Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Сенцов, О базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с интегральными условиями, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 6, 948–952

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:11:36

О БАЗИСНОСТИ РИССА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ю.Г. Сенцов

В этой заметке мы исследуем спектральные свойства дифференциального оператора с интегральными условиями:

$$\begin{aligned} L(y) &= -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ U_i(y) &= \int_0^1 y(x) \overline{\varphi}_i(x) dx = (y, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-01000.

$$D(L) = \{y \in W^2[0, 1] : (y, \varphi_i) = 0, i = 1, 2\}.$$

В дальнейшем предполагаем, что функции q и φ_i гладкие и существуют целые числа $s_i \geq 0$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\varphi_i^{(k)}(0) = \varphi_i^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s_i - 1, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\Theta = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(s_1)}(0) & (-1)^{s_1} \varphi_1^{(s_1)}(1) \\ \varphi_2^{(s_2)}(0) & (-1)^{s_2} \varphi_2^{(s_2)}(1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

В работах [1], [2] получены оценки для резольвенты $(L - \lambda I)^{-1}f$ в областях

$$\Omega_{\varepsilon, q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \geq \varepsilon, |\lambda| \geq q\},$$

где $\varepsilon, q > 0$ при условии $s_1 = s_2 = 0$, $\Theta \neq 0$, и доказана полнота корневых функций в пространстве $\overline{D(L)}$. В этой заметке мы покажем, что для изучения спектральных свойств рассматриваемой задачи применим метод [3]. В частности, модифицируя этот метод, мы получим, что собственные и присоединенные функции (СПФ) оператора L образуют базис Рисса со скобками в некотором “естественном” пространстве, являющемся подпространством в $L_2[0, 1]$.

Положим $\overline{L}(y) = -y'' + \overline{q}(x)y$, $\psi_{ki}(x) = \overline{L}^k(\varphi_i)$ и введем пространство

$$H = \left\{ y \in L_2[0, 1] : (y, \psi_{ki}) = 0, k = 0, 1, \dots, \left[\frac{s_i}{2} \right], i = 1, 2 \right\}.$$

Интегрируя по частям $(L^k(y), \varphi_i)$, нетрудно заметить, что СПФ оператора L лежат в пространстве H .

Система функций $\{\varphi_i\}$ называется *базисом Рисса со скобками* в гильбертовом пространстве H , если для любого $f \in H$ существует единственное представление $f = \sum_i a_i \varphi_i$, где ряд сходится безусловно, после заключения некоторых его членов в скобки, расстановка которых не зависит от f .

Нами доказана

ТЕОРЕМА. Если для оператора L выполняются условия (2) и (3), $q(x) \in C^m[0, 1]$, где $m = \max(0, 2[s_1/2] - 2, 2[s_2/2] - 2)$, $\varphi_i(x) \in C^{s_i+2}[0, 1]$, $i = 1, 2$, то спектр оператора L дискретный, а система СПФ образует базис Рисса со скобками в пространстве H . При этом если

$$\Theta_1 = - \begin{vmatrix} \varphi_1^{(s_1)}(0) & (-1)^{s_1} \varphi_1^{(s_1)}(0) \\ \varphi_2^{(s_2)}(0) & (-1)^{s_2} \varphi_2^{(s_2)}(0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_1^{(s_1)}(1) & (-1)^{s_1} \varphi_1^{(s_1)}(1) \\ \varphi_2^{(s_2)}(1) & (-1)^{s_2} \varphi_2^{(s_2)}(1) \end{vmatrix} \neq \pm 2\Theta,$$

то система СПФ оператора L образует базис Рисса (без скобок) в H .

Изложим схему доказательства. Сделаем замену параметра $\lambda = \rho^2$. В дальнейшем для простоты записи будем пользоваться стандартным обозначением $[A] = A + O(1/\rho)$. Разобьем ρ -плоскость на четверти: $S_1 = \{\rho : \operatorname{Re} \rho \geq 0, \operatorname{Im} \rho \geq 0\}$, $S_k = (i)^{k-1} S_1$, $k = 2, 3, 4$. Хорошо известно [4], что в любой области $S = c + S_i$, $c \in \mathbb{C}$, для уравнения (1) можно подобрать пару решений с асимптотиками:

$$\begin{aligned} y_1(x, \rho) &= e^{ix\rho}[1], & y'_1(x, \rho) &= i\rho e^{ix\rho}[1], \\ y_2(x, \rho) &= e^{-ix\rho}[1], & y'_2(x, \rho) &= -i\rho e^{-ix\rho}[1], \end{aligned} \quad \rho \in S. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Характеристический определитель оператора L , построенный по системе (4), имеет вид

$$\Delta(\rho) = \frac{i^{s_1+s_2}}{\rho^{s_1+s_2+2}} ((-1)^{s_1+s_2+1} [\Theta] e^{i\rho} + [\Theta] e^{-i\rho} + [\Theta_1]). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражения (4) в

