Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, С. Н. Пузанов, Корректность задачи горения вязкого газа в случае негладких данных и полудискретный метод ее решения, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 944–948

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:28:12

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ГОРЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В СЛУЧАЕ НЕГЛАДКИХ ДАННЫХ И ПОЛУДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

А. А. Злотник, С. Н. Пузанов

Теория глобальных решений уравнений одномерного движения вязкого газа при начальных данных из пространства W_2^1 изложена в [1, гл. 2]. Ее приложение к более сложным уравнениям с учетом химической реакции горения дано в [2]. Недавно в [3]–[5] уравнения движения неоднородного вязкого газа изучены при негладких начальных данных (из пространств Лебега). В данной заметке рассматривается задача горения.

1. Изучим систему квазилинейных дифференциальных уравнений

$$D_t \eta = Du, \quad \eta = \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

$$D_t u = D\sigma, \quad \sigma = \nu \rho Du - p, \quad p = k\rho\theta, \quad (2)$$

$$c_V D_t \theta = D\pi + \sigma Du + \mu f[\rho, \theta, z], \quad \pi = \lambda \rho D\theta, \quad (3)$$

$$D_t z = D\kappa - f[\rho, \theta, z], \quad \kappa = \chi \rho^2 Dz, \quad (4)$$

в области $Q = Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ с $\Omega = (0, M)$ при краевых и начальных условиях

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00214.

$$\begin{aligned} u|_{x=0, M} = 0, \quad \pi|_{x=0, M} = 0, \quad \varkappa|_{x=0, M} = 0, \\ \eta|_{t=0} = \eta^0(x), \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad z|_{t=0} = z^0(x) \quad \text{на } \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Искомьми являются функции $\eta(x, t)$, $u(x, t)$, $\theta(x, t)$, $z(x, t)$. Мы использовали обозначения $D = \partial/\partial x$, $D_t = \partial/\partial t$ и $f[\rho, \theta, z](x, t) = f(\rho(x, t), \theta(x, t), z(x, t), x)$.

Переменные x, t являются лагранжевыми массовыми координатами. Функции η, u, θ и z имеют физический смысл удельного объема, скорости, абсолютной температуры газа и концентрации несгоревшего топлива соответственно. Функция f характеризует скорость химической реакции. Например, для закона Аррениуса она имеет вид

$$f(\rho, \theta, z) = c_1 \rho^{l-1} \theta^\alpha \exp\left(\frac{\theta-1}{c_2 \theta}\right)$$

с $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $l \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Будем использовать пространства Лебега $L_q(G)$ и $L_{q,r}(Q)$ с нормой

$$\|w\|_{L_{q,r}(Q)} = \|\|w\|_{L_q(\Omega)}\|_{L_r(0,T)},$$

пространства $V_q(Q)$, $W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q)$ с нормами

$$\|w\|_{V_q(Q)} = \|w\|_{L_{q,\infty}(Q)} + \|Dw\|_{L_q(Q)}, \quad \|w\|_{W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q)} = \|w\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|Dw\|_{L_{q_1,r_1}(Q)},$$

где $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1)$, $q_i, r_i \in [1, \infty]$, $i = 0, 1$. Введем класс $\mathcal{N}(Q)$ положительных измеримых на Q функций η , имеющих конечную сумму норм

$$|\eta|_{\mathcal{N}(Q)} = \|\eta\|_{L_\infty(Q)} + \left\| \frac{1}{\eta} \right\|_{L_\infty(Q)} + \|D_t \eta\|_{L_2(Q)}.$$

Пусть $C([0, T]; L_q(\Omega))$ –пространство непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в $L_q(\Omega)$. Определим полунорму

$$\|w\|_{2,r}^{(0,1/2)} = \sup_{0 < \gamma < T} \gamma^{-1/2} \|w(x, t + \gamma) - w(x, t)\|_{L_{2,r}(Q_{T-\gamma})}.$$

Положим

$$(v, w)_G = \int_G v w \, dG, \quad (I_t \beta)(t) = \int_0^t \beta(t') \, dt'.$$

