Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Допустимые функции для октанта, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 466–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:45:33

УДК 517.5

ДОПУСТИМЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОКТАНТА

А. Л. Якимив

В заметке приводятся примеры допустимых функций для октанта, являющихся многомерными обобщениями правильно меняющихся функций одной переменной, введенных в 1930 году Йованом Караматой. Допустимые функции для произвольного замкнутого выпуклого острого телесного n -мерного конуса были введены Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в 1984 году в связи с приложениями в тауберовой теории и математической физике. Применения допустимых функций конуса при исследовании асимптотики многомерных безгранично делимых законов распределения на бесконечности получены в 2003 году автором.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Допустимые функции для произвольного замкнутого выпуклого острого телесного конуса в $\mathbb{R}^n$ были введены Дрожжиновым и Завьяловым в 1984 году в работе [1] в связи с приложениями в тауберовой теории и математической физике. Они явились глубоким обобщением правильно меняющихся функций одной переменной, введенных в 1930 году Караматой [2], на многомерный случай.

В работе [3] автор использовал понятие допустимой функции при исследовании асимптотики на бесконечности многомерных безгранично делимых законов распределения, сосредоточенных в замкнутом выпуклом остром телесном однородном конусе.

Само по себе понятие допустимости трудно проверяемо непосредственно для большинства функций нескольких переменных. В связи с этим в работе Дрожжинова и Завьялова [4] и в книге Владимирова, Дрожжинова и Завьялова [5] был разобран ряд примеров таких функций.

В настоящей заметке мы продолжаем разбор примеров допустимых функций в случае, когда рассматриваемая область их определения является n -мерным октантом $\mathbb{R}_+^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}$.

2. Достаточные условия допустимости функций для октанта. Мы будем рассматривать произвольные семейства $U = \{U_k, k \in I \subseteq (0, \infty)\}$ линейных операторов, сохраняющих конус $\mathbb{R}_+^n$ инвариантным:

$$U_n \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+^n \quad \forall k \in I,$$

считая, что ∞ есть предельная точка I .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01080, и программы президента РФ "Ведущие научные школы", грант № НШ-1758.2003.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $g(x)$, определенная и положительная в $\mathbb{R}_+^n$, называется *допустимой для $\mathbb{R}_+^n$* , если для произвольного семейства линейных операторов $U = \{U_k, k \in I \subseteq (0, \infty)\}$, сохраняющих инвариантным $\mathbb{R}_+^n$, найдется подсемейство $V = \{U_k, k \in J \subseteq I\}$ (∞ – предельная точка J), для которого

1) существует вектор $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что

$$\frac{g(U_k x)}{g(U_k x_0)} \stackrel{x \in K}{\Rightarrow} \varphi(x) \in (0, \infty), \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in J,$$

где K – произвольный компакт из $\mathbb{R}_+^n$, а $\varphi(x)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}_+^n$;

2) справедлива оценка: существует k_0 такое, что

$$\frac{g(U_k x)}{g(U_k x_0)} \leq \psi(x), \quad k > k_0, \quad k \in J, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

причем ψ имеет медленный рост в $\mathbb{R}_+^n$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\psi(x)}{1 + |x|^p} dx < \infty$$

для некоторого $p \geq 0$.

Пусть случайный вектор ξ имеет безгранично делимое распределение в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$: в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ существует σ -конечная мера $\nu(dx)$ (возможно, неограниченная в окрестности нуля) такая, что

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty, \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

и

$$\text{Me}^{-(\lambda, \xi)} = \exp \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}_+^n} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx) \right)$$

для произвольного $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ (см. [6]). Мера ν называется *спектральной мерой Леви* безгранично делимого распределения случайного вектора ξ . Положим

$$\widetilde{\mathbb{R}}_+^n(x) = \{y : y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n, \exists i = 1, \dots, n : y_i > x_i\},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. В работе [3] показано, что если функция $g(x) = \nu(\widetilde{\mathbb{R}}_+^n(x))$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, является допустимой для $\mathbb{R}_+^n$, то

