Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Бабенко, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин, Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 с тригонометрическим модулем непрерывности, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 928–932

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:31:34

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В L^2 С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А. Г. Бабенко, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин

Введение. В этой работе получено новое неравенство типа Джексона–Стечкина между наилучшим L^2 -приближением произвольной комплексной 2π -периодической функции тригонометрическими полиномами и ее тригонометрическим модулем непрерывности.

Пусть L^2 – гильбертово пространство комплексных 2π -периодических функций с обычным скалярным произведением и нормой:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)};$$

T_n – пространство тригонометрических полиномов

$$g(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

порядка n с комплексными коэффициентами; $E_n(f) = \min\{\|f - g\| : g \in T_n\}$ – величина наилучшего приближения функции $f \in L^2$ пространством T_n .

Введем понятие тригонометрического модуля непрерывности для функции f из L^2 . Зафиксируем натуральное число $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, действительное число $t \in \mathbb{R}$ и рассмотрим алгебраический многочлен порядка $2r + 1$

$$\mathcal{L}(z) = (z - 1) \prod_{j=1}^r (z^2 - (2 \cos jt)z + 1) = \sum_{\nu=0}^{2r+1} \mu_\nu z^\nu, \quad (1)$$

коэффициенты которого $\mu_\nu = \mu_\nu(t, r)$ являются вещественными и зависят только от параметров

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00121, № 96-01-00122, № 97-01-00518.

ν, t, r . Символами τ_t и I обозначим соответственно оператор сдвига с шагом t и тождественный оператор: $\tau_t f(x) = f(x+t)$, $I f(x) = f(x)$. С помощью многочлена (1) определим [1] оператор конечной тригонометрической разности с шагом t :

$$\Delta_t^{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tau_t) = (\tau_t - I) \prod_{j=1}^r (\tau_t^2 - (2 \cos jt) \tau_t + I) = \sum_{\nu=0}^{2r+1} \mu_{\nu} \tau_t^{\nu}, \quad (2)$$

где τ_t^{ν} есть ν -я итерация оператора τ_t : $\tau_t^{\nu} f(x) = f(x + \nu t)$. Как известно [1] (см. также вывод формулы (11) ниже), при любом $t \in \mathbb{R}$ ядро оператора $\Delta_t^{\mathcal{L}}$ содержит пространство T_r , т.е. $\Delta_t^{\mathcal{L}} g = 0$, $g \in T_r$. Кроме того, если для функции $g \in L^2$ найдется положительное число h такое, что при всех $t \in [-h, h]$ выполняется равенство $\Delta_t^{\mathcal{L}} g = 0$, то функция g эквивалентна некоторому тригонометрическому полиному порядка r , т.е.

$$\exists h > 0 \text{ такое, что } \Delta_t^{\mathcal{L}} g = 0 \text{ при } |t| \leq h \iff g \in T_r. \quad (3)$$

Тригонометрическим модулем непрерывности функции $f \in L^2$ назовем следующую функцию переменного $h \geq 0$:

$$\omega_{\mathcal{L}}(f, h) = \sup\{\|\Delta_t^{\mathcal{L}} f\| : |t| \leq h\}. \quad (4)$$

В терминах тригонометрического модуля непрерывности утверждение (3) эквивалентно утверждению: $\exists h > 0$ такое, что $\omega_{\mathcal{L}}(f, h) = 0 \iff f \in T_r$.

Нас интересует справедливость неравенства типа Джексона–Стечкина с таким модулем непрерывности, т.е. неравенства

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K} \omega_{\mathcal{L}}\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \quad (5)$$

с конечной константой $\mathcal{K}$, общей для всех $f \in L^2$ и n , начиная с некоторого натурального числа $n_r \geq r+1$, зависящего только от r . А именно, вопрос о конечности величины

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}, n_r) = \sup\{\mathcal{K}_n(\mathcal{L}) : n \geq n_r\},$$

где

$$\mathcal{K}_n(\mathcal{L}) = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_{\mathcal{L}}(f, \pi/n)} : f \in L^2, f \notin T_r\right\} \quad (6)$$

является наименьшей константой в неравенстве (5) при фиксированном $n \geq r+1$.