Пусть $N > 1$ –параметр, а $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Введем условия на коэффициенты, начальные данные и функцию f в задаче (1)–(6):

- (C₁) функции $\nu, c_V, \lambda, \mu, \chi \in \{w \in L_\infty(\Omega) \mid N^{-1} \leq w(x) \leq N \text{ почти всюду на } \Omega\}$, а $k \in L_\infty(\Omega)$, $0 \leq k(x) \leq N$ почти всюду на Ω ;
- (C₂) функции $\eta^0, u^0, \theta^0, z^0$ измеримы на Ω и $N^{-1} \leq \eta^0(x) \leq N$, $0 < \theta^0(x)$, $0 \leq z^0(x) \leq 1$ почти всюду на Ω , $\|u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\ln \theta^0\|_{L_1(\Omega)} \leq N$;
- (C₃) функция $f(\rho, \theta, z, x)$ измерима на множестве $(\mathbb{R}^+)^2 \times [0, 1] \times \Omega$, непрерывна по (ρ, θ, z) при почти всех $x \in \Omega$; кроме того, для всех $a > 1$ она удовлетворяет оценке $0 \leq f(\rho, \theta, z, x) \leq C(a)(1 + \theta)z$ при любых $(\rho, \theta, z) \in [a^{-1}, a] \times \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ и почти всех $x \in \Omega$.

Обобщенным решением задачи (1)–(6) назовем вектор-функцию $y = (\eta, u, \theta, z) \in \mathcal{N}(Q) \times V_2(Q) \times V_1(Q) \times V_2(Q)$ такую, что

- а) $0 < \theta(x, t)$ и $0 \leq z(x, t) \leq 1$ почти всюду в Q ;
- б) уравнение (1) удовлетворяется в $L_2(Q)$, а начальное условие $\eta|_{t=0} = \eta^0$ –в смысле $C([0, T]; L_2(\Omega))$;

в) выполнены интегральные тождества

$$\begin{aligned} -(u, D_t \varphi)_Q + (\sigma, D \varphi)_Q &= (u^0, \varphi|_{t=0})_\Omega, \\ -(c_V \theta, D_t \psi)_Q + (\pi, D \psi)_Q &= (c_V \theta^0, \psi|_{t=0})_\Omega + (\sigma D u + \mu f[\rho, \theta, z], \psi)_Q, \\ -(z, D_t \psi)_Q + (\varkappa, D z)_Q &= (z^0, \psi|_{t=0})_\Omega - (f[\rho, \theta, z], \psi)_Q \end{aligned}$$

(функции $\pi, \sigma, \varkappa$ определены в (2)–(4)) для любых функций $\varphi, \psi \in C^1(\overline{Q})$ с $\varphi|_{x=0, M} = 0$, $\varphi|_{t=T} = \psi|_{t=T} = 0$.

Сформулируем три теоремы: о существовании глобального обобщенного решения, его единственности и его сильной непрерывной зависимости от начальных данных.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (C_1) – (C_3) .

1) Тогда существует обобщенное решение $y = (\eta, u, \theta, z)$ задачи (1)–(6), удовлетворяющее оценкам

$$|\eta|_{\mathcal{N}(Q)} + \|u\|_{V_2(Q)} + \|\theta\|_{V_1(Q)} + \|z\|_{V_2(Q)} \leq K(N), \quad (7)$$

$$\|\ln \theta\|_{L_{1,\infty}(Q)} + \|D \ln \theta\|_{L_2(Q)} \leq K(N), \quad (8)$$

$$\|u\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q)} \leq K_\varepsilon(N), \quad \|u\|_{2,2}^{(0,1/2)} + \|\theta\|_{2,1}^{(0,1/2)} + \|z\|_{2,2}^{(0,1/2)} \leq K(N) \quad (9)$$

с любыми $q = (q_0, q_1)$, $r = (r_0, r_1)$ такими, что $q_0, r_0 \in [1, \infty]$, $q_1, r_1 \in [1, 2]$ и $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} = (1 + \varepsilon)/2$, $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} = 1 + \varepsilon/4$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