$$\mathbf{P}\{\xi \in \widetilde{\mathbb{R}}_+^n(x)\} = (1 + o(1))g(x)$$

при $x \in \mathbb{R}_+^n$ и $\min(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \infty$. Этот результат продолжает исследования асимптотики многомерных безгранично делимых распределений, проводившихся ранее в работах В. М. Круглова и его ученика С. Н. Антонова [7]–[15], М. С. Сгибнева [16], А. М. Улановского [17], Е. Омея [18] и автора [6]. В связи с упомянутым результатом [3] представляет интерес разбор конкретных примеров допустимых функций $g(x)$ для $\mathbb{R}_+^n$. Займемся этим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $g(x)$, определенная, положительная, не возрастающая по каждой переменной и дифференцируемая на $\mathbb{R}_+^n$, называется *сильно допустимой* для $\mathbb{R}_+^n$, если для всех $i = 1, \dots, n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$\frac{x_i \partial g(x) / \partial x_i}{g(x)} \geq \alpha > -1. \quad (1)$$

Если выполнено левое неравенство в (1) для некоторого конечного α , то мы будем писать

$$\text{ind } g = \min_{i=1, \dots, n} \inf_{x \in \mathbb{R}_+^n} \frac{x_i \partial g(x) / \partial x_i}{g(x)}. \quad (2)$$

В работе Дрожжинова и Завьялова [4] показано, что всякая сильно допустимая функция для $\mathbb{R}_+^n$ является допустимой функцией для $\mathbb{R}_+^n$ (см. также [5, гл. II, разд. 5.2, теорема 1]).

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ сильно допустимы для $\mathbb{R}_+^n$. Тогда при $c > 0$ функции $cf(x)$ и $f(x) + g(x)$ тоже сильно допустимы для $\mathbb{R}_+^n$, причем

$$\text{ind}(cf) = \text{ind } f \quad (3)$$

и

$$\text{ind}(f + g) \geq \min(\text{ind } f, \text{ind } g). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 1 относительно $cf(x)$ следует сразу из определения сильной допустимости функции. Докажем утверждение леммы 1 относительно $f(x) + g(x)$. Так как $f(x)$ и $g(x)$ не возрастают в $\mathbb{R}_+^n$, то $\text{ind } f \leq 0$ и $\text{ind } g \leq 0$, поэтому для произвольных $i = 1, \dots, n$ и $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} \frac{x_i \partial f(x) / \partial x_i + x_i \partial g(x) / \partial x_i}{f(x) + g(x)} &\geq \frac{f(x) \text{ind } f + g(x) \text{ind } g}{f(x) + g(x)} \\ &\geq \frac{f(x) \min(\text{ind } f, \text{ind } g) + g(x) \min(\text{ind } f, \text{ind } g)}{f(x) + g(x)} \\ &= \min(\text{ind } f, \text{ind } g) > -1, \end{aligned}$$

откуда следует (4). Лемма 1 доказана.

Через $\mathfrak{F}$ обозначим класс функций распределения на $\mathbb{R}_+^1$ таких, что для произвольной функции распределения $F(x) \in \mathfrak{F}$ верно представление

$$1 - F(x) \equiv \overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right) \quad \forall x \geq 0 \quad (5)$$

для некоторой измеримой функции $\varepsilon(x)$ на $\mathbb{R}_+^1$, обладающей свойствами:

$$0 \leq \inf_{0 \leq x < \infty} \varepsilon(x) \leq \sup_{0 \leq x < \infty} \varepsilon(x) < 1, \quad (6)$$

$$\int_0^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du < \infty \quad \text{для произвольного } x \in (0, \infty), \quad (7)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon(u)}{u} du = \infty. \quad (8)$$

Заметим, что произвольная измеримая функция $\varepsilon(x)$, обладающая свойствами (6)–(8), определяет некоторую функцию распределения $F(x)$, удовлетворяющую (5). В самом деле, из (6) следует, что $\varepsilon(x)$ неотрицательна при $x \geq 0$, стало быть, $\overline{F}(x)$ не возрастает, а $F(x)$ не убывает при $x \geq 0$. Кроме того, из (5) следует, что $F(0) = 0$, а из (8) следует, что $F(\infty) = 1$. Таким образом, условия (6)–(8) действительно определяют некоторую функцию распределения $F(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть спектральная мера Леви ν безгранично делимого распределения абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+^n$ и имеет вид

$$\nu(A) = \int_A h(x) dx, \quad (9)$$

где A – произвольное борелевское множество из $\mathbb{R}_+^n$,

$$h(x) = \sum_{i=1}^m c_i h_i(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (10)$$

