Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, Выражение тензора Римана подмногообразия евклидова пространства, заданного системой уравнений, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:33:24

УДК 517

ВЫРАЖЕНИЕ ТЕНЗОРА РИМАНА ПОДМНОГООБРАЗИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ЗАДАННОГО СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Ю. А. Аминов

В работе найдено выражение тензора Римана подмногообразия евклидова пространства через производные задающих его функций и компоненты касательных векторов. Подробно рассмотрен случай коразмерности 2, в частности, двумерной поверхности в E^4 . В качестве примера найдена гауссова кривизна пересечения гиперквадрик с общими осями.

Библиография: 2 названия.

В данной работе рассматривается общий вопрос определения выражения тензора Римана m -мерного регулярного подмногообразия F^m евклидова пространства E^{m+p} , заданного системой p уравнений, т.е. в неявном виде. Полученное нами выражение удобно для вычисления тензора Римана конкретно заданных многообразий, особенно алгебраических.

Пусть в евклидовом пространстве E^{m+p} с декартовыми координатами $x^1, \dots, x^{m+p}$ задано регулярное подмногообразие F^m с помощью следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^1, \dots, x^{m+p}) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_p(x^1, \dots, x^{m+p}) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции Φ_k принадлежат классу регулярности C^2 . Хорошо известны достаточные условия того, чтобы данная система определяла регулярное подмногообразие. Они состоят в том, что в точке P_0 , координаты которой удовлетворяют системе уравнений (1), ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right\|$$

равен p .

Пусть в то же время имеем параметрическое задание того же подмногообразия $x^i = x^i(u^1, \dots, u^m)$, $i = 1, \dots, m + p$, или в векторной форме $r = r(u^1, \dots, u^m)$. Пусть p_{kj}^r – компоненты бивектора $[r_k r_j]$. Пусть $a_{\alpha\beta} = (\text{grad } \Phi_\alpha \text{ grad } \Phi_\beta)$ и $(a^{\alpha\beta})$ – матрица, обратная к матрице $(a_{\alpha\beta})$. Пусть

$$\Phi_{\alpha|i} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^i}, \quad \Phi_{\alpha|ij} = \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть подмногообразие F^m в евклидовом пространстве E^{m+p} задано системой уравнений (1). Тогда тензор Римана этого подмногообразия имеет вид

$$R_{hijk} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \Phi_{\alpha|rs} & \Phi_{\alpha|ls} \\ \Phi_{\beta|rn} & \Phi_{\beta|ln} \end{vmatrix} a^{\alpha\beta} p_{hi}^l p_{jk}^{sn}. \quad (2)$$

Пусть X, Y, Z и T – четыре вектора, касательные к подмногообразию в одной точке. Пусть $[XY]$ и $[ZT]$ – бивекторы, построенные на этих векторах, каждый из которых рассматривается как вектор в E^{m+p} , и $[XY]^{rl}$ и $[ZT]^{sn}$ – их компоненты. Тогда можно записать выражение, не зависящее от параметризации на подмногообразии,

$$R(X, Y, Z, T) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \Phi_{\alpha|rs} & \Phi_{\alpha|ls} \\ \Phi_{\beta|rn} & \Phi_{\beta|ln} \end{vmatrix} a^{\alpha\beta} [XY]^{rl} [ZT]^{sn}. \quad (2')$$

Действительно, $R(X, Y, Z, T) = R_{hijk} X^h Y^i Z^j T^k$, где $X^h, \dots$ – компоненты этих векторов относительно базиса пространства r_h . Кроме того, заметим, что

$$p_{hi}^l X^h Y^i = [XY]^{rl}, \quad p_{jk}^{sn} Z^j T^k = [ZT]^{sn}.$$

С учетом этих замечаний из (2) следует (2')

Перейдем к доказательству (2). Дифференцируя правые и левые части уравнений системы (1) по параметру u^j , мы получим

$$\Phi_{\alpha|i} x_j^i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (3)$$

