Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев, Спектральные свой-

ства оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 932–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:
IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:28:46

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев

1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$ly = -y'' + A(x)y, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ – вектор-функция, $A(x)$ – эрмитова матрица порядка n с элементами $a_{ij}(x) \in C^2[0, \infty)$. Обозначим через $L_n^2[0, \infty)$ комплексное гильбертово пространство n -мерных вектор-функций со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_k \int_0^\infty y_k(t) \overline{z_k(t)} dt,$$

а через L_0 минимальный оператор, порожденный выражением (1) в $L_n^2[0, \infty)$. Хорошо известно [1],

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96091, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00127.

что исследование спектральных свойств оператора L_0 и его самосопряженных расширений тесно связано с изучением асимптотического поведения фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения

$$ly = \lambda y \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Исследованию спектральных свойств сингулярного оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций посвящены работы [2]–[4]. В [2] для весьма общей ситуации (вектор-функции со значениями в бесконечномерном гильбертовом пространстве) спектральные свойства оператора описаны в терминах собственных значений матрицы $A(x)$. В [3] для $n = 2$ и положительно определенной матрицы $A(x)$ было показано, что спектральные свойства оператора определяются не только поведением на бесконечности собственных значений матрицы $A(x)$, но и скоростью вращения собственных векторов этой матрицы. В [4] был рассмотрен случай отрицательно определенной матрицы $A(x)$, $n = 2$. В настоящей заметке изучается асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$ ФСР системы (2) как в случае, когда асимптотика решений определяется поведением на бесконечности собственных значений матрицы $A(x)$, так и в случае, когда асимптотика решений определяется в терминах матрицы вращений собственных векторов матрицы $A(x)$.

2. Рассмотрим матрицу $A(x) = \Lambda_0(x) + G(x)$, где $\Lambda_0(x)$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_i^0(x)$. Пусть $g_{ij}(x)$ – элементы матрицы $G(x)$. Положим

$$\|G(x)\| = \max_{i,j} |g_{ij}(x)|, \quad d(x) = \max_{\substack{k,i,j \\ k \neq i}} \left| \frac{g_{ij}(x)}{\lambda_i^0(x) - \lambda_k^0(x)} \right|.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует натуральное n такое, что

- 1) $\|G(x)\|d^n(x) \in L[x_0, \infty)$;
- 2) $\left(\frac{g_{ij}(t)}{\lambda_i^0(t) - \lambda_k^0(t)} \right)' \in L[x_0, \infty)$, $i \neq k$.

Тогда существует матрица $T(x)$ такая, что

- а) $T^{-1}(x)(\Lambda_0(x) + G(x))T(x) = \Lambda(x) + D(x)$, где $\Lambda(x)$ – диагональная матрица и

$$\int_{x_0}^{\infty} \|D(t)\| dt < \infty;$$

- б) $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = I$;

- в) $\int_{x_0}^{\infty} \|T^{-1}(t)T'(t)\| dt < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вместо $\Lambda_0(x) + G(x)$ матрицу $\Lambda_0(x) + \varepsilon G(x)$ и будем искать диагональные матрицы $\Lambda_i(x)$ и матрицы $T_i(x)$ такие, что

$$(\Lambda_0(x) + \varepsilon G(x)) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x) \varepsilon^i = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x) \varepsilon^i \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i(x) \varepsilon^i. \quad (3)$$

Приравнявая в (3) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\Lambda_0(x)T_n(x) - T_n(x)\Lambda_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\Lambda_{n-k}(x) - G(x)T_{n-1}(x). \quad (4)$$

Отсюда заключаем, что

$$T_0 = I, \quad \Lambda_1(x) = 0, \quad (T_1(x))_{ij} = \frac{g_{ij}(x)}{\lambda_j^0(x) - \lambda_i^0(x)}, \quad (T_1(x))_{ii} = 0,$$

для $n \geq 2$

$$\Lambda_n(x) = \text{diag}(G(x)T_{n-1}(x)),$$

$$(T_n(x))_{ij} = \frac{1}{\lambda_i^0(x) - \lambda_j^0(x)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) \Lambda_{n-k}(x) - G(x)T_{n-1}(x) \right)_{ij}, \quad i \neq j, \quad (T_n(x))_{ii} = 0.$$

Оценим теперь нормы матриц $T_n(x)$ и $\Lambda_n(x)$. Заметим, что элементы матрицы $T_n(x)$ есть суммы произведений n элементов вида

$$\frac{g_{ki}(x)}{\lambda_k^0(x) - \lambda_j^0(x)},$$

откуда следует, что

$$\|T_n(x)\| \leq a_n d^n(x), \quad \|\Lambda_n(x)\| \leq b_n \|G(x)\| d^{n-1}(x), \quad (5)$$

где a_n и b_n — некоторые постоянные.

