Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Гаврон, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, Классы сопряженности группы автоморфизмов дерева, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 938–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:42:40

1. Введение. После работы Титса [1] исследования групп автоморфизмов деревьев различного типа проводились в многочисленных работах различных авторов. Например, в [1] Титс исследовал нормальное строение группы автоморфизмов дерева. Нормальное строение группы автоморфизмов корневого дерева описано в [2] и [3]. Знойко [4] доказал, что группы автоморфизмов регулярных деревьев совершенны, Моллер [5] охарактеризовал их максимальные подгруппы. Действия свободных групп и амальгамированных свободных произведений на деревьях исследовались в [6]. Некоторые проблемы о группах автоморфизмов дерева были поставлены Линдоном в [7].

В ряде работ исследовались классы сопряженности в группах автоморфизмов дерева. В [4] доказано, что все отражения порядка 2 сопряжены в группе автоморфизмов дерева. Критерий сопряженности для автоморфизмов корневого сферически однородного дерева сформулирован в [8]. В [3] доказано, что все сферически транзитивные автоморфизмы сферически однородного корневого дерева сопряжены между собой.

Полная система представителей классов сопряженности в группе автоморфизмов корневого бинарного дерева построена в [9]. В [10] доказано, что группа автоморфизмов регулярного дерева является амбивалентной, т.е. любой ее элемент сопряжен со своим обратным.

В данной заметке мы дадим полное описание классов сопряженности автоморфизмов локально конечного дерева и локально конечного корневого дерева.

Все ранее известные характеристики классов сопряженности являются следствиями нашего описания.

2. Предварительные сведения. Пусть $V = VT$ – множество вершин (неориентированного) дерева T , $E = ET$ – множество его ребер. Через $\{a, b\}$ мы будем обозначать ребро, соединяющее вершины a, b . Вершины a, b смежные, если $\{a, b\} \in E$. Последовательность попарно различных вершин $(a_1, \dots, a_n)$ таких, что $\{a_i, a_{i+1}\} \in ET$ для всех $i = 1, \dots, n-1$, называется *путем* в дереве T , соединяющим вершины a_1 и a_n . Для каждой двух вершин $x, y \in VT$ существует единственный путь $\Pi(x, y)$, соединяющий x и y . Функция $d(x, y) = |\Pi(x, y)|$, $x, y \in V$, где $|\Pi|$ – длина пути (число ребер), является метрикой на V . В бесконечных деревьях можно рассматривать пути, бесконечные в одну или в обе стороны. Бесконечный в одну сторону путь $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ называется *лучем* в дереве T , а последовательность $(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$, где $\{a_i, a_{i+1}\} \in ET$, $i \in \mathbb{Z}$, называется *прямой* в T . На каждой прямой можно задать две ориентации. Прямая с фиксированной ориентацией называется *ориентированной*.

Подстановка π множества VT является автоморфизмом дерева T , если она сохраняет отношение смежности вершин на T , т.е. если для любых $x, y \in VT$ из $\{x, y\} \in ET$ следует $\{x^\pi, y^\pi\} \in ET$.

Группу всех автоморфизмов дерева T будем обозначать через $\text{Aut } T$.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть $u \in \text{Aut } T$. Тогда справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 94-3420.

- 1) существует $a \in VT$ такая, что $a^u = a$;
- 2) существует единственное ребро $\{a, b\} \in ET$ такое, что $a^u = b$ и $b^u = a$;
- 3) существует единственная прямая L дерева T такая, что $L^u = L$ и ограничение $u|_L$ автоморфизма u на L является сдвигом, т.е. при некотором натуральном d_0 для всех $a \in L$ имеет место равенство $d(a, a^u) = d_0$.

Аutomорфизмы типа 1), 2) и 3) называются *вращениями, отражениями и сдвигами* соответственно. Каждый сдвиг индуцирует естественным образом ориентацию на инвариантной прямой направлением сдвига.

Пусть $G < \text{Aut } T$ – подгруппа группы автоморфизмов дерева T , $\bar{V} = V/G$ – множество ее орбит при действии на вершинах, а $\bar{E} = E/G$ – множество ее орбит при действии на ребрах дерева T . Определим граф орбит T/G следующим образом. Вершинами этого графа являются элементы $\bar{V}$, а две орбиты $\bar{x}, \bar{y}$ соединены ребром $\bar{e}$ в T/G тогда и только тогда, когда существуют представители $x \in \bar{x}, y \in \bar{y}, e \in \bar{e}$ такие, что $e = \{x, y\}$. Заметим, что граф T/G , вообще говоря, не является симплициальным, т.е. может иметь кратные ребра и петли.