Таким образом, нормальными к подмногообразию являются векторы $\xi_\alpha = \text{grad } \Phi_\alpha$. Для получения искомого выражения мы используем обычный способ получения уравнений Гаусса для подмногообразия, заданного в параметрической форме. Для этого сначала рассмотрим аналоги разложений Гаусса и Вейнгартена. Набор векторов $\xi_1, \dots, \xi_p$ составляет косоугольный базис нормального пространства в каждой точке подмногообразия F^m . Вместе с касательными векторами r_{u^i} получим полный базис пространства E^{m+p} . Поэтому можем записать разложения Гаусса для вторых производных радиуса вектора $r_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}$

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + \Omega_{ij}^\alpha \xi_\alpha.$$

Как обычно, эти разложения можем переписать с помощью ковариантных производных, которые обозначим запятой

$$r_{,ij} = \Omega_{ij}^\alpha \xi_\alpha. \quad (4)$$

Введем следующие обозначения для скалярных произведений

$$(r_{,ij} \xi_\alpha) = C_{ij}^\alpha, \quad (\xi_\alpha \xi_\beta) = a_{\alpha\beta}.$$

С помощью разложений (4) находим

$$C_{ij}^\beta = \Omega_{ij}^\alpha a_{\alpha\beta}.$$

Следовательно,

$$C_{ij}^\beta a^{\beta\gamma} = \Omega_{ij}^\gamma. \quad (5)$$

Далее запишем разложение производных от нормальных векторов по векторам базиса пространства E^{m+p}

$$\xi_{\alpha,i} = A_i^{\alpha k} r_k + \mu_{\rho\alpha|i} \xi_\rho. \quad (6)$$

Заметим, что в отличие от обычно рассматриваемого случая, когда базис нормалей ортонормированный, в нашем случае коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\alpha|i}$, вообще говоря, не равны нулю. В дальнейшем коэффициенты кручения нам не понадобятся. Пусть g_{ij} – коэффициенты метрики F^m относительно координат $u^1, \dots, u^n$, т.е. $(r_i r_j) = g_{ij}$. Умножая скалярно правую и левую части разложений (6) на базисные касательные векторы, обычным способом найдем коэффициенты $A_i^{\alpha r}$:

$$A_i^{\alpha r} = -C_{ji}^{\alpha} g^{jr}.$$

Таким образом, имеем обычное по виду разложение

$$\xi_{\alpha,i} = -C_{si}^{\alpha} g^{sr} r_r + \mu_{\rho\alpha|i} \xi_\rho. \quad (7)$$

Дифференцируя ковариантно (3), получим

$$r_{,ijk} = \Omega_{ij}^{\alpha} C_{sk}^{\alpha} g^{sr} r_r + \dots,$$

где точками заменены векторы из нормального пространства. Имеем для разности третьих ковариантных производных

$$r_{,ijk} - r_{,ikj} = (\Omega_{ik}^{\alpha} C_{sj}^{\alpha} - \Omega_{ij}^{\alpha} C_{sk}^{\alpha}) g^{sl} r_l + \dots,$$

где многоточием здесь и в дальнейшем заменены векторы из нормального пространства. С другой стороны,

$$r_{,ijk} - r_{,ikj} = R_{ijk}^l r_l = (C_{ik}^{\beta} C_{sj}^{\alpha} - C_{ij}^{\beta} C_{sk}^{\alpha}) a^{\beta\alpha} g^{sl} r_l + \dots.$$

Отсюда получим

$$R_{sijk} = (C_{ik}^{\beta} C_{sj}^{\alpha} - C_{ij}^{\beta} C_{sk}^{\alpha}) a^{\beta\alpha}. \quad (8)$$

По определению

$$C_{ij}^{\alpha} = (r_{,ij} \xi_{\alpha}) = (r_{ij} \xi_{\alpha}),$$

где r_{ij} – обычные производные. Из уравнения (2) имеем

$$\Phi_{\alpha|rs} x_i^r x_j^s + \Phi_{\alpha|r} x_{ij}^r = 0.$$

Поэтому

$$C_{ij}^{\alpha} = (r_{ij} \xi_{\alpha}) = -\Phi_{\alpha|rs} x_i^r x_j^s. \quad (9)$$