Далее, из формул для элементов матрицы $T_n(x)$ получаем

$$\|T'_n(x)\| \leq c_n d^{n-1}(x) \max_{\substack{k,i,j \\ k \neq j}} \left| \left(\frac{g_{ki}(x)}{\lambda_k^0(x) - \lambda_i^0(x)} \right)' \right|.$$

Поэтому в силу условия 2) теоремы имеем

$$\int_{x_0}^{\infty} \|T'_n(x)\| dx < \infty.$$

Из соотношения (4) следует, что

$$\begin{aligned} (\Lambda_0(x) + \varepsilon G(x)) \sum_{k=0}^n T_k(x) \varepsilon^k &= \sum_{k=0}^n T_k(x) \varepsilon^k \sum_{k=0}^n \Lambda_k(x) \varepsilon^k - \varepsilon^{n+1} G(x) T_n(x) \\ &+ \sum_{j=1}^n \varepsilon^{n+j} \sum_{k=j}^n T_k(x) \Lambda_{n+j-k}(x). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &= \sum_{k=0}^n T_k(x) \varepsilon^k, \quad \Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \Lambda_k(x) \varepsilon^k, \\ F(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^n \varepsilon^{n+j} \sum_{k=j}^n T_k(x) \Lambda_{n+j-k}(x) - \varepsilon^{n+1} G(x) T_n(x), \quad D(\varepsilon) = T^{-1}(\varepsilon) F(\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} T_n(x) = 0$, $T_0 = I$, из (5) следует, что $\|D(\varepsilon)\| \leq \text{const} \|G(x)\| d^n(x)$. Следовательно,

$$T^{-1}(\varepsilon, x) (\Lambda_0(x) + \varepsilon G(x)) T(\varepsilon, x) = \Lambda(\varepsilon) + D(\varepsilon, x), \quad (6)$$

где $D(\varepsilon) \in L[x_0, \infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(\varepsilon, x) = I, \quad \int_{x_0}^{\infty} \|T^{-1}(\varepsilon, x) T'(\varepsilon, x)\| dx < \infty.$$

Теперь, полагая в (6) $\varepsilon = 1$, получаем утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для элементов $\lambda_k(x)$ матрицы $\Lambda(x)$ справедлива оценка

$$\int_{x_0}^{\infty} |\lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x)| dx < \infty,$$

где $\tilde{\lambda}_i(x)$ – соответствующее собственное значение матрицы $\Lambda_0(x) + G(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6) следует, что собственные значения матриц $\Lambda_0(x) + \varepsilon G(x)$ и $\Lambda(x) + D(\varepsilon, x)$ совпадают. Поэтому из теоремы Гершгорина [5] получаем, что $|\lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x)| < \|D\|$, а поскольку

$$\int_{x_0}^{\infty} \|D(\varepsilon, x)\| dx < \infty,$$

то

$$\int_{x_0}^{\infty} |\lambda_i(x) - \tilde{\lambda}_i(x)| dx < \infty.$$

3. Пусть теперь $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, – собственные значения матрицы $A(x)$, $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$, $U(x)$ – унитарная матрица, приводящая матрицу $A(x)$ к диагональному виду, $Q(x) = U^*(x)U'(x)$ с элементами $q_{ij}(x)$, $\bar{q}_i(x)$ – столбцы матрицы $Q(x)$.