а $c_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, – некоторые положительные постоянные,

$$h_i(x) = h_{i1}(x_1) \cdots h_{in}(x_n) \quad (11)$$

для произвольных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $i = 1, \dots, m$, где $h_{ij}(t)$ – плотности функций распределения $F_{ij}(t) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда функция $g(x) = \nu(\widetilde{\mathbb{R}}_+^n(x))$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, сильно допустима для конуса $\mathbb{R}_+^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 достаточно проверить справедливость теоремы 1 для случая $m = 1$ и $c_1 = 1$. Тогда при $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$h(x) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n),$$

где $h_i(t)$ – плотности функций распределения $F_i(t) \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \dots, n$. Мы имеем при $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\mathbb{R}_+^n(x) = \{y : y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n, y_i \leq x_i \ \forall i = 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \frac{x_1 \partial g(x) / \partial x_1}{g(x)} \\
 &= \frac{x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\nu(\mathbb{R}_+^n) - \int_{\mathbb{R}_+^n(x)} h_1(y_1) \cdots h_n(y_n) dy)}{\nu(\mathbb{R}_+^n) - \int_{\mathbb{R}_+^n(x)} h_1(y_1) \cdots h_n(y_n) dy} \\
 &= \frac{x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (1 - F_1(x_1) \cdots F_n(x_n))}{1 - F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)} = \frac{-x_1 h_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)}{1 - F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)} \\
 &\geq \frac{-x_1 h_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)}{F_2(x_2) \cdots F_n(x_n) - F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)} \\
 &= -\frac{x_1 h_1(x_1)}{\overline{F}_1(x_1)} = -\varepsilon_1(x_1) \geq -\alpha_1 > -1,
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1(t)$ – функция из представления (5), соответствующая функции распределения $F_1(t)$,

$$\alpha_1 = \sup_{0 \leq t < \infty} \varepsilon_1(t) < 1.$$

Точно так же для некоторых чисел $\alpha_i \in (0, 1)$ и всех $i = 1, \dots, n$ мы имеем при $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$0 \geq \frac{x_i \partial g(x) / \partial x_i}{g(x)} \geq -\alpha_i > -1.$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы некоторые числа $p, q \in \mathbb{N}$, постоянные $c_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}^1$, векторы $l_j \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, p+q$, и возрастающая положительная дифференцируемая функция $r(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, причем

$$\frac{t \partial r(t) / \partial t}{r(t)} \leq b < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^1 \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} \beta_j &< 0, & i = 1, \dots, n, & j = 1, \dots, p, \\
 \alpha_{ij} \beta_j &> 0, & i = 1, \dots, n, & j = p+1, \dots, p+q.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Если

$$\gamma = \left(\min_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, p} \alpha_{ij} \beta_j - \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=p+1, \dots, p+q} \alpha_{ij} \beta_j \right) b > -1, \quad (14)$$

то функция

$$g(x) = r \left(\frac{\sum_{j=1}^p c_j (l_j, x^{\alpha_j})^{\beta_j}}{\sum_{j=p+1}^{p+q} c_j (l_j, x^{\alpha_j})^{\beta_j}} \right), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (15)$$

сильно допустима для $\mathbb{R}_+^n$. Здесь

$$x^{\alpha_j} = (x_1^{\alpha_{1j}}, \dots, x_n^{\alpha_{nj}}).$$

Настоящая теорема обобщает соответствующую теорему из книги Владимирова, Дрожжинова и Завьялова [5, гл. II, разд. 5.4] на случай произвольных степеней α_j вектора x (там были $\alpha_j \equiv (1, 1, \dots, 1)$, $j = 1, \dots, p+q$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $l \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha_i \beta < 0$, $i = 1, \dots, n$, для произвольных $x \in \mathbb{R}_+^n$ мы имеем

$$\frac{x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(l, x^\alpha)^\beta}{(l, x^\alpha)^\beta} = \frac{x_i \alpha_i l_i x_i^{\alpha_i - 1} \beta_i (l, x^\alpha)^{\beta - 1}}{(l, x^\alpha)^\beta} = \frac{\alpha_i \beta l_i x_i^{\alpha_i}}{(l, x^\alpha)} \geq \alpha_i \beta.$$