1. Формулировка основного результата. В данной работе в случае $n_r = 2r+1$ дан положительный ответ на поставленный выше вопрос. Точнее, получены следующие два утверждения, в которых через v обозначена функция

$$v(t) = (\sin nt) / \left(\left(1 + 2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{\cos jt} \right) \left(\prod_{j=1}^r \cos jt \right)^2 \right). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть n, r – натуральные числа. Тогда для любой функции $f \in L^2$ при $n \geq 2r+1$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq 2^{-r-1/2} \left(\int_0^{\pi/n} v(t) \|\Delta_t^{\mathcal{L}} f\|^2 dt / \int_0^{\pi/n} v(t) \prod_{j=1}^r (\cos jt)^2 dt \right)^{1/2}. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любых $f \in L^2$ и $n \geq 2r + 1$, $n, r \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство (5) с конечной константой

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n &= \left(2^{-2r-1} \int_0^{\pi/n} v(t) dt \Big/ \int_0^{\pi/n} v(t) \prod_{j=1}^r (\cos jt)^2 dt \right)^{1/2} \\ &< 2^{-r-1/2} \Big/ \prod_{j=1}^r \cos \frac{j\pi}{n} \leq 2^{-r-1/2} \Big/ \prod_{j=1}^r \cos \frac{j\pi}{2r+1}. \end{aligned}$$

Кроме того, в случае $n \geq r + 1$ в неравенстве (5) нельзя взять константу $\mathcal{K}$ меньше, чем 2^{-2r-1} .

2. Редукция к неравенству для функций, представимых рядами по неотрицательным косинус-полиномам специального вида. Возьмем произвольную функцию $f \in L^2$ и разложим ее в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = (f, e_k), \quad (9)$$

где через e_k обозначена функция $e_k(x) = e^{ikx}$. Хорошо известно, что величина наилучшего приближения функции f пространством T_{n-1} выражается через ее коэффициенты Фурье следующим образом:

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{|k| \geq n} |c_k|^2. \quad (10)$$

Из определения (2) оператора $\Delta_t^{\mathcal{L}}$ тригонометрической разности с произвольным шагом $t \in \mathbb{R}$ видно, что он является линейным ограниченным оператором из L^2 в L^2 . Поэтому для каждой функции $f \in L^2$ вида (9) имеем

$$\Delta_t^{\mathcal{L}} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Delta_t^{\mathcal{L}} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left((e^{ikt} - 1) \prod_{j=1}^r (e^{i2kt} - (2 \cos jt) e^{ikt} + 1) \right) e^{ikx}.$$

Отсюда с помощью равенства Парсеваля получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^{\mathcal{L}} f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| c_k (e^{ikt} - 1) \prod_{j=1}^r (e^{i2kt} - (2 \cos jt) e^{ikt} + 1) \right|^2 \\ &= 2^{2r+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 (1 - \cos kt) \prod_{j=1}^r (\cos jt - \cos kt)^2 \\ &= 2^{2r+1} \sum_{|k| \geq r+1} |c_k|^2 (1 - \cos kt) \prod_{j=1}^r (\cos jt - \cos kt)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$P(t, u) = (1 - u) \prod_{j=1}^r (a_j - u)^2, \quad a_j = a_j(t) = \cos jt, \quad u \in [-1, 1]. \quad (12)$$

Из формул (10), (11) следует, что при $n - 1 \geq r$ квадрат величины (6) совпадает с точностью до множителя 2^{-2r-1} с наименьшей константой $c = c_n(\mathcal{L})$ в неравенстве

$$\sum_{k \geq n} \rho_k \leq c \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi/n} \sum_{k \geq r+1} \rho_k P(t, \cos kt)$$

на классе всех суммируемых неотрицательных последовательностей $\{\rho_k\}_{k=r+1}^\infty$:

$$\sum_{k \geq r+1} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq r+1.$$

Нетрудно заметить, что, на самом деле, величина $c_n(\mathcal{L})$ совпадает с наименьшей константой c в неравенстве

$$\sum_{k \geq n} \rho_k \leq c \cdot \sup_{0 \leq t \leq \pi/n} \sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt) \quad (13)$$

на классе всех суммируемых неотрицательных последовательностей $\{\rho_k\}_{k=n}^\infty$:

$$\sum_{k \geq n} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq n.$$

Таким образом, величина

$$c_n(\mathcal{L}) = \sup \left\{ \sum_{k \geq n} \rho_k / \sup_{0 \leq t \leq \pi/n} \sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt) : 0 < \sum_{k \geq n} \rho_k < \infty, \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}$$