Введем в рассмотрение матричный пучок

$$F(p, x, \lambda) = (Q(x) + pI)^2 - \Lambda(x) + \lambda I + (pI + 2Q(x))\mu^{-1}(x, \lambda)\mu'(x, \lambda), \quad (7)$$

где $\mu(x, \lambda) = (\Lambda(x) - \lambda I)^{1/2}$. Собственные значения пучка (7) обозначим через $p_k(x, \lambda)$. В этом пункте мы изучим поведение при $x \rightarrow \infty$ ФСР (1) в предположении, что матрица $Q(x)$ подчинена в некотором смысле матрице $\Lambda(x)$. Введем в рассмотрение функции, характеризующие степень подчиненности матрицы $Q(x)$ матрице $\Lambda(x)$:

$$f(x) = \max_{\substack{i,j,k \\ i \neq k}} \left(\left(|q_{ij}(x)| + \left| \frac{\langle \bar{q}_i(x), \bar{q}_j(x) \rangle}{\mu_i(x, \lambda)} \right| \right) \left| \frac{1}{\mu_i(x, \lambda) \pm \mu_k(x, \lambda)} \right| \right),$$

где $\langle \bar{q}_i(x), \bar{q}_j(x) \rangle = (Q^2(x))_{ij}$, и

$$\sigma(x) = \max_{j, i \neq k} \left(\left| \left(\frac{q_{ij}(x)}{\mu_i(x, \lambda) \pm \mu_k(x, \lambda)} \right)' \right| + \left| \left(\frac{\langle \bar{q}_i(x), \bar{q}_j(x) \rangle}{\mu_i(x, \lambda)(\mu_i(x, \lambda) \pm \mu_k(x, \lambda))} \right)' \right| \right).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ и существует натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что

- а) $\int_{x_0}^{\infty} (\|Q(t)\| + \|Q^2(t)\mu^{-1}(t, \lambda)\| f^n(t)) dt < \infty$;
- б) $\int_{x_0}^{\infty} |q'_{ij}(t)\mu_i^{-1}(t, \lambda)(t)| dt < \infty$;
- в) $\int_{x_0}^{\infty} \sigma(t) dt < \infty$;
- г) $\text{Re}(p_k(t, \lambda) - p_j(t, \lambda)) \neq 0$ для $x_0 < x$, $k \neq j$.

Тогда система (1) имеет ФСР, для которой при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$y_k(x, \lambda) = U(x)\mu^{-1}(x, \lambda) \exp \int_{x_0}^x p_k(t, \lambda) dt \bar{E}_k,$$

где $\bar{E}_k$ – базисные векторы в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в системе уравнений (2) $y = Uz$ и умножим слева на U^* . Получим

$$-z'' - 2Qz' + (\Lambda - Q^2 - Q' - \lambda I)z = 0. \quad (8)$$

Полагая $v_1 = z$, $v_2 = z'$, перейдем от системы (8) к системе уравнений первого порядка в пространстве вектор-функций размерности $2n$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Lambda - Q^2 - Q' - \lambda I & -2Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Положим в (9) $F = TV$, где

$$T = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & \mu^{-1} \\ I & -I \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F' = (\Lambda_0 + G + B)F, \quad (10)$$

где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \mu(x, \lambda) & 0 \\ 0 & -\mu(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q'(x)\mu^{-1}(x, \lambda) & Q'(x)\mu^{-1}(x, \lambda) \\ -Q'(x)\mu^{-1}(x, \lambda) & -Q'(x)\mu^{-1}(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^2(x) - \mu'(x, \lambda) & Q^2(x) - \mu'(x, \lambda) \\ -Q^2(x) - \mu'(x, \lambda) & -Q^2(x) + \mu'(x, \lambda) \end{pmatrix} \mu^{-1}(x, \lambda) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -Q(x) & Q(x) \\ Q(x) & -Q(x) \end{pmatrix}.$$

В силу условий а), в), г) к матрице $\Lambda_0 + G$ может быть применена теорема 1, откуда следует существование матрицы $\Theta(x)$ такой, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Theta(x) = 0, \quad \int_{x_0}^{\infty} \|(I + \Theta(t))^{-1} \Theta'(t)\| dt < \infty,$$

$$(I + \Theta(x))^{-1} (\Lambda_0 + G) (I + \Theta(x)) = \Psi + D, \quad \int_{x_0}^{\infty} \|D(t)\| dt < \infty,$$

$\Psi(x, \lambda)$ – диагональная матрица с элементами $\psi_i(x, \lambda)$. Полагая в (10) $F = (I + \Theta)W$, получим систему уравнений

$$W' = (\Psi + D + (I + \Theta)^{-1} \Theta' + (I + \Theta)^{-1} B(I + \Theta))W. \quad (11)$$