В частности, граф орбит циклической группы $\langle u \rangle$, порожденной автоморфизмом $u \in \text{Aut } T$, обозначим через T_u и назовем *графом орбит* автоморфизма u . *Орбитальным типом автоморфизма u* называется граф орбит T_u с вершинами, помеченными кардинальными числами, равными мощностям соответствующих орбит. Орбитальный тип автоморфизма u будем обозначать через $T(u)$. Два орбитальных типа *эквивалентны*, если они изоморфны как помеченные деревья, т.е. если существует их изоморфизм как графов, сохраняющий метки вершин.

Группа $\text{Aut } T$ действует на регулярном дереве T импримитивно. Единственной нетривиальной системой импримитивности $\text{Aut } T$ на множестве VT является разбиение на классы эквивалентности “ $\sim$ ”, заданной условием

$$x \sim y \iff d(x, y) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Это разбиение состоит из двух классов V_0 и V_1 . Подгруппа $(\text{Aut } T)^+ < \text{Aut } T$ автоморфизмов, сохраняющих множества V_0, V_1 , имеет индекс 2 в группе $\text{Aut } T$ и является простой [1].

Сдвиг принадлежит подгруппе $(\text{Aut } T)^+$ тогда и только тогда, когда он сдвигает инвариантную прямую на четное расстояние.

Дерево T с фиксированной вершиной x_0 называется *корневым деревом*, а вершина x_0 – *корнем* этого дерева. Множество вершин корневого дерева естественным образом распадается в дизъюнктное объединение $V = \bigcup_{k \geq 0} V_k$, где $V_k = \{x : d(x_0, x) = k\}$. Множество V_k называется *k-й сферой (слоем)* корневого дерева (T, x_0) .

Аutomорфизмами *корневого дерева (T, x_0)* являются автоморфизмы дерева T , фиксирующие вершину x_0 . Следовательно, группа автоморфизмов $\text{Aut}(T, x_0)$ корневого дерева (T, x_0) совпадает со стабилизатором вершины x_0 в группе автоморфизмов дерева T :

$$\text{Aut}(T, x_0) = \text{St}_{\text{Aut } T}(x_0).$$

Корневое дерево называется *однородным на сфере k* , если степени всех его вершин k -й сферы равны. Дерево называется *сферически однородным*, если оно однородно на каждой сфере. Сферически однородное дерево однозначно определяется своим *сферическим индексом* – последовательностью чисел $[n_0, n_1, n_2, \dots]$, где n_k – число ребер, соединяющих вершину k -й сферы с вершинами $(k+1)$ -й сферы. Сферически однородное корневое дерево сферического индекса $[n, n, \dots]$ называется *n-регулярным корневым деревом*, или просто *регулярным корневым деревом*.

3. Классы сопряженности в группе автоморфизмов корневого дерева.

ЛЕММА 2. Для любой группы автоморфизмов $G \leq \text{Aut}(T, x_0)$ граф орбит T/G является деревом. В частности, граф орбит произвольного автоморфизма корневого дерева является деревом.

Введенное в п. 2 понятие орбитального типа позволяет сформулировать критерий сопряженности в группе автоморфизмов корневого дерева, являющийся обобщением критерия сопряженности подстановок в симметрической группе.

ТЕОРЕМА 1. *Аutomорфизмы корневого дерева (T, x_0) сопряжены в группе $\text{Aut}(T, x_0)$ тогда и только тогда, когда их орбитальные типы эквивалентны.*

Будем говорить, что автоморфизм $u \in \text{Aut}(T, x_0)$ является *сферически транзитивным*, если циклическая группа $\langle u \rangle$ действует транзитивно на каждой сфере дерева (T, x_0) .

СЛЕДСТВИЕ 1 [3]. *Произвольные два сферически транзитивных автоморфизма корневого дерева (T, x_0) сопряжены в $\text{Aut}(T, x_0)$.*

Группа G называется *амбивалентной*, если любой ее элемент сопряжен со своим обратным.

СЛЕДСТВИЕ 2 [10]. *Для любого корневого дерева (T, x_0) группа $\text{Aut}(T, x_0)$ является амбивалентной.*

4. Сопряженность в группе автоморфизмов некорневого дерева. Пусть T – произвольное дерево. Ясно, что автоморфизм, сопряженный с вращением (отражением, сдвигом), также является вращением (отражением, сдвигом соответственно). Поэтому можно описывать классы сопряженности в $\text{Aut } T$ отдельно для каждого случая.

Вращение u (некорневого) дерева T можно рассматривать как автоморфизм корневого дерева (T, x_0) , где x_0 – неподвижная точка автоморфизма u . Орбитальным типом этого автоморфизма (корневого дерева) является помеченное корневое дерево. Оно определяет помеченное дерево (без фиксации корневой вершины), которое назовем *орбитальным типом вращения u* . Определенный таким образом орбитальный тип автоморфизма не зависит от выбора неподвижной точки x_0 . Соответственно два орбитальных типа вращений некорневого дерева называются *эквивалентными*, если они изоморфны как помеченные деревья.