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}$$

и используя формулы

$$\begin{aligned} U_i(y_1) &= -\frac{i^{s_i+1}}{\rho^{s_i+1}} (e^{i\rho} [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(1)] - [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(0)]), \\ U_i(y_2) &= -\frac{(-i)^{s_i+1}}{\rho^{s_i+1}} (e^{-i\rho} [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(1)] - [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(0)]), \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

полученные интегрированием по частям, приходим к (5).

ЛЕММА 2 [4]. Собственные значения оператора L имеют в области $c + S_1$ асимптотику

$$\rho_{ki} = \zeta_i + 2\pi k + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2,$$

причем $\zeta_1 = \zeta_2$ тогда и только тогда, когда $\Theta_1 = \pm 2\Theta$.

Запишем функцию Грина оператора L в следующем виде:

$$G(x, \xi, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \begin{vmatrix} y_1(x, \rho) & y_2(x, \rho) & g(x, \xi, \rho) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(g) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} g(x, \xi, \rho) &= \begin{cases} -y_1(x, \rho)z_1(\xi, \rho), & x \geq \xi, \\ y_2(x, \rho)z_2(\xi, \rho), & x < \xi, \end{cases} \\ z_1 = \frac{y_2(\xi, \rho)}{W(\rho)}, \quad z_2 = -\frac{y_1(\xi, \rho)}{W(\rho)}, \quad W(\rho) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \{\rho : |\rho - \rho_k| > \varepsilon\}$, где $\{\rho_k\}$ – множество нулей $\Delta(\rho)$.

ЛЕММА 3. В секторе $S = c + S_1$ функция Грина имеет представление

$$\begin{aligned} \rho G(x, \xi, \rho) &= P_0(x, \xi, \rho) + A_0(x, \xi, \rho)e^{ix\rho}e^{i\xi\rho} + A_1(x, \xi, \rho)e^{i(1-x)\rho}e^{i\xi\rho} \\ &+ A_2(x, \xi, \rho)e^{ix\rho}e^{i(1-\xi)\rho} + A_3(x, \xi, \rho)e^{i(1-x)\rho}e^{i(1-\xi)\rho} + A_4(x, \xi, \rho)e^{ix\rho} \\ &+ A_5(x, \xi, \rho)e^{i(1-x)\rho} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{[s_i/2]} B_{ki}(x, \rho)\overline{\psi}_{ki}(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $P_0(x, \xi, \rho)$ – ограниченная голоморфная по ρ функция в секторе S ,

$$\begin{aligned} A_i(x, \xi, \rho) &= a_i(\rho)(1 + \rho^{-1}\psi_i(x, \rho))(1 + \rho^{-1}\chi_i(\xi, \rho)), \quad i = 0, \dots, 3, \\ A_i(x, \xi, \rho) &= a_i(\rho)(1 + \rho^{-1}\psi_i(x, \rho))\rho^{-1}\chi_i(\xi, \rho), \quad i = 4, 5, \\ B_{ki}(x, \rho) &= \rho^{s_i-2k}\gamma_{ki}(x, \rho), \quad k = 0, \dots, \left[\frac{s_i}{2}\right], \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

причем при выполнении условий (2), (3) для всех $\rho \in S \cap \Omega_\varepsilon$ равномерно по x, ξ, ρ выполняются оценки

$$|a_i(\rho)| + |\psi_i(x, \rho)| + |\chi_i(\xi, \rho)| + |\gamma_{ki}(x, \rho)| \leq C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем все функции, входящие в (6), их асимптотическими представлениями в S и умножим второй столбец на $e^{i\rho}$. При этом

$$U_i(g(x, \xi)) = -\frac{1}{2} \frac{i^{s_i}}{\rho^{s_i+1}} e^{i(1-\xi)\rho} [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(1)] + \sum_{k=0}^{[s_i/2]} \frac{\overline{\psi}_{ki}(\xi)}{\rho^{2k+2}} - \frac{1}{2} \frac{(-i)^{s_i}}{\rho^{s_i+1}} e^{i\xi\rho} [\overline{\varphi}_i^{(s_i)}(0)].$$

Функция $e^{i\rho} \Delta(\rho)$ в Ω_ε ограничена снизу числом $C_\varepsilon > 0$. Отсюда сразу следует представление (7).