при $n, r \in \mathbb{N}$, $n-1 \geq r$, связана с величиной (6) соотношением

$$\mathcal{K}_n^2(\mathcal{L}) = 2^{-2r-1} c_n(\mathcal{L}).$$

3. Верхняя и нижняя оценки. В этом пункте мы приведем доказательства теорем 1, 2. Отметим, что первое утверждение теоремы 2 дает оценку сверху для точной константы $\mathcal{K}_n(\mathcal{L})$ (см. (6)) в неравенстве (5) при $n \geq 2r+1$, а второе утверждение этой теоремы дает оценку снизу для указанной константы при $n \geq r+1$. Для доказательства неравенства (8) мы применим схему работ [2], [3], а также один прием, который использовался в [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Идея доказательства состоит в следующем. Возьмем произвольную ненулевую суммируемую последовательность неотрицательных чисел $\{\rho_k\}_{k=n}^\infty$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt), \quad (14)$$

участвующий в правой части неравенства (13). При произвольном фиксированном $t \in [0, \pi/n]$ оценим каждое слагаемое этого ряда снизу, заменив функцию $p_t(u) = P(t, u)$ линейной, являющейся касательной к графику функции $p_t(u)$ в точке $u = 0$. Затем, проинтегрировав полученное неравенство с неотрицательным весом $(\sin nt)/B(t)$ по параметру $t \in [0, \pi/n]$, получим требуемое утверждение (здесь B – положительная функция, определенная формулами (15) ниже).

Перейдем к подробному изложению доказательства. Наряду с функцией $P(t, u)$, заданной формулой (12), определим еще три:

$$Q(t, u) = \frac{\partial P(t, u)}{\partial u}, \quad A(t) = P(t, 0) = \prod_{j=1}^r a_j^2, \quad B(t) = -Q(t, 0) = \left(1 + 2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{a_j}\right) A(t), \quad (15)$$

где $a_j = a_j(t) = \cos jt$. В случае $n \geq 2r+1$ при каждом фиксированном $t \in [0, \pi/n]$ выполняются неравенства $0 < a_r \leq a_{r-1} \leq \dots \leq a_1 \leq 1$. Поэтому при указанных ограничениях на параметры n, r, t функция $P(t, u)$ является выпуклой вниз по переменной u на $(-\infty, a_r]$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$P(t, u) \geq A(t) - B(t)u, \quad -\infty < u \leq 1.$$

Таким образом, для ряда (14) получается оценка

$$\sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt) \geq A(t) \sum_{k \geq n} \rho_k - B(t) \sum_{k \geq n} \rho_k \cos kt, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right].$$

Кроме того, при указанных ограничениях на параметры n, r, t функции A, B строго положительны. Проинтегрировав обе части этого неравенства с весом $(\sin nt)/B(t)$ по $t \in [0, \pi/n]$, получим

$$\int_0^{\pi/n} \frac{\sin nt}{B(t)} \sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt) dt \geq \sum_{k \geq n} \rho_k \int_0^{\pi/n} \frac{A(t)}{B(t)} \sin nt dt - \sum_{k \geq n} \rho_k \int_0^{\pi/n} \cos kt \sin nt dt.$$

Отсюда, учитывая

$$\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin nt dt \leq 0$$

при $k \geq n$, приходим к неравенству

$$\sum_{k \geq n} \rho_k \leq \int_0^{\pi/n} \frac{\sin nt}{B(t)} \sum_{k \geq n} \rho_k P(t, \cos kt) dt \bigg/ \int_0^{\pi/n} \frac{A(t)}{B(t)} \sin nt dt,$$

которое в силу (7), (15) и (11) эквивалентно неравенству (8). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Первое утверждение теоремы 2 следует из неравенства (8) и определения (4). С помощью функции $e_n(x) = e^{inx}$ и равенства (11) получаем, что при любом $\delta > 0$ (в частности, при $\delta = \pi/n$) отношение $E_{n-1}(e_n)/\omega_{\mathcal{L}}(e_n, \delta)$ больше, чем 2^{-2r-1} . Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевалдин В. Т. // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 5. С. 721–740.
2. Черных Н. И. // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
3. Черных Н. И. // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
4. Бабенко А. Г. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 333–355.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: babenko@approx.imm.intec.ru,
 chernykh@approx.imm.intec.ru,
 vtshev@apprekat.imm.intec.ru

Поступило
 20.01.98