ТЕОРЕМА 2. *Вращения $u, v \in \text{Aut } T$ сопряжены в $\text{Aut } T$ тогда и только тогда, когда их орбитальные типы эквивалентны.*

Пусть u – отражение дерева T и x_0, y_0 – смежные вершины такие, что $x_0^u = y_0$ и $y_0^u = x_0$. Построим новое дерево T^* , присоединив к VT новую вершину p . Соединим p с вершинами x_0, y_0 и удалим ребро $\{x_0, y_0\}$. Действие автоморфизма u на множестве вершин дерева T можно продолжить до T^* , полагая $p^u = p$; при этом полученное действие будет автоморфизмом корневого дерева (T^*, p) .

Орбитальным типом отражения u дерева T назовем орбитальный тип автоморфизма u корневого дерева (T^, p) .*

ТЕОРЕМА 3. *Отражения $u, v \in \text{Aut } T$ сопряжены в группе $\text{Aut } T$ тогда и только тогда, когда их орбитальные типы эквивалентны.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Знойко [4] установил, что все отражения порядка 2 в группе автоморфизмов регулярного дерева сопряжены. Все вершины орбитальных типов (кроме корневой) для таких автоморфизмов помечены числом 2, и несложно заметить, что они эквиваленты.

Смещением автоморфизма $u \in \text{Aut } T$ назовем число $d(u) = \min_{x \in T} (x, d(x))$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $u, v \in \text{Aut } T$ – сдвиги с инвариантными (ориентированными направлением сдвига) прямыми L_1, L_2 . Автоморфизмы u, v сопряжены в группе $\text{Aut } T$ тогда и только тогда, когда L_1, L_2 принадлежат одной орбите действия $\text{Aut } T$ на множестве ориентированных прямых дерева T и смещения $d(u)$ и $d(v)$ равны.*

Так как группа автоморфизмов регулярного дерева T действует на множестве ориентированных прямых транзитивно, из теоремы 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Сдвиги u, v регулярного дерева T сопряжены тогда и только тогда, когда $d(u) = d(v)$.*

Из сформулированных выше теорем 2–4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для любого регулярного дерева T его группа автоморфизмов является амбивалентной.*

5. Сопряженность в $(\text{Aut } T)^+$ для случая регулярного дерева. Пусть T – регулярное дерево. Группа $(\text{Aut } T)^+$ состоит из всех вращений и всех сдвигов с четным смещением. Поскольку дерево T регулярное, $(\text{Aut } T)^+$ действует на множестве ориентированных прямых дерева T транзитивно.

ТЕОРЕМА 5. *Сдвиги дерева T , принадлежащие группе $(\text{Aut } T)^+$, сопряжены в $(\text{Aut } T)^+$ тогда и только тогда, когда их смещения равны.*

Два вращения u, v дерева T сопряжены в $\text{Aut } T$ тогда и только тогда, когда существуют две вершины x_0, y_0 дерева T , лежащие в одном блоке непримитивности, такие, что x_0 – неподвижная точка автоморфизма u , а y_0 – неподвижная точка автоморфизма v , и орбитальные типы u, v как автоморфизмов корневых деревьев (T, x_0) и (T, y_0) соответственно эквивалентны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tits J. // Essays on Topology and Related Topics. Mémoire dédiées à G. de Rham. Berlin: Springer, 1980. P. 188–211.
2. Сушанский В. И. // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: ИМ АН Украины, 1993. С. 269–289.
3. Bass H., Otero-Espinar M. V., Rockmore D. N., Tresser C. P. L. Cyclic Renormalisation and Automorphism Groups of Rooted Trees. Berlin: Springer, 1996.
4. Знойко Д. В. // Матем. сб. 1977. Т. 32. № 1. С. 109–115.
5. Möller R. // J. London Math. Soc. (2). 1991. V. 43. P. 236–252.
6. Serre J.-P. Trees. New York: Springer, 1988.
7. Lyndon R. // Combinatorial Groups Theory and Topology / ed. S. M. Gersten, J. R. Stallings. Ann. of Math. Stud. Princeton: Princeton Univ. Press, 1987. P. 3–33.
8. Безущак О. Е., Сушанский В. И. // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 7–8. С. 1031–1038.
9. Brunner A. M., Sidki S. // J. Algebra. 1997. V. 195. P. 465–486.
10. Сушанский В. И. // Доп. АН України. 1992. Т. 11. С. 5–9.

Institute of Mathematics, Silesian Technical University
Киевский университет им. Т. Шевченко
E-mail: pgawron@zeus.polsl.gliwice.pl,
nazaruk@ukrpack.net,
wsusz@zeus.polsl.gliwice.pl

Поступило
12.07.99