Подставим эти выражения C_{ij}^{α} в (8). После элементарных преобразований приходим к доказываемой формуле (2). В дальнейшем удобно использовать следующие обозначения

$$M_{rlns} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \Phi_{\beta|rs} & \Phi_{\beta|ls} \\ \Phi_{\alpha|rn} & \Phi_{\alpha|ln} \end{vmatrix} a^{\alpha\beta}.$$

Тогда формула (2) переписывается в виде

$$R_{hijk} = M_{rlsn} p_{hi}^{rl} p_{jk}^{sn}.$$

Рассмотрим как преобразуется формула (2) в том случае, когда система (1) содержит всего два уравнения. Имеем

$$a_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & (\xi_1 \xi_2) \\ (\xi_1 \xi_2) & \xi_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\det(a^{\alpha\beta}) = |[\xi_1 \xi_2]|^2.$$

Обозначим этот детерминант через Δ . Положим $\gamma = (\Delta)^{-1}$. Для обратной матрицы имеем выражение.

$$\begin{pmatrix} \xi_2^2 \gamma & -(\xi_1 \xi_2) \gamma \\ -(\xi_1 \xi_2) \gamma & \xi_1^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$M_{rlsn} = \frac{1}{4} \left[\begin{vmatrix} \Phi_{1|rs} & \Phi_{1|ls} \\ \Phi_{1|rn} & \Phi_{1|ln} \end{vmatrix} (\text{grad } \Phi_2)^2 - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \Phi_{1|rs} & \Phi_{1|ls} \\ \Phi_{2|rn} & \Phi_{2|ln} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{2|rs} & \Phi_{2|ls} \\ \Phi_{1|rn} & \Phi_{1|ln} \end{vmatrix} (\text{grad } \Phi_1 \text{ grad } \Phi_2) + \begin{vmatrix} \Phi_{2|ts} & \Phi_{2|ls} \\ \Phi_{2|rn} & \Phi_{2|ln} \end{vmatrix} (\text{grad } \Phi_1)^2 \end{pmatrix} \Delta^{-1} \right].$$

Определим векторы

$$\sigma_{rs} = \Phi_{1|rs} \text{grad } \Phi_2 - \Phi_{2|rs} \text{grad } \Phi_1.$$

Тогда имеем

$$M_{rlsn} = [(\sigma_{rs} \sigma_{ln}) - (\sigma_{rn} \sigma_{ls})] \frac{\Delta^{-1}}{4}.$$

Формула еще больше упрощается для двумерной поверхности в E^4 . Пусть поверхность задана двумя уравнениями $\Phi = 0$, $\Psi = 0$. Все пары различных индексов (i, l) упорядочим в виде

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).$$

Каждой такой паре соответствует число α – порядковый номер места, на котором стоит эта пара. Например, паре (1,4) соответствует число $\alpha = 3$. Введем симметрическую матрицу A с компонентами $A_{\alpha\beta} = M_{iljk}$, где α – номер пары (il) , β – номер пары (jk) . Введем простой поливектор $d = [\text{grad } \Phi \text{ grad } \Psi]$ с компонентами

$$d^{ij} = \begin{vmatrix} \Phi_i & \Phi_j \\ \Psi_i & \Psi_j \end{vmatrix}.$$

Пусть q – дополнительный к d бивектор, компоненты которого есть

$$q^{ij} = \varepsilon^{ijkl} d^{kl}.$$

Тогда гауссова кривизна K поверхности F^2 в E^4 имеет вид

$$K = \frac{A_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta}{|q|^4}. \quad (10)$$

Выпишем матрицу A в развернутом виде. Элементами этой матрицы являются M_{iljk} , но мы укажем только индексы элементов. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1212 & 1213 & 1214 & 1223 & 1224 & 1234 \\ * & 1313 & 1314 & 1323 & 1324 & 1334 \\ * & * & 1414 & 1423 & 1424 & 1434 \\ * & * & * & 2323 & 2324 & 2334 \\ * & * & * & * & 2424 & 2334 \\ * & * & * & * & * & 3434 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_{11}\sigma_{22}) - \sigma_{12}^2 & (\sigma_{11}\sigma_{23}) - (\sigma_{12}\sigma_{13}) & \dots \\ (\sigma_{11}\sigma_{23}) - (\sigma_{12}\sigma_{13}) & (\sigma_{11}\sigma_{33}) - \sigma_{13}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

а вектор $q = (d^{34}, -d^{24}, d^{23}, d^{14}, -d^{13}, d^{12})$.

