Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зелик, Аттрактор нелинейной системы уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$ и оценки его ε -энтропии, *Матем.*

заметки, 1999, том 65, выпуск 6, 941–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:00:15

АТТРАКТОР НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В $\mathbb{R}^n$ И ОЦЕНКИ ЕГО ε -ЭНТРОПИИ

С. В. Зелик

В пространстве $x \in \mathbb{R}^n$ рассматривается квазилинейная параболическая система уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}\partial_t u - a \Delta_x u + f(u) &= g, \\ u|_{t=0} &= u_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $u = (u^1, \dots, u^k)$ – неизвестная вектор-функция, Δ_x – оператор Лапласа по переменной $x = (x^1, \dots, x^n)$; $f = (f^1, \dots, f^k)$ и $g = g(x) = (g^1, \dots, g^k)$ – заданные функции, a – заданное положительное число.

Системы вида (1) при различных предположениях относительно нелинейной функции f и правой части g изучались многими авторами (см., например, [1]–[3]).

В настоящей работе предполагается, что функция f удовлетворяет условиям:

- 1) $f \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$;
- 2) $f(v) \cdot v \geq -C + \alpha|v|^2$ для всех $v \in \mathbb{R}^k$, где $\alpha > 0$, а $u \cdot v$ есть скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Предполагается также, что правая часть $g \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p > n/2$ и $p \geq 2$ и имеет конечную норму

$$|g|_b = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|g\|_{L^p(B^1_{x_0})} < \infty. \quad (2)$$

Здесь и далее $B^r_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$. Банахово пространство, порожаемое нормой (2), обозначим через L^p_b , а банахово пространство, порожаемое нормой

$$\|v\|_b = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|v\|_{W^{2,p}(B^1_{x_0})},$$

– через $W^{2,p}_b$. Как обычно, $W^{p,l}(\Omega)$ есть соболевское пространство функций в области Ω , производные которых до порядка l включительно принадлежат L^p .

Под решением уравнения (1) понимается функция

$$u \in C(\mathbb{R}_+, W^{2,p}_b) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^p_b), \quad (3)$$

удовлетворяющая (1) в смысле равенства в пространстве L^p_b . (Отметим, что согласно теореме вложения [4] из (3) следует, что $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, поэтому нелинейная функция $f(u)$ определена корректно.) Таким образом, мы рассматриваем лишь ограниченные при $|x| \rightarrow \infty$ решения задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются перечисленные выше условия. Тогда для любого $u_0 \in W^{2,p}_b$ задача (1) имеет единственное решение u , удовлетворяющее условию (3), и справедлива оценка

$$\|u(t)\|_b \leq Q(\|u_0\|_b)e^{-\beta t} + Q(|g|_b),$$

где Q – некоторая монотонная функция, зависящая только от f и a , а константа $\beta > 0$.

Таким образом, задача (1) порождает полугруппу

$$S_t : W^{2,p}_b \rightarrow W^{2,p}_b, \quad S_t u_0 = u(t), \quad (4)$$

где $u(t)$ – решение задачи (1). Более того, из оценки (1) следует, что полугруппа S_t обладает поглощающим множеством в пространстве $W^{2,p}_b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\mathcal{A} \subset W^{2,p}_b$ называется аттрактором полугруппы (4), если выполнены следующие условия:

- 1) множество $\mathcal{A}$ – компакт в пространстве Фреше $W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$;
- 2) множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно полугруппы S_t , т.е. $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$ при $t \geq 0$;
- 3) множество $\mathcal{A}$ притягивает ограниченные подмножества пространства $W^{2,p}_b$, т.е. для любого ограниченного $\mathcal{B} \subset W^{2,p}_b$ и любой $W^{2,p}_{\text{loc}}$ -окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ существует $T = T(\mathcal{B}, \mathcal{O})$ такое, что $S_t \mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$ при $t \geq T$.

Отметим, что согласно определению топологии в пространстве $W^{2,p}_{\text{loc}}$ условие 1) определения 1 означает, что сужение $\mathcal{A}|_{B^r_{x_0}}$ множества $\mathcal{A}$ на любой шар $B^r_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ компактно в пространстве $W^{2,p}(B^r_{x_0})$.

Аналогично, условие 3) эквивалентно следующему: для любого шара $B^r_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$, любой окрестности $\mathcal{O}$ множества $\mathcal{A}|_{B^r_{x_0}}$ в пространстве $W^{2,p}(B^r_{x_0})$ и произвольного ограниченного множества $\mathcal{B} \subset W^{2,p}_b$ существует $T = T(B^r_{x_0}, \mathcal{B}, \mathcal{O})$ такое, что $S_t \mathcal{B}|_{B^r_{x_0}} \subset \mathcal{O}$ при $t \geq T$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда полугруппа S_t , порожденная уравнением (1), обладает аттрактором $\mathcal{A}$ в смысле определения 1. Кроме того,

$$\mathcal{A} = \{u(0), u \in C_b(\mathbb{R}, W^{2,p}_b) \text{ – решение (1), определенное для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывают элементарные примеры, аттрактор $\mathcal{A}$ задачи (1) не является, вообще говоря, компактным в равномерной топологии пространства $W_b^{2,p}$.