Поэтому, пользуясь соотношением (13), точно так же, как и в лемме 1, мы устанавливаем, что при

$$u(x) = \sum_{j=1}^p c_j (l_j, x^{\alpha_j})^{\beta_j}$$

и

$$v(x) = \sum_{j=p+1}^{p+q} c_j (l_j, x^{\alpha_j})^{\beta_j}$$

для произвольных $k = 1, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}_+^n$ имеет место неравенство

$$\frac{x_k \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}}{u(x)} \geq \min_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, p} \alpha_{ij} \beta_j$$

и неравенство

$$\frac{x_k \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}}{v(x)} \leq \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=p+1, \dots, p+q} \alpha_{ij} \beta_j.$$

Полагая $w(x) = u(x)/v(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, мы имеем при $k = 1, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} \frac{x_k \frac{\partial w(x)}{\partial x_k}}{w(x)} &= \frac{x_k \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} v(x)}{u(x) v(x)} - \frac{x_k \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} u(x) v(x)}{u(x) v^2(x)} = \frac{x_k \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}}{u(x)} - \frac{x_k \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}}{v(x)} \\ &\geq \min_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, p} \alpha_{ij} \beta_j - \max_{j=p+1, \dots, p+q} \alpha_{ij} \beta_j. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $g(x) = r(w(x))$, то при $k = 1, \dots, n$ и $x \in \mathbb{R}_+^n$ в силу соотношений (12) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{x_k \frac{\partial g(x)}{\partial x_k}}{g(x)} &= \frac{x_k r'(w(x)) \frac{\partial w(x)}{\partial x_k}}{r(w(x))} = \frac{x_k r'(w(x)) \frac{\partial w(x)}{\partial x_k} w(x)}{r(w(x)) w(x)} \\ &\geq \left(\min_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, p} \alpha_{ij} \beta_j - \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=p+1, \dots, p+q} \alpha_{ij} \beta_j \right) b > -1 \end{aligned}$$

согласно (12). Теорема 2 доказана.

Другие примеры сильно допустимых функций для $\mathbb{R}_+^n$ можно строить аналогичным образом, в частности, образуя линейные комбинации функций из теоремы 1 и теоремы 2, рассматривая произведения такого рода функций (в последнем случае дополнительно нужно следить за выполнением правого неравенства в соотношении (1)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Теоремы сравнения тауберова типа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 3. С. 532–535.
- [2] Karamata J. Sur un mode croissant régulière des fonctions // Mathematica. 1930. V. 4. P. 38–53.
- [3] Якимив А.Л. Тауберовы теоремы и асимптотика безгранично делимых распределений в конусе // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 3. С. 487–502.
- [4] Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы сравнения для обобщенных функций в конусах // Матем. сб. 1985. Т. 126(168). № 4. С. 515–542.
- [5] Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
- [6] Yakymiv A. L. The asymptotics of multidimensional infinitely divisible distributions // J. Math. Sci. 1997. V. 84. № 3. P. 1197–1207.
- [7] Антонов С.Н. К асимптотическому поведению безгранично делимых законов // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 6. С. 939–946.
- [8] Антонов С.Н., Круглов В.М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 4. С. 625–642.
- [9] Антонов С.Н., Круглов В.М. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. № 4. С. 735–742.
- [10] Круглов В.М. Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15. № 2. С. 330–336.
- [11] Круглов В.М. Интегралы по безгранично делимым распределениям в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 6. С. 669–676.
- [12] Круглов В.М. Сходимость числовых характеристик сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. № 4. С. 734–752.
- [13] Круглов В.М. О безгранично делимых распределениях в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 4. С. 585–594.
- [14] Круглов В.М. Характеризация одного класса распределений в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 5. С. 777–782.
- [15] Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1984.
- [16] Сгибнев М.С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbb{R}^n$ // Тр. ин-та матем. СО АН СССР. 1989. Т. 13. С. 100–116.
- [17] Улановский А.М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1981. Т. 35. С. 100–107.
- [18] Omei E. Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J. 1985. V. 33. № 1–2. P. 39–48.