2) Справедливы оценки

$$\begin{aligned} K(N)^{-1} \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \theta^0(x) &\leq \theta(x, t), \\ K(N)^{-1} \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} z^0(x) &\leq z(x, t) \quad \text{почти всюду в } Q. \end{aligned} \quad (10)$$

3) Компоненты решения обладают свойствами $\eta \in C([0, T]; L_\infty(\Omega))$, $u \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $\theta \in C([0, T]; L_1(\Omega))$, $z \in C([0, T]; L_q(\Omega))$ с любым $q \in [1, \infty)$ и удовлетворяют начальным условиям (6) в смысле указанных пространств. Кроме того, $I_t \sigma \in C(\overline{Q})$.

Через $K(N)$, $K_\varepsilon(N)$ в теореме 1 и далее обозначаются неубывающие функции параметра N (они также могут зависеть от M и T).

Введем следующее условие типа Липшица на функцию f :

(C_4) для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и всех $a > 1$ верна оценка

$$\begin{aligned} &|f(\rho_1, \theta_1, z_1, z) - f(\rho_2, \theta_2, z_2, x)| \\ &\leq C(a)(\bar{\theta}^{3-\varepsilon_0} |\rho_1 - \rho_2| + \bar{\theta}^{2-\varepsilon_0} |\theta_1 - \theta_2| + \bar{\theta}^{2-\varepsilon_0} |z_1 - z_2|) \end{aligned}$$

с $\bar{\theta} = 1 + \theta_1 + \theta_2$ при любых $(\rho_1, \theta_1, z_1), (\rho_2, \theta_2, z_2) \in [a^{-1}, a] \times \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ и почти всех $x \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (C_1) – (C_4) . Тогда обобщенное решение $y = (\eta, u, \theta, z)$ из класса $\mathcal{N}(Q) \times V_2(Q) \times V_1(Q) \times V_2(Q)$ задачи (1)–(6) единственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (C_1) , (C_3) , (C_4) . Пусть также при $l = 1, 2$ для начальных данных $y^{0,(l)} = (\eta^{0,(l)}, u^{0,(l)}, \theta^{0,(l)}, z^{0,(l)})$ выполнено условие (C_2) и $y^{(l)} = (\eta^{(l)}, u^{(l)}, \theta^{(l)}, z^{(l)})$ – соответствующее (единственное) обобщенное решение задачи (1)–(6). Тогда для нормы разности $y^{(1)} - y^{(2)} = (\Delta \eta, \Delta u, \Delta \theta, \Delta z)$ верна следующая оценка через норму разности $y^{0,(1)} - y^{0,(2)} = (\Delta \eta^0, \Delta u^0, \Delta \theta^0, \Delta z^0)$:

$$\begin{aligned} &\|\Delta \eta\|_{L_\infty(Q)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q)} + \|\Delta \theta\|_{L_{q,r}(Q)} + \|\Delta z\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q)} \\ &\leq K_{\varepsilon, \varepsilon_0}(N) (\|\Delta \eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta \theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\Delta z^0\|_{L_1(\Omega)}) \end{aligned}$$

с любыми $q \in [2, \infty)$, $r \in [2, 4)$ такими, что $(2q)^{-1} + r^{-1} = (1 + \varepsilon)/2$, или с $q = \infty$, $r = 2/(1 + \varepsilon)$ при произвольном $\varepsilon \in (0, 1/2)$, с q, r , указанными в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условии (C_4) заменить $\bar{\theta}^{3-\varepsilon_0}$ и $\bar{\theta}^{2-\varepsilon_0}$ на $\bar{\theta}^{2.5-\varepsilon_0}$ и $\bar{\theta}^{1.5-\varepsilon_0}$ соответственно, то указанные в теореме 3 нормы Δz и Δz^0 можно заменить на $\|\Delta z\|_{V_2(Q)}$ и $\|\Delta z^0\|_{L_2(\Omega)}$.