ЛЕММА 4. Для любой функции $f \in H$ в области Ω_ε выполняется оценка

$$\left| \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi \right| < \frac{C_\varepsilon}{|\rho|}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представления вида (7) справедливы во всех четвертях ρ -плоскости. В представлении (7) все слагаемые, кроме (8), ограничены в $\rho \in S \cap \Omega_\varepsilon$. Но после интегрирования с функцией $f(\xi)$ все растущие слагаемые вида (8) в представлении (7) аннулируются.

Рассмотрим оператор

$$L_1: H \rightarrow H, \quad L_1(y) = L(y), \\ D(L_1) = \{y \in W^2[0, 1] \cap H : (L(y), L^{[s_i/2]}(\varphi_i)) = 0, i = 1, 2\}.$$

ЛЕММА 5. Пусть оператор L удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $D(L_1)$ плотна в H , спектр L_1 дискретен, а его СПФ совпадают с СПФ оператора L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получаем

$$(L(y), L^{[s_i/2]}(\varphi_i)) = -\varphi_i^{(2[s_i/2])}(1)y'(1) + \varphi_i^{(2[s_i/2])}(0)y'(0) + \varphi_i^{(2[s_i/2]+1)}(1)y(1) \\ - \varphi_i^{(2[s_i/2]+1)}(0)y(0) + \int_0^1 y \overline{L}^{[s_i/2]+1}(\varphi_i) dx.$$

Поскольку $\Theta \neq 0$, $D(L_1)$ плотна в H . Если λ не является нулем $\Delta(\lambda)$, то $(L_1 - \lambda I)^{-1} = (L - \lambda I)^{-1}$ на H . Следовательно, спектр L_1 дискретен. Так как СПФ оператора L лежат в $D(L_1)$, они совпадают с СПФ оператора L_1 .

Пусть $\{Y_k\}$ и $\{Z_k\}$ – взаимно сопряженные системы СПФ операторов L_1 и L_1^* соответственно.

ЛЕММА 6. Система $\{Z_k\}$ полна в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим $\{Z_k\}$ не полна в H . Тогда существует $f \in H$ ортогональная всем Z_k . Из [5] следует, что $(L_1 - \lambda I)^{-1}f$ – целая функция. Из оценки (9) следует, что $(L_1 - \lambda I)^{-1}f = 0$. Поскольку спектр L_1 дискретный, то $f = 0$.

Из леммы 2 следует, что область $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon$ при достаточно малом ε разбивается на непересекающиеся односвязные компоненты G_l , $l = 1, 2, \dots$, каждая из которых содержит не более двух собственных значений, причем в случае $\Theta \neq 0$ области G_l содержат ровно по одному собственному значению.

Разложение функции f по СПФ оператора L представляется интегралом

$$-\frac{1}{\pi i} \sum_l \int_{\partial G_l} \rho \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi d\rho. \quad (10)$$

ЛЕММА 7. Ряд (10) сходится безусловно для любого $f \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрирование с $f(\xi) \in H$ уничтожает слагаемое (8) в представлении (7). Остается применить лемму 7 работы [3].

Заметим, что ряд (10) совпадает с рядом

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{\rho_k \in G_l} (f, Z_k) Y_k \right). \quad (11)$$

По лемме 7 этот ряд сходится к некоторой функции $g \in H$. Из (11) следует $(g, Z_k) = (f, Z_k)$. По лемме 6 $\{Z_k\}$ плотна в H . Следовательно, $g(x) = f(x)$, что завершает доказательство теоремы.

Автор благодарит профессора А. А. Шкалика за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. // Докл. РАН. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.
2. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 25–32.
3. Шкалик А. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
5. Келдыш М. В. // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 15–41.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.12.98