1/2}$, $\mathcal{D}(Q_k^+) := \mathcal{D}(A_k^{1/2})$ ($k = 1, \dots, m$), а также операторные столбцы и строки $Q_{10} := (Q_1, \dots, Q_m)^t$, $\mathcal{D}(Q_{10}) = \mathcal{H}_0$, $Q_{01}^+ := (Q_1^+, \dots, Q_m^+)$, $\mathcal{D}(Q_{01}^+) = \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} \subset \widehat{\mathcal{H}}_1$. Справедливы соотношения $Q_k^+ = Q_k^* (A_k^{1/2})$ ($k = 1, \dots, m$), $Q_{01}^+ = Q_{10}^* |\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}$, причем замыкание по непрерывности оператора Q_k^+ совпадает с Q_k^* , а оператора Q_{01}^+ – с Q_{10}^* .

Теперь мы можем указать область определения оператора $\mathcal{A}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\tilde{u} = (u_0, \widehat{u}_1)^t \in \widetilde{\mathcal{H}} : u_0 + A_0^{-1/2} Q_{10}^* \widehat{u}_1 \in \mathcal{D}(A_0)\}$$

и его действие

$$\mathcal{A} \tilde{u} = (A_0(u_0 + A_0^{-1/2} Q_{10}^* \widehat{u}_1)) \oplus (-Q_{10} A_0^{1/2} u_0 + A_{11} \widehat{u}_1), \quad \tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Указанные выше свойства матричного оператора $\mathcal{A}$ позволяют свести проблему (1) к хорошо изученной задаче для дифференциального уравнения первого порядка с максимальным диссипативным операторным коэффициентом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в задаче (1) выполнены условия $u_0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $f(t) \in C^1[0, T; \mathcal{H}]$. Тогда эта задача имеет (единственное) сильное решение на $[0, T]$.

Доказательство основано на рассмотрении задачи Коши

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \mathcal{A}\tilde{u} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}^0, \quad (6)$$

и проверке существования и единственности ее решения, если $\tilde{u}(t)$, $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{u}(0)$ выражаются с помощью формул (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие непрерывной дифференцируемости функции $f(t)$ в формулировке теоремы 1 можно заменить любым другим, обеспечивающим сильную разрешимость задачи (6). В частности, можно положить $f(t) \in C[0, T; \mathcal{H}]$, $f(t) \in \mathcal{D}(A_0)$, $A_0 f(t) \in C[0, T; \mathcal{H}]$.

2. Нормальными колебаниями называют решения однородной задачи (6), зависящие от t по закону $\tilde{u}(t) = \tilde{u}e^{-\lambda t}$, $\tilde{u} \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Подставляя эти функции в однородное уравнение (6), приходим для определения амплитудных элементов $\tilde{u} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ и собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ к спектральной задаче

$$\mathcal{A}\tilde{u} = \lambda\tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (7)$$

ассоциированной с исходной эволюционной задачей (1).

ТЕОРЕМА 2. Задача (7) имеет счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_n^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ и собственными элементами $\{\tilde{u}_n^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$, $\tilde{u}_n^{(\infty)} = (u_{0n}^{(\infty)}, \hat{u}_{1n}^{(\infty)})^t \in \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}$, проекции $\{u_{0n}^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ которых на $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\mathcal{H}$. Если выполнено условие $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_0}$, то указанный базис Рисса является p_0 -базисом (с конечным дефектом) в $\mathcal{H}$.

Пусть в задаче (7) операторы A_k ($k = 1, \dots, m$), порождающие оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяют условиям

$$A_k = \alpha_k A_0, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Этот простой, но важный частный случай позволяет провести исследование спектральной задачи (7) достаточно полно. Однако, мы рассмотрим здесь более общую ситуацию, когда результат "почти" такой же:

$$Q_k^* Q_k = \alpha_k I + F_k, \quad F_k = F_k^* \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия (9), то спектр оператора $\mathcal{A}$ дискретен, за исключением ∞ и m конечных точек сгущения $\{\beta_k\}_{k=1}^m$, являющихся нулями функции

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\gamma_k - \lambda}$$

и удовлетворяющих условию $0 < \gamma_1 < \beta_1 < \dots < \gamma_m < \beta_m < \infty$. При этом $\sigma(\mathcal{A}) \setminus (\{\infty\} \cup \{\beta_k\}_{k=1}^m)$ состоит не более чем из конечного множества не вещественных собственных значений и $m+1$ ветвей положительных собственных значений, причем одна из ветвей $\{\lambda_k^{(\infty)}\}_{k=1}^\infty$ стремится к $+\infty$, а другие m ветвей $\{\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^m\}_{j=1}^m - \{\beta_k\}_{k=1}^m = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \setminus \{+\infty\}$ соответственно.

При этом если $\{\tilde{u}_n^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$, $\tilde{u}_n^{(\infty)} = (u_{0n}^{(\infty)}, \hat{u}_{1n}^{(\infty)})^t \in \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}$ (соответственно $\{\tilde{u}_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$, $\tilde{u}_n^{(j)} = (u_{0n}^{(j)}, \hat{u}_{1n}^{(j)})^t \in \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}$), – собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие ветви $\{\lambda_k^{(\infty)}\}_{k=1}^\infty$ собственных значений, стремящейся к $+\infty$ (соответственно ветвям $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^m$, стремящимся к $\{\beta_j\}$, $j = 1, \dots, m$), то их проекции $\{u_{0n}^{(\infty)}\}_{n=1}^\infty$ на $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ образуют базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\mathcal{H}$

(соответственно замкнутая линейная оболочка проекций $\{\hat{u}_{1n}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, \dots, m$, на $\widehat{\mathcal{H}}_1$ – подпространство конечной коразмерности – в $\widehat{\mathcal{H}}_1$).