2. Пусть $h = X/n$, $n = 2, 3, \dots$. Введем сетки

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^h &= \{x_i = ih, i = 0, \dots, n\}, & \bar{\omega}^{(h)} &= \{x_{i-1/2} = (i-1/2)h, i = 0, \dots, n+1\}, \\ \omega^h &= \bar{\omega}^h \setminus \{x_0, x_n\}, & \omega^{(h)} &= \bar{\omega}^{(h)} \setminus \{x_{-1/2}, x_{n+1/2}\}.\end{aligned}$$

Положим $\delta v_{i-1/2}^h = (v_i^h - v_{i-1}^h)/h$ и $\Omega_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, где i — целый или полупечный индекс. Пусть $\bar{v}^h(x) = v_{i-1/2}^h$ на $\Omega_{i-1/2}$, $i = 1, \dots, n$, либо $\bar{v}^h(x) = v_i^h$ на Ω_i , $i = 0, \dots, n$. Через $\hat{v}^h(x)$ обозначим кусочно-линейное восполнение (интерполяцию) функции v^h , заданной на одной из сеток $\bar{\omega}^h$ или $\bar{\omega}^{(h)}$. Введем усреднения

$$w_{hi} = h^{-1} \int_{\Omega_i} w(x) dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad w_{(h)i-1/2} = h^{-1} \int_{\Omega_{i-1/2}} w(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим полудискретный метод для задачи (1)–(6):

$$D_t \eta^h = \delta u^h, \quad \eta^h = \frac{1}{\rho^h}, \quad (11)$$

$$D_t u^h = \delta \sigma^h, \quad \sigma^h = \nu_{(h)} \rho^h \delta u^h - p^h, \quad p^h = k_{(h)} \rho^h \theta^h, \quad (12)$$

$$c_{V(h)} D_t \theta^h = \delta \pi^h + \sigma^h \delta u^h + \mu_{(h)} f_{(h)}[\rho^h, \theta^h, z^h], \quad \pi^h = \lambda_h \tilde{\rho}^h \delta \theta^h, \quad (13)$$

$$D_t z^h = \delta \varkappa^h - f_{(h)}[\rho^h, \theta^h, z^h], \quad \varkappa^h = \chi_h (\tilde{\rho}^h)^2 \delta z^h, \quad (14)$$

$$u^h|_{i=0,n} = 0, \quad \pi^h|_{i=0,n} = 0, \quad \varkappa^h|_{i=0,n} = 0, \quad (15)$$

$$\eta^h|_{t=0} = \eta_{(h)}^0, \quad u^h|_{t=0} = u_{(h)}^0, \quad \theta^h|_{t=0} = \theta_{(h)}^0, \quad z^h|_{t=0} = z_{(h)}^0. \quad (16)$$

Искомые функции $\eta^h, u^h, \theta^h, z^h$ определены по x в узлах сеток $\omega^{(h)}, \bar{\omega}^h, \bar{\omega}^{(h)}, \bar{\omega}^{(h)}$ соответственно и абсолютно непрерывны по t на $[0, T]$. Предполагается, что $0 < \eta^h, 0 < \theta^h$ и $0 \leq z^h \leq 1$. Функции σ^h, p^h определены по x в узлах сетки $\omega^{(h)}$, а π^h и $\varkappa^h$ — в узлах сетки $\bar{\omega}^h$. Уравнения (11)–(14) должны выполняться почти всюду на $(0, T)$, причем первое уравнение (12) должно выполняться по x в узлах ω^h , вторые уравнения (13), (14) — в узлах $\bar{\omega}^h$, а остальные уравнения (11)–(14) — в узлах $\omega^{(h)}$. Кроме того, $\tilde{\rho}_i^h = ((\eta_{i-1/2}^h + \eta_{i+1/2}^h)/2)^{-1}$ при $i = 0, \dots, n$ (причем $\eta_{i-1/2}^h = \eta_{i+1/2}^h$ при $i = 0, n$), $f_{(h)}[\rho^h, \theta^h, z^h]_{i-1/2} = (f(\rho_{i-1/2}^h, \theta_{i-1/2}^h, z_{i-1/2}^h, \cdot))_{(h)i-1/2}$, $i = 1, \dots, n$; функции λ и χ считаются четными, а u^0 — нечетной относительно точек $x = 0, M$.