В качестве примера использования формулы (10) найдем гауссову кривизну поверхности $F^2 \subset E^4$, полученной пересечением гиперквадрик с общими осями. Пусть поверхность $F^2 \subset E^4$ задана системой уравнений

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 a_i x_i^2 - d_1 = 0,$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 b_i x_i^2 - d_2 = 0,$$

где a_i, b_i, d_i – постоянные. Обозначим

$$c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \quad \gamma_i = 2(d_1 b_i - d_2 a_i).$$

Кроме того, используем еще следующие обозначения

$$\lambda_1 = \gamma_1 c_{21} c_{31} c_{41}, \quad \lambda_2 = c_{12} \gamma_2 c_{32} c_{42},$$

$$\lambda_3 = c_{13} c_{23} \gamma_3 c_{43}, \quad \lambda_4 = c_{14} c_{24} c_{34} \gamma_4.$$

Тогда гауссова кривизна $F^2 \subset E^4$ вычисляется по формуле

$$K = \frac{\sum_{i=4}^4 x_i^4 \lambda_i}{[\sum_{i<j} (c_{ij} x_i x_j)^2]^2}. \quad (11)$$

Действительно, так как при $i \neq j$ имеем $\Phi_{ij} = \Psi_{ij} = 0$, то матрица A диагональная и вычисления сильно упрощаются. Имеем

$$(qAq) = (d^{34})^2(\sigma_{11}\sigma_{22}) + (d^{24})^2(\sigma_{11}\sigma_{33}) + (d^{23})^2(\sigma_{11}\sigma_{44}) \\ + (d^{14})^2(\sigma_{22}\sigma_{33}) + (d^{13})^2(\sigma_{22}\sigma_{44}) + (d^{12})^2(\sigma_{33}\sigma_{44}).$$

Простыми вычислениями находим

$$\sigma_{ii} = a_i \operatorname{grad} \Psi - b_i \operatorname{grad} \Phi = \begin{pmatrix} c_{i1}x_1 \\ c_{i2}x_2 \\ c_{i3}x_3 \\ c_{i4}x_4 \end{pmatrix}.$$

Далее, $d^{ij} = c_{ij}x_ix_j$. Следовательно,

$$(\sigma_{ii}\sigma_{jj}) = c_{i1}c_{j1}x_1^2 + c_{i2}c_{j2}x_2^2 + c_{i3}c_{j3}x_3^2 + c_{i4}c_{j4}x_4^2.$$

С помощью уравнений, задающих поверхность, находим

$$c_{1i}x_1^2 + c_{2i}x_2^2 + c_{3i}x_3^2 + c_{4i}x_4^2 = \gamma_i. \quad (12)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} (qAq) = & c_{34}^2x_3^2x_4^2[c_{13}c_{23}x_3^2 + c_{14}c_{24}x_4^2] + c_{24}^2x_2^2x_4^2[c_{12}c_{32}x_2^2 + c_{14}c_{34}x_4^2] \\ & + c_{23}^2x_2^2x_3^2[c_{12}c_{42}x_2^2 + c_{13}c_{43}x_3^2] + c_{14}^2x_1^2x_4^2[c_{31}c_{21}x_1^2 + c_{34}c_{24}x_4^2] \\ & + c_{13}^2x_1^2x_3^2[c_{41}c_{21}x_1^2 + c_{43}c_{23}x_3^2] + c_{12}^2x_1^2x_2^2[c_{31}c_{41}x_1^2 + c_{32}c_{42}x_2^2]. \end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при x_i^4 . Тогда получим

$$(qAq) = x_1^4c_{21}c_{31}c_{41}[c_{21}x_2^2 + c_{31}x_3^2 + c_{41}x_4^2] + \dots$$

Выражения в квадратных скобках заменим на постоянные числа γ_i согласно уравнениям (12). Следовательно, $(qAq) = \sum \lambda_i x_i^4$. Учитывая выражения d^{ij} , приходим к формуле (11).