Согласно условию б) теоремы

$$\int_{x_0}^{\infty} \|(I + \Theta(t))^{-1} B(I + \Theta(t))\| dt < \infty.$$

Для системы (11) выполнены все условия теоремы об L -диагональных системах [1], следовательно, система (11) имеет фундаментальную систему решений

$$W_k(x, \lambda) = \exp \int_{x_0}^x \psi_k(t, \lambda) dt \cdot (I + o(1)) \overline{E}_k.$$

Учитывая проделанные ранее замены, получим асимптотическую формулу для ФСР системы (1)

$$y_k(x, \lambda) = U(x) \mu^{-1}(x, \lambda) \exp \int_{x_0}^x \psi_k(t, \lambda) dt \cdot (I + o(1)) \overline{E}_k.$$

Покажем теперь, что

$$\int_{x_0}^{\infty} |\psi_k(t, \lambda) - p_k(t, \lambda)| dt < \infty,$$

где $p_k(t, \lambda)$ – собственные значения пучка (7).

В самом деле, заметим, что собственные значения матриц Ψ и $(I + \Theta)^{-1}(\Lambda_0 + G)(I + \Theta)$ совпадают с точностью до слагаемого из $L_1[x_0, \infty)$. Далее, справедлива цепочка матричных подобий

$$\begin{aligned}(I + \Theta)^{-1}(\Lambda_0 + G)(I + \Theta) &\sim \Lambda_0 + G \sim T^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Lambda_0 - Q^2 - \lambda I & -2Q \end{pmatrix} - T' T^{-1} \right) T \\ &\sim \begin{pmatrix} -\mu' \mu^{-1} & I \\ \Lambda_0 - Q^2 - \lambda I & -2Q \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Найдем собственные значения последней матрицы:

$$\begin{pmatrix} -\mu' \mu^{-1} & I \\ \Lambda_0 - Q^2 - \lambda I & -2Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $y_2 = (\mu' \mu^{-1} + pI)y_1$; следовательно,

$$(\Lambda_0 - Q^2 - \lambda I)y_1 - (2Q + pI)(\mu' \mu^{-1} + pI)y_1 = 0.$$

Откуда получаем, что

$$\det(\Lambda_0 - Q^2 - \lambda I - 2Q\mu' \mu^{-1} - p\mu' \mu^{-1} - 2pQ - p^2 I) = \det((Q + pI)^2 - \Lambda + \lambda I + (pI + 2Q)\mu^{-1} \mu') = 0.$$

Таким образом, собственные значения матричного пучка (7) совпадают с $\psi_k(x, \lambda)$ с точностью до суммируемых на $[x_0, \infty)$ слагаемых. Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР. Пусть $n = 2$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} ax^\alpha \cos^2 x^\gamma + bx^\beta \sin^2 x^\gamma & \frac{1}{2}(ax^\alpha - bx^\beta) \sin 2x^\gamma \\ \frac{1}{2}(ax^\alpha - bx^\beta) \sin 2x^\gamma & ax^\alpha \sin^2 x^\gamma + bx^\beta \cos^2 x^\gamma \end{pmatrix},$$

где $a < 0$, $b < 0$, $\alpha \leq 0$, $\beta > 2$. Легко проверить, что $\lambda_1(x) = ax^\alpha$, $\lambda_2(x) = bx^\beta$; матрица, приводящая $A(x)$ к диагональному виду, есть

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x^\gamma & -\sin x^\gamma \\ \sin x^\gamma & \cos x^\gamma \end{pmatrix};$$

а матрица

$$Q(x) = \gamma x^{\gamma-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\gamma < \alpha/2 + 1$, то выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, справедливы асимптотические формулы этой теоремы, в которых $p_{1,2}(x, \lambda) = \pm \sqrt{ax^\alpha - \lambda}$, $p_{3,4}(x, \lambda) = \pm \sqrt{bx^\beta - \lambda}$. Из этих формул вытекает, что при $\gamma < \alpha/2 + 1$ индексы дефекта оператора L_0 равны (3, 3). Стандартные рассуждения (см. [1]) показывают, что спектр любого самосопряженного расширения оператора L_0 содержит при этом дискретную и непрерывную части.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 2. Костюченко А. Г., Левитан Б. М. // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 1. С. 86–96. 3. Исмагилов Р. С. // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 6. С. 667–675. 4. Султанаев Я. Т. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 9. С. 1673–1683. 5. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.

Башкирский государственный университет
E-mail: yavdat@bguu.bashkiria.su

Поступило
26.01.98