При дополнительном условии

$$\text{Ker}(\mathcal{A} - \beta_j \mathcal{J}) = \{0\}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

система $\{\hat{u}_{1n}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, \dots, m$, образует базис Рисса в своей замкнутой линейной оболочке.

Если $A'(\beta_j) \gg 0$, $j = 1, \dots, m$, где

$$A(\lambda) := e_0(\lambda)I + \sum_{k=1}^m (\gamma_k - \lambda)^{-1} F_k - \lambda A_0^{-1},$$

то (без предположения (10)) проекции векторов $\{\hat{u}_{1n}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\mathcal{H}_j$, $j = 1, \dots, m$, образуют базис Рисса с конечным дефектом в $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$, $j = 1, \dots, m$.

Отметим, что при условии (8) автоматически выполнено и условие (10).

3. В качестве приложения проведенного исследования можно рассмотреть задачу о малых движениях вязкоупругой жидкости, заполняющей произвольную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см., например, [1]). Эта задача состоит в нахождении поля скоростей $\vec{u}(t, x)$ и поля давлений $p(t, x)$ из системы уравнений с краевым и начальным условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu I_0(t)(\Delta \vec{u}) + \vec{f}, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ (I_0(t)\vec{v})(t, x) &:= \vec{v}(t, x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)} \vec{v}(s, x) ds, \\ \vec{u} &= \vec{0} \quad \text{на } S = \partial\Omega, \quad \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\nu > 0$ и $\rho > 0$ – коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости соответственно, $\alpha_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$), $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m$, а $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ – плотность малого поля массовых сил, наложенного на гравитационное поле. Для перехода от (11) к задаче вида (1) будем считать функции $\vec{u}(t, x)$ и $\nabla p(t, x)$ при каждом t элементами гильбертова пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$.

Воспользуемся ортогональным разложением

$$\begin{aligned} \vec{L}_2(\Omega) &= \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \quad \vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \vec{v} = \nabla p\}, \\ \vec{J}_0(\Omega) &:= \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \text{div } \vec{u} = 0 \text{ в } \Omega, u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \end{aligned}$$

где $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к $\partial\Omega$, а $\text{div } \vec{u}$ и u_n понимаются как обобщенные функции конечного порядка (см., например, [2, § 2.1]). Тогда в силу уравнений (11) имеем $\vec{u}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla p(t, x) \in \vec{G}(\Omega)$.

Пусть P_0 – ортопроектор на $\vec{J}_0(\Omega)$, а P_G – ортопроектор на $\vec{G}(\Omega)$, $P_0 + P_G = I$. Считая функции $\vec{u}(t, x)$ и $\nabla p(t, x)$ классическим решением задачи (11) и применяя ортопроекторы P_0 и P_G к обеим частям первого уравнения (11), получим

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nu I_0(t)(A_0 \vec{u}) = \vec{f}_0(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad (12)$$

$$A_0 \vec{u} := -P_0(\Delta \vec{u}), \quad \vec{f}_0 := P_0 \vec{f}, \quad \rho^{-1} \nabla p = \nu I_0(t) P_G(\Delta \vec{u}) + P_G \vec{f}. \quad (13)$$

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω является дважды непрерывно дифференцируемой ($\partial\Omega \in C^2$). Тогда, как известно [3],

$$\mathcal{D}(A_0) = \vec{J}_0^2(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega) : \Delta \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \vec{u} = \vec{0} \text{ на } \partial\Omega\}. \quad (14)$$

Отметим также, что оператор A_0 положительно определен в $\vec{J}_0(\Omega)$, причем обратный оператор компактен: $0 < A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Задаче (12) при $m \geq 2$ отвечает обобщенная модель Олдройта вязкоупругой жидкости [4]–[8]; при $m = 1$ получаем модель Олдройта (см. [1]). Очевидно, уравнение (12) является частным случаем задачи (1) в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega)$, при этом следует заменить A_0 на νA_0 , а A_k на $\nu \alpha_k A_0$ ($k = 1, \dots, m$), где A_0 – оператор Стокса (13), (14).

Таким образом, мы находимся в условиях п. 2, значит для этой гидродинамической задачи справедливы все полученные в нем результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйрих Ф. (ред.) Реология. Теория и приложения. М.: ИЛ, 1962.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
4. Милославский А. И. // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 199–200.
5. Милославский А. И. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 532–536.
6. Милославский А. И. // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докл. Новгород: Изд. Новгородского ГПИ, 1989.
7. Милославский А. И. // Деп. УкрНИИНТИ 22. 05. 89.. № 1221.
8. Милославский А. И. // Деп. УкрНИИНТИ 22. 05. 89.. № 1321.

Воронежский государственный университет
Симферопольский государственный университет
E-mail: azizov@tom.vsu.ru

Поступило
02.09.98