Формула (10) довольно сложна в применении. Рассмотрим частный случай задания поверхности F^2 , когда функция Φ зависит только от координат x_1, x_2, x_3 , а из уравнения $\Psi = 0$ следует простое выражение координаты x_4 через первые три:

$$\begin{aligned} \Phi &= a(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \Psi &= b(x_1, x_2, x_3) - x_4 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{F}^2$ – поверхность в E^3 , заданная первым уравнением. Тогда задание функции $x_4 = b(x_1, x_2, x_3)$ на этой поверхности определяет поверхность $F^2 \subset E^4$. В этом случае имеем для производных $\Phi_4 = 0$, $\Psi_4 = -1$, $\Phi_{4i} = 0$, $\Psi_{4i} = 0$. Поэтому векторы $\sigma_{4i} = 0$. Кроме того, $p^{14} = -\Phi_1$, $p^{24} = -\Phi_2$, $p^{34} = -\Phi_3$. Матрица A в этом случае содержит много нулей, и выражение (qAq) значительно упрощается:

$$(qAq) = \operatorname{grad} \Phi \begin{pmatrix} \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 & \sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{33}\sigma_{12} & \sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{22}\sigma_{13} \\ * & \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2 & \sigma_{12}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23} \\ * & * & \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 \end{pmatrix} \operatorname{grad} \Phi.$$

Пусть a_{ik}, b_{ik} – вторые производные функций a и b . Введем величины

$$T_{ijkl} = a_{ik}b_{jl} + a_{jl}b_{ik} - a_{il}b_{jk} - a_{jk}b_{il}.$$

Определим симметрическую матрицу T

$$T = \begin{pmatrix} T_{2323} & T_{3123} & T_{2132} \\ * & T_{1313} & T_{1231} \\ * & * & T_{1212} \end{pmatrix}.$$

После подстановки выражений векторов σ_{ij} мы получим

$$(qAq) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} (1 + |\text{grad } b|^2) - (\text{grad } aT \text{ grad } a)(\text{grad } a \text{ grad } b) - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} |\text{grad } a|^2. \quad (13)$$

В то же время $|q|^4 = (|\text{grad } a \text{ grad } b|^2 + |\text{grad } a|^2)^2$.

Заметим, что первый детерминант в формуле (13) связан с гауссовой кривизной $\tilde{K}$ поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^3$. Именно, имеет место формула Неймана (см., например, [1])

$$\tilde{K} = - \frac{1}{|\text{grad } a|^4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученные формулы удобны для численных расчетов кривизны, когда функции Φ_α явно заданы.

Другая связь между гауссовыми кривизнами K и $\tilde{K}$ установлена нами в работе [2]

$$K = \frac{\tilde{K}}{1 + \nabla_1 b} + \frac{\nabla_{22} b}{(1 + \nabla_1 b)^2},$$

где $\nabla_1 b$ – первый дифференциальный параметр Бельтрами функции b на $\tilde{F}^2$ и ∇_{22} – оператор Монжа–Ампера в метрике этой поверхности. Из этой формулы, например, следует, что над заранее заданной поверхностью $\tilde{F}^2$ не всегда можно построить регулярную поверхность F^2 с заранее заданной метрикой (см. теорему 2 из [2]).

Для квадрата первой кривизны k_1 кривой в евклидовом пространстве, заданной системой уравнений, получим аналогичным образом следующее выражение

$$k_1^2 = \Phi_{\alpha|jk} \Phi_{\beta|lm} a^{\alpha\beta} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds},$$

где s – длина дуги кривой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
- [2] Аминов Ю. А. О двумерных метриках отрицательной кривизны // Украин. геом. сб. 1973. № 13. С. 9–15.