Сформулируем две теоремы для полудискретной задачи (11)–(16): аналог теоремы 1 и результат о предельном переходе к исходной задаче (1)–(6).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (C_1) – (C_3) .

1) Тогда существует решение $y^h = (\eta^h, u^h, \theta^h, z^h)$ полудискретной задачи (11)–(16), удовлетворяющее оценкам вида (7)–(9) с $\bar{\eta}^h, \hat{u}^h, \hat{\theta}^h, \hat{z}^h$ и $\ln \hat{\theta}^h$ в роли η, u, θ, z и $\ln \theta$ соответственно.

2) Справедливы оценки вида (10) с $\hat{\theta}^h, \hat{z}^h$ в роли θ, z соответственно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия (C_1) – (C_3) .

1) Тогда из последовательности решений y^h задачи (11)–(16), указанной в теореме 4, можно выделить подпоследовательность (за которой сохраняем прежнее обозначение),

сходящуюся при $h \rightarrow 0$ к обобщенному решению y задачи (1)–(6), указанному в теореме 1, в следующем смысле:

$$\begin{aligned}\eta^h &\rightarrow \eta \quad \text{в } C([0, T]; L_q(\Omega)), & \hat{u}^h &\rightarrow u \quad \text{в } L_{q_2, r_2}(Q), \\ \hat{\theta}^h &\rightarrow \theta \quad \text{в } L_{q_0, r_0}(Q), & \hat{z}^h &\rightarrow z \quad \text{в } L_q(Q), \\ D\hat{u}^h &\rightarrow Du, \quad \bar{\sigma}^h \rightarrow \sigma, \quad D\hat{z}^h \rightarrow Dz, \quad \bar{\kappa}^h \rightarrow \kappa \quad \text{слабо в } L_2(Q), \\ D\hat{\theta}^h &\rightarrow D\theta, \quad \bar{\pi}^h \rightarrow \pi \quad \text{слабо в } L_{q_1, r_1}(Q), \\ \hat{u}^h &\rightarrow u \quad \text{*}-слабо в } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), & I_t \bar{\sigma}^h &\rightarrow I_t \sigma \quad \text{в } L_\infty(Q)\end{aligned}$$

при любых $q \in [1, \infty)$, $q_2 \in [1, \infty]$, $r_2 \in [1, \infty)$, $(2q_2)^{-1} + r_2^{-1} > 1/4$ и любых $q_0, r_0, q_1 > 1, r_1$ из теоремы 1.

2) Если дополнительно выполнено условие (C_4) , то вся последовательность (единственных) решений y^h задачи (11)–(16) сходится к (единственному) обобщенному решению y задачи (1)–(6) в указанном в утверждении 1) смысле.

Теорема 4 доказывается первой при помощи соответствующих результатов и техники из [4]. Из теоремы 4 выводятся утверждения 1), 2) теоремы 1 и утверждение 1) теоремы 5 с помощью соответствующих результатов и техники из [4], [6]. Теоремы 2 и 3 вытекают из аналогичных основных и некоторых вспомогательных результатов из [5]. Утверждение 3) теоремы 1 следует из [5], а утверждение 2) теоремы 5 – из теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как и в работах [4]–[6], можно было рассмотреть не только краевые условия вида (5), но и условия другого типа, причем неоднородные. Кроме того, в теореме 3 можно было дать более общую оценку $y^{(1)} - y^{(2)}$ (по аналогии с [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Bressan A. // Boll. Un. Mat. Ital. B (7). 1986. V. 5. № 1. P. 291–308.
3. Амосов А. А., Злотник А. А. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 3–16.
4. Амосов А. А., Злотник А. А. // Изв. вузов. Матем. 1997. Т. 41. № 4. С. 3–19.
5. Злотник А. А., Амосов А. А. // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 4. С. 767–789.
6. Amosov A. A., Zlotnik A. A. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. V. 12. № 3. P. 171–197.