Оставшаяся часть работы посвящена изучению аттрактора $\mathcal{A}$, построенного в теореме 2. Заметим, что в отличие от случая ограниченной области $x \in \Omega$ в неограниченных областях аттрактор $\mathcal{A}$ задачи (1) может иметь бесконечную хаусдорфову и фрактальную размерность, поэтому для его исследования используется понятие колмогоровской ε -энтропии. Напомним (см., например, [5]), что колмогоровской ε -энтропией компактного множества K в метрическом пространстве M называется величина

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K) \equiv \ln \mathcal{N}_\varepsilon(K),$$

где $\mathcal{N}_\varepsilon(K)$ – наименьшее число ε -шаров в M , которыми можно покрыть компакт K .

Оценки колмогоровской энтропии аттракторов неавтономных уравнений в ограниченных областях получены в [6].

Для того чтобы применить понятие ε -энтропии к исследованию аттрактора задачи (1), необходимо фиксировать метрику на аттракторе (из замечания 1 следует, что метрика пространства $W_b^{2,p}$ не подходит, так как $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является компактом в этой метрике). Для этого нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через L_{exp}^p банахово пространство функций из L_{loc}^p , порождаемое нормой

$$\|g\|_{L_{\text{exp}}^p}^p \equiv \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} |g(x)|^p dx.$$

Соболевское пространство функций, обобщенные производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству L_{exp}^p , обозначим через $W_{\text{exp}}^{l,p}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – аттрактор задачи (1), построенный в теореме 2. Тогда топологии, индуцированные на $\mathcal{A}$ вложением $\mathcal{A} \subset W_{\text{loc}}^{2,p}$ и вложением $\mathcal{A} \subset W_{\text{exp}}^{2,p}$, совпадают.

Утверждение леммы 1 является простым следствием ограниченности аттрактора $\mathcal{A}$ в пространстве $W_b^{2,p}$.

Всюду далее предполагается, что на аттракторе $\mathcal{A}$ фиксирована метрика пространства $W_{\text{exp}}^{2,p}$. Отметим, что согласно лемме 1 и определению аттрактора $\mathcal{A}$ – компакт в $W_{\text{exp}}^{2,p}$ и, таким образом, его колмогоровская ε -энтропия в $W_{\text{exp}}^{2,p}$ конечна.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{A}$ – аттрактор задачи (1), построенный в теореме 2. Тогда

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n+1},$$

где энтропия вычисляется в метрике пространства $W_{\text{exp}}^{2,p}$, а константа C зависит от коэффициентов уравнения (1), нелинейной функции f и правой части g .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, B_{x_0}^r)$ есть ε -энтропия множества $\mathcal{A}|_{B_{x_0}^r}$ в пространстве $W^{2,p}(B_{x_0}^r)$. Тогда

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, B_{x_0}^{\ln(1/\varepsilon)}) \leq C_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n+1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем s -размерностью компактного множества K в метрическом пространстве M ($s \in \mathbb{R}_+$) величину

$$d_s(K) \equiv \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(K)}{(\ln(1/\varepsilon))^s}.$$

Отметим, что в случае $s = 1$ получается определение фрактальной размерности.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}$ – аттрактор уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$, построенный в теореме 2. Тогда его $(n+1)$ -размерность конечна: $d_{n+1}(\mathcal{A}) < \infty$.

В заключение приведем пример оценки снизу ε -энтропии аттрактора. Рассмотрим в пространстве $x \in \mathbb{R}^n$ следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \partial_t A - a \Delta_x A + \alpha A - A|A|^2 &= 0, \\ A|_{t=0} &= A_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $A = A_1 + iA_2$, $a, \alpha > 0$. Уравнение (5) является частным случаем обобщенного уравнения Гинсбурга–Ландау (см. [7]).

Нетрудно проверить, что уравнение (5), переписанное в вещественной форме, имеет вид (1) и удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Таким образом, уравнение (5) обладает аттрактором $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{A}$ – аттрактор задачи (5). Тогда справедливы оценки

$$C_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n+1} \leq \mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq C_2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n+1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babin A.V., Vishik M.I. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1990. V. 116. № 3–4. P. 221–243.
2. Efendiev M. A., Miranville A. // Discrete Contin. Dynam. Systems. 1999. V. 5. № 2. P. 399–424.
3. Merino S. // J. Differential Equations. 1996. V. 132. P. 87–106.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
5. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. // УМН. 1959. Т. 14. № 2. С. 3–86.
6. Вишик М. И., Чепыжов В. В. // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 2. С. 81–110.
7. Temam R. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer, 1988.